

$$\textcircled{3} \quad \forall n \geq 1, \quad 1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

Initialisation : Pour $n=1$: $1 \times 1! = 1$ et $(1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$ Ok

Hérédité : Je prends un $n \geq 1$ Je suppose que $1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$
 (On doit montrer que $\underbrace{1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots}_{(n+1)! - 1} + (n+1)n! = (n+2)! - 1$)

On ajoute $(n+1)n!$ à l'hypothèse de récurrence :

$$1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + (n+1)n! = (n+1)! - 1 + (n+1)n!$$

$$= (n+1)! [1 + (n+1)] - 1$$

$$= (n+1)! [n+2] - 1$$

$$= (n+2)! - 1 \quad \text{Ok}$$

Conclusion : $\forall n \geq 1, \quad 1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

D'après le principe de récurrence