

$$\textcircled{5} A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w}$

Dans A , on a $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Dans A^{-1} , on a $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ \boxed{2} & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{u} - 2\vec{w}$

$$C_2 + 2C_3 = \vec{v} + 2\vec{u} - 4\vec{w}$$

Colonne 3: $-\frac{1}{4}\vec{k} = 2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w} \Rightarrow \vec{k} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w}$

VERIF:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ok}$$

Colonne 2: $\vec{v} = 2\vec{u} + 2\vec{k} \Rightarrow 2\vec{u} = \vec{v} - 2\vec{k} = \vec{v} - 2\left(-\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w}\right)$

$$2\vec{u} = \vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} - 2\vec{w} \Rightarrow \boxed{\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} - 2\vec{w}}$$

Answer 1: $-3\vec{c} + 2\vec{y} - k\vec{a} \Rightarrow 2\vec{y} = \vec{a} + 3\vec{c} + k\vec{a}$

$$\vec{y} = \vec{a} + 3\left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v} - \vec{w}\right) + \left(-\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w}\right)$$

$$= 2\vec{a} + 2\vec{v} - 2\vec{w} \Rightarrow \boxed{\vec{y} = \vec{a} + \vec{v} - \vec{w}}$$

Or simply ok

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 3/4 & 1 & -1/4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w}$
 $\vec{u} + \vec{v}$ $\vec{u} + \vec{w}$
 $C_3 - C_2$

C_3 : $\boxed{k = -\vec{v} + \vec{w}}$

$$\vec{u} + \vec{w} - (\vec{u} + \vec{v})$$

$$=$$

$$-\vec{v} + \vec{w}$$

Answer 2: $3\vec{y} + 3k = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow 3\vec{y} = \vec{u} + \vec{v} - 3(-\vec{v} + \vec{w})$

$$3\vec{y} = \vec{u} + 4\vec{v} - 3\vec{w} \Rightarrow \boxed{\vec{y} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{4}{3}\vec{v} - \vec{w}}$$

colonne 1: $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} = \vec{u}$

$\Rightarrow \vec{i} = \dots = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} - \vec{w}$. On vérifie OK

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

③ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^n = 0, \forall n \geq 3$

$I_3 B = B = B I_3$ I_3 et B commutent. On peut

donc utiliser la formule du binôme.

$$(\mathbb{I}_3 + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k \mathbb{I}^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k \mathbb{I}^k$$

tous les \mathbb{I}^k sont égaux à \mathbb{I} .

donc
$$(\mathbb{I}_3 + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k$$

$$= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2 + \binom{n}{3} B^3 + \dots$$

$\underbrace{\quad}_{\mathbb{I}} \quad \underbrace{\quad}_{\mathbb{I}_3} \quad \underbrace{\quad}_n \quad \underbrace{\quad}_{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \underbrace{\quad}_{=0}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Initialisation : pour $n=1$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ oui

Hérédité : Je prends un $n > 1$ \bar{A} suppose que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n + n(n-1)}{2} = \frac{n[2+n-1]}{2} = \frac{n[n+1]}{2}$$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+1)n}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (Q.F.D.)}$$

on conclut

$$5) A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w}$

dans A , on a $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
 dans A^{-1} , on aura $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{u}-2\vec{w} \qquad \vec{u} \quad \vec{v} \quad C_2 + 2C_3 = \vec{v} + 2\vec{u} - 4\vec{w}$

colonne 3: $2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w} = -4\vec{k} \Rightarrow$

$$\vec{k} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w}$$

On vérifie

colonne 2: $\vec{v} = 2\vec{u} + 2\vec{k} \Rightarrow 2\vec{u} = \vec{v} - 2\vec{k} = \vec{v} - 2\left(-\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w}\right)$

$$2\vec{u} = \vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} - 2\vec{w} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v} - \vec{w}$$

On vérifie

colonne 1: $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow 2\vec{j} = \vec{u} + 3\vec{i} + \vec{k} = \vec{u} + 3\left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v} - \vec{w}\right) + \left(-\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w}\right)$

$$2\vec{j} = 2\vec{u} + 2\vec{v} - 2\vec{w} \Rightarrow \vec{j} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$$

On vérifie! Ok

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$⑤ C: \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\vec{u} \vec{v} \vec{w}

Dans C on a $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$
 Dans C^{-1} , on aura $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

\vec{u} $\vec{u}+\vec{v}$ $\vec{u}+\vec{w}$ \vec{u} $\vec{u}+\vec{v}$ $C_3 - C_2 = \vec{u} + \vec{w} - (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} - \vec{v}$

Colonne 3: $\vec{k} = -\vec{v} + \vec{w}$ On vérifie! C'est bon. On peut continuer

colonne 2: $3\vec{j} + 3\vec{k} = \vec{u} + \vec{v}$
 $\Rightarrow 3\vec{j} = \vec{u} + \vec{v} - 3(-\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + 4\vec{v} - 3\vec{w} \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{4}{3}\vec{v} - \vec{w}$

On vérifie. C'est bon. On peut continuer

colonne 1: $\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} = \vec{u} \Rightarrow \vec{i} = \vec{u} - 2\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{4}{3}\vec{v} - \vec{w}\right) - 3(-\vec{v} + \vec{w})$

$$\vec{i} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} - \vec{w}$$

On vérifie ok

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc } \underline{B^n = 0, \forall n \geq 3}$$

$I_3 \times B = B \times I_3 = B$. Les matrices I_3 et B commutent, donc on peut utiliser la formule du binôme.

$$A^n = (I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I_3^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k = \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2$$

$$\binom{n}{0} = 1; \binom{n}{1} = n; \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \dots \cdot \cancel{(n-2)} \cdot \cancel{(n-1)} \cdot n} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$A^n = B^0 + n B^1 + \frac{n(n-1)}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Initialisation: pour $n=1$ $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Yes!

Hérédité: Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{2n + n(n-1)}{2} = \frac{n(2 + n - 1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oui! CQFD}$$

Conclusion: D'après le principe de récurrence $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \geq 1$

$$\textcircled{2} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$$

Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \text{O} \\ \text{O} & \text{O} & \text{O} \\ \text{O} & \text{O} & a_n \end{pmatrix}$ alors $A^p = \begin{pmatrix} a_1^p & a_2^p & \text{O} \\ \text{O} & \text{O} & \text{O} \\ \text{O} & \text{O} & a_n^p \end{pmatrix}$