

exo 2 $\forall n \geq 1 \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Initialisation: Pour $n=1$ $1 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}$ oui!

Hérédité: Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

On ajoute $(n+1)^3$:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 [n^2 + 4(n+1)]}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} \quad \text{C.Q.F.D}$$

Conclusion: $\forall n \geq 1$:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$