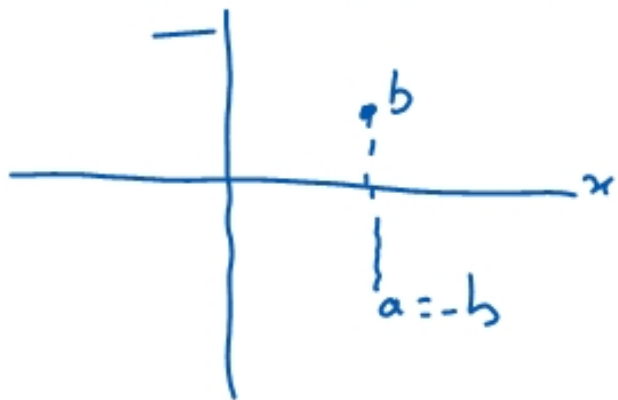
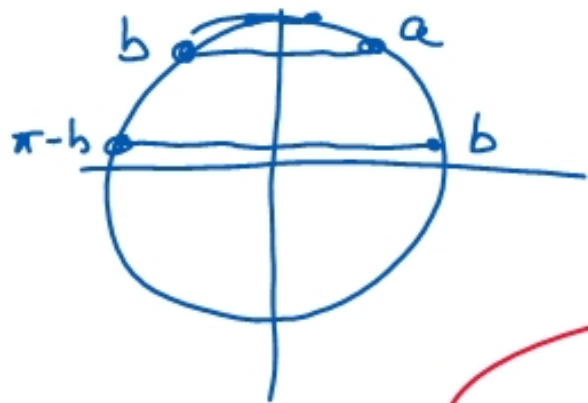


equations en cos et sin

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow a = \pm b + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$



$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a = b + 2k\pi \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{c'est le} \\ \text{bizarre} \end{array}$$



$$\cos a = \sin b \quad ?? \quad \text{c'est pire}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

Aie

ex : | Prouver les x tels que
 $\sin(2x) = \cos(3x)$

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos(3x) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = \pm 3x + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

1^{er} cas : deux +

$$\frac{\pi}{2} - 2x = 3x + 2k\pi \Leftrightarrow -2x - 3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$-5x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

2^e cas : deux -

$$\frac{\pi}{2} - 2x = -3x + 2k'\pi \Leftrightarrow 3x - 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi \text{ où } k' \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{1} \quad \cos(x) = \cos(x + \pi) \Leftrightarrow \exists x = \pm(x + \pi) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

1^{er} cas : avec +

$$\exists x = x + \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{I}_1 = \{ \dots; -\pi; \pi; 3\pi; 5\pi; \dots \}$$

2^{es} cas : avec -

$$\exists x = -(x + \pi) + 2k'\pi \Leftrightarrow \exists x = -\pi + 2k'\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k'\pi}{3} \text{ où } k' \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{I}_2 = \{ \dots; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; 3\pi; \dots \}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$$

remarque : $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$,

donc $\mathcal{I} = \mathcal{I}_2$

$$(2) \sin(2x) = \sin(3x) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = \pm \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2k\pi$$

1^{er} cas: avec +: $\frac{\pi}{2} - 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi \Leftrightarrow x = 2k\pi$ ou $k \in \mathbb{Z}$

avec -: $\frac{\pi}{2} - 2x = -\frac{\pi}{2} + 3x + 2k'\pi$

$$\Leftrightarrow -5x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2k'\pi = -\pi + 2k'\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} - \frac{2k'\pi}{5} \text{ ou } k' \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{3} \sin(2x) = \cos(3x + \pi) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos(3x + \pi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = \pm(3x + \pi) + 2k\pi$$

1^{er} cas: avec + $\frac{\pi}{2} - 2x = 3x + \pi + 2k\pi \Leftrightarrow -5x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow -5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

2^d cas: avec - $\frac{\pi}{2} - 2x = -3x - \pi + 2k'\pi$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} - \pi + 2k'\pi$$

$$x = -\pi\left(\frac{1}{2} + 1\right) + 2k'\pi = -\frac{3\pi}{2} + 2k'\pi$$

$$x = -\frac{3\pi}{2} + 2k'\pi \text{ où } k' \in \mathbb{Z}$$

④ $\sqrt{x+12} = x$ et faut que $x+12 \geq 0$ c'ad $x \geq -12$

ensemble de définition : $\mathcal{D}_f = [-12; +\infty[$

$$\sqrt{x+12} = x \Rightarrow x+12 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2 \quad x = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

On vérifie : avec $x=4$: $\sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$ OUI

avec $x=-3$: $\sqrt{-3+12} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$ NON

$$\mathcal{S} = \{4\}$$

$\sqrt{x+12} > x$. On appelle $f(x) = \sqrt{x+12} - x$

On cherche le signe de f .

$$D_f = [-12, +\infty[$$

x	-12	-3	4	13	$+\infty$
$f(x)$		6	0	-8	
		+	○	-	

$$f(-3) = 3 - (-3) = 6$$

$$f(13) = \sqrt{25} - 13 = -8$$

$$S = [-12; 4[$$

$$\sqrt{(x-2)^2} = -x+2$$

$$\text{1}^{\text{er}} \text{ cas } x-2 \geq 0 \quad \text{c\`ad } x \geq 2$$

$$\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = x-2 = -x+2 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow \underline{x=2}$$

$$\text{2}^{\text{es}} \text{ cas } x-2 \leq 0 \quad \text{c\`ad } x \leq 2$$

$$\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = 2-x = -x+2 \quad \forall \underline{x \leq 2}$$

$$\mathcal{D} =]-\infty, 2]$$

$$|x-2| < x$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas } x-2 \geq 0 \quad \text{c-à-d } x \geq 2$$

$$|x-2| < x \Leftrightarrow x-2 < x \Leftrightarrow -2 < 0 \quad \forall x, \underline{\forall x \geq 2}$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas } x-2 \leq 0 \quad \text{c-à-d } x \leq 2$$

$$|x-2| < x \Leftrightarrow 2-x < x \Leftrightarrow 2 < 2x \Leftrightarrow 1 < x \quad \underline{x \in]1; 2]}$$

$$\mathcal{S} =]1, +\infty[$$

$$\frac{2x}{x-1} \leq \frac{x}{x-2}$$

On revient d'abord à l'égalité

$$\frac{2x}{x-1} = \frac{x}{x-2}$$

$$(x \neq 1 \text{ et } x \neq 2)$$

$$\Leftrightarrow 2x(x-2) = x(x-1) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 0$$

On pose $f(x) = \frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x-2}$. $f(x) = \frac{2x(x-2) - x(x-1)}{(x-1)(x-2)}$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x - x^2 + x}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2 - 3x}{(x-1)(x-2)}$$

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$	$-$	0	$+$

on veut $f(x) \leq 0$, donc

$$S = [0, 1[\cup]2, 3]$$

$$f(10) = \frac{100 - 30}{9 \cdot 8} > 0$$

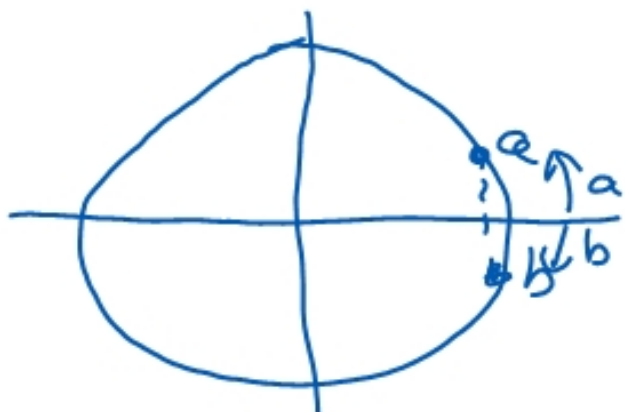
$$f(2.5) = \frac{6.25 - 7.5}{1.5 \cdot 0.5} < 0$$

$$f(1.5) = \frac{2.25 - 4.5}{0.5 \cdot (-0.5)} > 0$$

$$f(0.5) = \frac{0.25 - 1.5}{(-0.5) \cdot (-1.5)} < 0$$

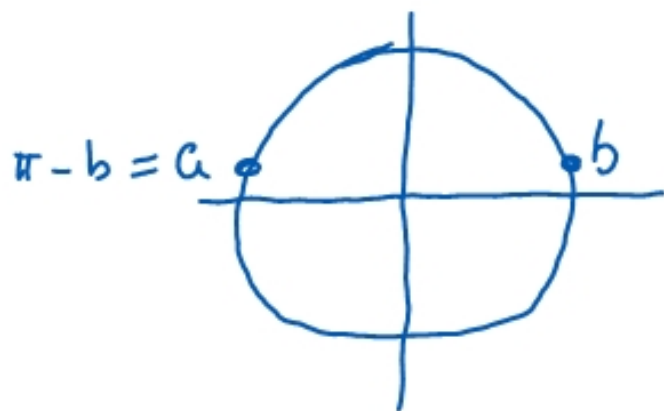
$$f(10) > 0$$

Équations en cos et sin



$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow a = \pm b + 2k\pi$$

$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases} \text{ beware!}$$



$$\cos a = \sin b \quad \text{encore pire!}$$

ex: Trouver les x tels que $\sin(2x) = \cos(3x)$

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \Rightarrow \quad \sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos(3x) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = \pm 3x + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

1^{er} cas: avec +

$$\frac{\pi}{2} - 2x = 3x + 2k\pi \Leftrightarrow -2x - 3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$-5x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{I}_1 = \left\{ \frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2^{es} cas: avec - : $\frac{\pi}{2} - 2x = -3x + 2k'\pi \Leftrightarrow 3x - 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi \quad \text{où } k' \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{I}_2 = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi \quad \text{où } k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$$

$$\textcircled{1} \cos(2x) = \cos(x+\pi) \Leftrightarrow 2x = \pm(x+\pi) + 2k\pi$$

1^{er} cas : avec + : $2x = x + \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$ ou $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{I}_1 = \{ \pi + 2k\pi \text{ ou } k \in \mathbb{Z} \}$$

2^{es} cas : avec - : $2x = -(x+\pi) + 2k\pi \Leftrightarrow 2x = -x - \pi + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow 3x = -\pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{I}_2 = \left\{ -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\mathcal{I}_2 = \left\{ \dots ; -\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} ; \pi ; \frac{5\pi}{3} ; \frac{7\pi}{3} ; 3\pi ; \dots \right\} \text{ ou voit que } \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_2$$

$$\textcircled{2} \quad \sin(2x) = \sin(3x) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = \pm \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2k\pi$$

1^{er} cas avec + : $\frac{\pi}{2} - 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi \Leftrightarrow x = 2k\pi$

$$\mathcal{J}_1 = \{ 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$$

2^{es} cas avec - : $\frac{\pi}{2} - 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = -\frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow -2x - 3x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow -5x = -\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{5} - \frac{2k\pi}{5}$$

$$\mathcal{J}_2 = \left\{ \frac{\pi}{5} - \frac{2k\pi}{5} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$$

$$\textcircled{3} \sin(2x) = \cos(3x + \pi) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos(3x + \pi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = \pm(3x + \pi) + 2k\pi$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas } \text{carre} + : \quad \frac{\pi}{2} - 2x = 3x + \pi + 2k\pi \Leftrightarrow -5x = -\frac{\pi}{2} + \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow -5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}$$

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ -\frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas } \text{carre} - : \quad \frac{\pi}{2} - 2x = -(3x + \pi) + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = -3x - \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2x = -\frac{\pi}{2} - \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\underline{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2}$$

$$\textcircled{4} \quad \sqrt{x+12} = x \Rightarrow x+12 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2 \quad x = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{matrix} 4 \\ -3 \end{matrix}$$

On vérifie . avec 4 $\sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$ OK

avec -3 $\sqrt{-3+12} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$ NON

Seul 4 convient $\mathcal{S} = \{4\}$

$$\sqrt{x+12} > x$$

\Leftrightarrow

$$\underbrace{\sqrt{x+12} - x}_{f(x)} > 0$$

$f(x)$

(1°) Il faut que $x+12 \geq 0$ (à cause de la $\sqrt{\quad}$)
càd $x \geq -12$

On cherche quand f s'annule (c'est pour $x=4$)
et on fait un tableau de signe

x	-12	0	4	13	$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	

$$f(0) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} f(13) &= \sqrt{25} - 13 \\ &= 5 - 13 \\ &= -8 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{S = [-12; 4[}}$$

$$\sqrt{(x-2)^2} = -x+2 \Leftrightarrow |x-2| = -x+2$$

$$\underline{1^{\text{er}} \text{ cas}}: \text{ qd } x-2 \geq 0, (\text{càd } x \geq 2) \quad |x-2| = x-2$$

$$\text{l'éq devient: } x-2 = -x+2 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow \underline{x=2}$$

$$\underline{2^{\text{e}} \text{ cas}}: \text{ qd } x-2 \leq 0 (\text{càd } x \leq 2) \quad |x-2| = -(x-2)$$

$$\text{l'éq devient: } -(x-2) = -x+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x+2 = -x+2 \quad \forall x \leq 2$$

$$\mathcal{J} =]-\infty, 2]$$

$$|x-2| < x$$

$$\text{1}^{\text{er}} \text{ cas } x-2 \geq 0 \quad (\text{c\`ad } x \geq 2)$$

$$\text{L'eq devient : } x-2 < x \\ \Leftrightarrow -2 < 0 \quad \forall x$$

$$\underline{S_1 = [2; +\infty[}$$

$$\text{2}^{\text{e}} \text{ cas } x-2 \leq 0 \quad (\text{c\`ad } x \leq 2)$$

$$\text{L'eq devient : } -(x-2) < x \\ \Leftrightarrow -x+2 < x \Leftrightarrow 2 < 2x \Leftrightarrow 1 < x$$

$$\underline{S_2 =]1; 2]}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \underline{]1; +\infty[}$$