

(13)
$$P_{n-1}q_{n-2} - P_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n, \quad \forall n \geq 2$$

Initialisation: pour $n=2$:
$$P_1q_0 - P_0q_1 = (y_0y_1 + 1)1 - y_0y_1$$

$$= y_0y_1 + 1 - y_0y_1 = 1 = (-1)^2$$
 ok

Hérédité: Je prends un $n \geq 2$. Je suppose que $P_{n-1}q_{n-2} - P_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$

(On doit montrer que $P_nq_{n-1} - P_{n-1}q_n = (-1)^{n+1}$)

$$\begin{aligned}
 P_nq_{n-1} - P_{n-1}q_n &= (P_{n-1}y_n + P_{n-2})q_{n-1} - P_{n-1}(q_{n-1}y_n + q_{n-2}) \\
 &= P_{n-1}y_nq_{n-1} + P_{n-2}q_{n-1} - P_{n-1}q_{n-1}y_n - P_{n-1}q_{n-2} \\
 &= P_{n-2}q_{n-1} - P_{n-1}q_{n-2} \\
 &= - (P_{n-1}q_{n-2} - P_{n-2}q_{n-1}) \\
 &= - (-1)^n = (-1)^{n+1} \quad \text{ok}
 \end{aligned}$$

Conclusion: D'après le principe de récurrence:

$$\forall n \geq 2 \quad P_{n-1}q_{n-2} - P_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$$