

exercice 4: $2x^2 - 2x - 1$

$$\Delta = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$$

les deux racines sont: $\frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2} \approx 2,4$	4	$+\infty$
$x^2 - 2x + 1$	+	0	-	0	+

Ainsi $\forall x \geq 4: x^2 - 2x - 1 \geq 0$

$$2^n \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 2^n \geq n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 \geq 0 \quad \text{ok}$$

$\forall n \geq 4, 2^n \geq (n+1)^2$

Initialisation: pour $n=4: 2^4=16$ et $4^2=16 \quad 16 \geq 16 \quad \text{ok}$

Hérédité: On prend un $n \geq 4$. On suppose que $2^n \geq n^2$

On multiplie par 2: $2^n \cdot 2 \geq 2n^2 \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 2n^2$

Or $2n^2 \geq (n+1)^2$ donc $2^{n+1} \geq (n+1)^2 \quad \text{CQFD}$

Conclusion: $\forall n \geq 4, 2^n \geq n^2$