

cccc

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de \mathbb{R}^2

$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Noyau de $g = f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
 $g(\vec{i})$ $g(\vec{j})$ $g(\vec{i} - \vec{j}) = \vec{0}$

donc $\text{Ker}(g) = \text{Vect}(\vec{i})$ $\vec{u} = (1, -1)$

Noyau de $h = f - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = A - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
 $h(\vec{i})$ $h(\vec{j})$ $h(\vec{i} - \vec{j}) = \vec{0}$

$\text{Ker}(h) = \text{Vect}(\vec{i})$

$\vec{v} = (1, -2)$ $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$. \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^2 .

$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} f(\vec{u}) \\ f(\vec{v}) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

$f(\vec{u}) = 2\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ car $f(\vec{u}) - 2\vec{u} = \vec{0}$ ($\vec{u} \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$)

$f(\vec{v}) = \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\textcircled{5} \quad f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (-x + y + 5z; -x + y - 3z; 3x - 3y - 3z)$$

$$\bullet \text{ Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \text{coord de } f(\vec{e}_1) & \text{coord de } f(\vec{e}_2) & \text{coord de } f(\vec{e}_3) \\ \text{dans } \mathcal{B}_0 & \text{dans } \mathcal{B}_0 & \text{dans } \mathcal{B}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = A$$

$$\text{car } f(\vec{e}_1) = (-1+0+0, -1+0-0, 3-0-0) = (-1, -1, 3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

(1, 0, 0)

$$\bullet f(2, 1, -1) = (-2+1-5; -2+1+1; 6-3+3) = (-6; 0; 6)$$

$$f(2, 1, -1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{matrix}$$

(2, 1, -1) (5\vec{e}_2 + \vec{e}_3)

donc $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$

$= \text{Im}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$B' = \left(\underbrace{\vec{i} + \vec{j}}_{\vec{u}}, \underbrace{\vec{i} - \vec{k}}_{\vec{v}}, \underbrace{\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}_{\vec{w}} \right)$$

$A' = Q^{-1} A Q$ où Q est la matrice de chgt de base de $B \rightarrow B'$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans Q , on a $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ en fonction de \vec{i}, \vec{j} et \vec{k}
 dans Q^{-1} , on aura $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs sont libres, donc B' est une base de \mathbb{R}^3
 $C_2 + C_3 = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

Colonne 3: $3\vec{i} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \Rightarrow \vec{i} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$

Colonne 2: $\vec{i} - \vec{k} = \vec{v} \Rightarrow \vec{k} = \vec{i} - \vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = \vec{k}$

Colonne 1: $\vec{i} + \vec{j} = \vec{u} \Rightarrow \vec{j} = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w} = \vec{j}$

donc $Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

formule de changement de base : $C = \text{Mat}_{B'}(P^{-1}AP)$

$$AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = C$$

$$C^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-6)^m & 0 \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix} \text{ car } C \text{ est diagonale}$$

$$A = P C P^{-1} \Rightarrow A^m = \underbrace{P C^{-1} P^{-1} \dots P C P^{-1}}_{\text{m fois}} = P C^m P^{-1} \quad \text{on calcule ça}$$

$$C^{-1} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-6)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (-6)^n & -(-6)^n & -2(-6)^n \\ 3^n & -3^n & 3^n \end{pmatrix}$$

$$P \cdot C^{-1} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (-6)^n & -(-6)^n & -2(-6)^n \\ 3^n & -3^n & 3^n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-6)^n + 3^n & -(-6)^n - 3^n & 3^n - 2(-6)^n \\ -3^n & 3^n & -3^n \\ 3^n - (-6)^n & (-6)^n - 3^n & 3^n + 2(-6)^n \end{pmatrix} = A^n$$

③ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_B(f)$ où $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est la base canonique de \mathbb{R}^2
 $\vec{i} = (1, 0) \quad \vec{j} = (0, 1)$

Calcul de $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$:

$$\text{Mat}_B(g) = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$g(\vec{i}) \quad g(\vec{j}) \qquad g(\vec{i} - \vec{j})$

Donc $\text{Ker}(g) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{u} = (1, -1)$

Calcul de $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$: $\text{Mat}_B(h) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
 $h(\vec{i} - \vec{j}) = \vec{0}$

donc $\text{Ker}(h) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = (1, -2) \quad B' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de \mathbb{R}^2

$\text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} f(\vec{u}) & f(\vec{v}) \\ \text{dans } B' & \text{dans } B' \end{pmatrix}$

$f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}$
 $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'}$

$\text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

⑤ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ abla bazis van \mathbb{R}^3

$$(x, y, z) \mapsto (-x+y+5z; -x+y-z; 3x-3y-3z)$$

• $\text{Mat}_B(f) = A = \begin{pmatrix} f(\vec{b}_1) \\ f(\vec{b}_2) \\ f(\vec{b}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$f(\vec{b}_1) = (-1+0+0; -1+0-0; 3-0-0) = (-1; -1, 3)$

• $f(2, 1, -1) = (-2+1-5; -2+1+1; +6-3+3) = (-6; 0; +6)$

$f(2, 1, -1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

• $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$

$\vec{b}_1 + \vec{b}_2 \in \text{Ker}(f)$ $\Rightarrow \text{Ker}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

$$\bullet B' = (\underbrace{\vec{i} + \vec{j}}_{\vec{u}}; \underbrace{\vec{i} - \vec{k}}_{\vec{v}}; \underbrace{\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}_{\vec{w}})$$

$$A' = P^{-1} A P$$

\uparrow $\text{Mat}_{B'}(A)$ \uparrow $\text{Mat}_B(A)$ \uparrow $\mathcal{L}_{B \rightarrow B'}$

$$P = \begin{pmatrix} \text{coord de } \vec{u} & \vec{u} & \vec{w} \\ \text{dans } B & \text{dans } B & \text{dans } B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dans \mathcal{L} , on a $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
 dans \mathcal{L}' , on a $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w}$ $\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{u} + \vec{w}$ $3\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

\rightarrow pas de colonnes de 0, donc la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre donc B' est une base de \mathbb{R}^3

Colonne 3: $3\vec{i} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \Rightarrow \vec{i} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$ on vérifie

Colonne 2: $\vec{i} - \vec{k} = \vec{v} \Rightarrow \vec{k} = \vec{i} - \vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = \vec{k}$

Colonne 1: $\vec{i} + \vec{j} = \vec{u} \Rightarrow \vec{j} = \vec{u} - \vec{i} = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w} = \vec{j}$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}}$$

$$C^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-6)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$A = P C P^{-1}$$

$$A^n = \underbrace{P C P^{-1} P C P^{-1} \dots P C P^{-1}}_{n \text{ fois}} = P C^n P^{-1}$$

$$P C^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-6)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (-6)^n & -(-6)^n & -2(-6)^n \\ 3^n & -3^n & 3^n \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (-6)^n & -(-6)^n & -2(-6)^n \\ 3^n & -3^n & 3^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3^n + (-6)^n & -3^n - (-6)^n & 3^n - 2(-6)^n \\ -3^n & 3^n & -3^n \\ 3^n - (-6)^n & (-6)^n - 3^n & 3^n + 2(-6)^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 + (-2)^n & -1 - (-2)^n & 1 - 2(-2)^n \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 - (-2)^n & (-2)^n - 1 & 1 + 2(-2)^n \end{pmatrix}$$