

# Combinatoire Course

⑨ Pour  $n \geq 1$   $S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2-1}$  .  $S_{1000} = ?$

$S_1 = \frac{1}{3}$  ,  $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{5+1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$  / Il semble que  $S_n = \frac{n}{2n+1}$

$S_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} = \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{14+1}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$

On le prouve par récurrence :

Initialisation : On a vu que ça marche pour  $n=1, 2$  et  $3$

Hérédité : Je prends un  $n \geq 1$ . Je suppose que  $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2-1} = \frac{n}{2n+1}$

On ajoute  $\frac{1}{4(n+1)^2-1}$  :  $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2-1} + \frac{1}{4(n+1)^2-1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4(n+1)^2-1}$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$  ici  $(4(n+1)^2-1) = (2(n+1)+1)(2(n+1)-1) = (2n+3)(2n+1)$

Donc  $S_{n+1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}$

or  $(2n+1)(2n+3) = 2n^2+3n+1$ . Donc  $S_n = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$  Oui!

Conclusion :  $\forall n \geq 1$   $S_n = \frac{n}{2n+1}$  et donc  $S_{1000} = \frac{1000}{2001}$

⑩  $f(x) = \frac{1}{x}$  ,  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  ,  $f''(x) = \frac{2}{x^3}$  ,  $f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$  ,  $f^{(4)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}$

Il semble que  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$  où  $f^{(n)}$  désigne la dérivée  $n^{\text{ème}}$ .

Initialisation : Ok pour  $n=1, 2, 3, 4$

Hérédité : Je prends un  $n \geq 1$ . Je suppose que  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

Pour trouver  $f^{(n+1)}(x)$ , on dérive encore une fois :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left( \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \right)' = (-1)^n n! \left( \frac{1}{x^{n+1}} \right)' && \text{Ici, j'ai sorti les constantes} \\ &= (-1)^n n! (x^{-(n+1)})' && \text{Ici, j'écris } \frac{1}{x^a} = x^{-a} \\ &= (-1)^n n! (-n-1) x^{-n-2} && \text{Ici, j'utilise } (x^a)' = a x^{a-1} \\ &= (-1)^n n! (-1)(n+1) x^{-n-2} = (-1)^{n+1} (n+1)! \frac{1}{x^{n+2}} && \text{car } (-1) \times (-1) = 1 \text{ et } n! \times (n+1) = (n+1)! \end{aligned}$$

Oui.

On conclut. ...