

$$\textcircled{1} E = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0 \right\}$$

- Je prends 2 suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$

On pose $w_n = u_n + v_n$

$$w_{n+2} + 2w_{n+1} + w_n = (u_{n+2} + v_{n+2}) + 2(u_{n+1} + v_{n+1}) + (u_n + v_n)$$

$$= (u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n) + (v_{n+2} + 2v_{n+1} + v_n)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\hookrightarrow \text{car } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \quad \hookrightarrow \text{car } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$$

donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ donc E est stable pour +

- Je prends une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ et un réel a . On $v_n = a u_n$

$$v_{n+2} + 2v_{n+1} + v_n = a u_{n+2} + 2a u_{n+1} + a u_n = a (u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n) = a \times 0 \quad \text{car } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$$

$$= 0. \text{ Donc } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \quad \text{Est stable pour } \cdot$$

- $0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0$, donc la suite nulle $\in E$.

Est un sev de l'espace des suites

$$u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0 \quad P(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

-1 est racine double. Solutions: $u_n = (A+B)(-1)^n = A(-1)^n + B(-1)^n$

$$E = \text{Vect} \left(\underbrace{((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{base de } E}; \underbrace{((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{base de } E} \right)$$

dim $E = 2$

$$\textcircled{3} \quad \varphi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$$

$$P(x) \mapsto xP'(x) + 2P(x)$$

φ va de $\mathbb{R}_3[x]$ dans $\mathbb{R}_3[x]$.
 Il reste à montrer que φ est linéaire

Je prends P et $Q \in \mathbb{R}_3[x]$ et a et $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(aP + bQ)(x) &= x(aP(x) + bQ(x))' + 2(aP(x) + bQ(x)) \\ &= x(aP'(x) + bQ'(x)) + 2aP(x) + 2bQ(x), \\ &= a[xP'(x) + 2P(x)] + b[xQ'(x) + 2Q(x)] = a\varphi(P) + b\varphi(Q) \end{aligned}$$

donc φ est linéaire Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$

$$Q \in \text{Ker}(P) \Leftrightarrow P(Q) = 0 \Leftrightarrow x Q'(x) + 2Q(x) = 0$$

$$Q(x) = A e^{\int \frac{2}{x} dx} = A e^{-2 \ln(x)} = A e^{\ln(x^{-2})} = A x^{-2} = \frac{A}{x^2}$$

Seul $Q = 0$ est une solution qui appartient à $\mathbb{R}_3[x]$

$\text{Ker}(P) = \{0\}$ P est injective

$$T \text{ du rang } : \dim(\text{Ker}(P)) + \dim(\text{Im}(P)) = \dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$$

0

donc $\dim(\text{Im}(P)) = 4$

$\text{Im}(P)$ est un sev de $\mathbb{R}_3[x]$

donc $\text{Im}(P) = \mathbb{R}_3[x]$ P est surjective

• La base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ est $B = (1, x, x^2, x^3)$

$$\text{Mat}_B(P) = \begin{pmatrix} P(1) & P(x) & P(x^2) & P(x^3) \\ \text{dans} & \text{de} & & \\ B & B & & \end{pmatrix}$$

$$\varphi(1) = X \cdot 0 + 2 \cdot 1 = +2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

$$\varphi(X) = X \cdot 1 + 2X = 3X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

$$\varphi(X^2) = X \cdot 2X + 2X^2 = 4X^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

$$\varphi(X^3) = X \cdot 3X^2 + 2X^3 = 5X^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}_B$$

$$\underline{\text{Mat}_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$(18) F = \{ M(a,b) \text{ ou } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \} \quad \text{avec } M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Je prends } A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} a' & b' & b' \\ b' & a' & b' \\ b' & b' & a' \end{pmatrix} \in F$$

$$A + A' = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' & b+b' \\ b+b' & a+a' & b+b' \\ b+b' & b+b' & a+a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ ou } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{donc } \underline{A + A' \in F} \quad \text{donc } \underline{\text{F est stable pour } +}$$

• Je prends $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha b \\ \alpha b & \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha b & \alpha a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix} \text{ avec } x = \alpha a \text{ et } y = \alpha b$$

donc $\alpha A \in F$. Donc F est stable pour.

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$ avec $a = b = 0$. Donc F est un sous de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

b) $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{I}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_A$. Donc $F = \text{Vect}(\mathbb{I}, A)$
 donc une base de $F = \text{Vect}(\mathbb{I}, A)$
 $\dim(F) = 2$

c) $(A + \mathbb{I}; A - 2\mathbb{I}) = \mathcal{B}'$. On suppose $a(A + \mathbb{I}) + b(A - 2\mathbb{I}) = O$
 on montre que $a = b = 0$

$$a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b & a+b & a+b \\ a+b & a-2b & a+b \\ a+b & a+b & a-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-2b=0 \\ a+b=0 \end{cases} \begin{matrix} \text{L}_2 - \text{L}_1: 3b=0 \\ \Rightarrow b=0 \\ \Rightarrow a=0 \end{matrix}$$

La famille $(A+I; A-2I)$ est libre

2 vecteurs libres dans un e.v de dimension 2 forment une base de F

$$a) M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ 0 \\ ? \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha(A+I) + \beta(A-2I)$$

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta & \alpha + \beta & \alpha + \beta \\ \alpha + \beta & \alpha - 2\beta & \alpha + \beta \\ \alpha + \beta & \alpha + \beta & \alpha - 2\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = a \\ \alpha + \beta = b \end{cases} \quad \begin{array}{l} l_2 - l_1: 3\beta = b - a \\ l_2: \alpha = b - \beta = b - \frac{b-a}{3} = \frac{3b - b + a}{3} = \frac{2b + a}{3} \end{array} \quad \beta = \frac{b-a}{3}$$

$$M(a, b) = \frac{2b+a}{3}(A+I) + \frac{b-a}{3}(A-2I) = \begin{pmatrix} \frac{2b+a}{3} \\ \frac{b-a}{3} \end{pmatrix}_B$$

$$\textcircled{1} E = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0 \right\}$$

• Je prends 2 suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ On pose $w_n = u_n + v_n$

$$\begin{aligned} w_{n+2} + 2w_{n+1} + w_n &= (u_{n+2} + v_{n+2}) + 2(u_{n+1} + v_{n+1}) + (u_n + v_n) \\ &= (u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n) + (v_{n+2} + 2v_{n+1} + v_n) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

\hookrightarrow car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ \hookrightarrow car $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$

donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ donc E est stable pour +

• Je prends une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ et un réel a

$$\begin{aligned} (au_{n+2}) + 2(au_{n+1}) + (au_n) &= a(u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n) = a \times 0 \quad \text{car } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \\ &= 0 \quad \text{donc } (au_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \quad \text{E est stable pour } \cdot \end{aligned}$$

• $0 + 2 \times 0 + 0 = 0$, donc la suite nulle $\in E$

E est un sev de l'ens des suites

$$u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0 \quad P(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

-1 est racine double Solutions: $u_n = (An+B)(-1)^n = An(-1)^n + B(-1)^n$

$$E = \text{Vect} \left(\underbrace{(n(-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} ; (1)_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{base de } E} \right)$$

dim E = 2

③ $f: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ f va de $\mathbb{R}_3[x]$ dans $\mathbb{R}_3[x]$
 $f(x) \mapsto x f'(x) + 2f(x)$ Il reste à montrer que f est linéaire

Je prends P et $Q \in \mathbb{R}_3[x]$ et $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(aP + bQ)(x) &= x(aP(x) + bQ(x))' + 2(aP(x) + bQ(x)) \\ &= x(aP'(x) + bQ'(x)) + 2aP(x) + 2bQ(x) \\ &= a[xP'(x) + 2P(x)] + b[xQ'(x) + 2Q(x)] = a f(P) + b f(Q) \end{aligned}$$

donc f est linéaire donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$

$$f \in \text{ker}(P) \Leftrightarrow P(f) = 0 \Leftrightarrow x f'(x) + 2f(x) = 0$$

$$f(x) = A e^{-\int \frac{2}{x} dx} = A e^{-2 \ln(x)} = A e^{\ln(x^{-2})} = A x^{-2} = \frac{A}{x^2}$$

Seul $f = 0$ est une solution qui appartient à $\mathbb{R}_3[x]$

$$\underline{\text{Ker}(P) = \{0\}}$$

P est injective

$$\underline{\text{Théorème de rang}}: \dim(\text{Ker}(P)) + \dim(\text{Im}(P)) = \dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$$

0

$$\text{donc } \left| \begin{array}{l} \dim(\text{Im}(P)) = 4 \\ \text{Im}(P) \text{ est un sous-espace de } \mathbb{R}_3[x] \end{array} \right.$$

donc $\text{Im}(P) = \mathbb{R}_3[x]$ P est surjective

• La base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ est $B = (1, x, x^2, x^3)$

$$\text{Mat}_B(P) = \begin{pmatrix} P(1) & P(x) & P(x^2) & P(x^3) \\ \dim_B & \dim_B & & \end{pmatrix}$$

$$P(1) = X \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_B$$

$$P(X) = X \cdot 1 + 2X = 3X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(X^2) = X \cdot 2X + 2X^2 = 4X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(X^3) = X \cdot 3X^2 + 2X^3 = 5X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{Mat}_B(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$\textcircled{18} F = \{ M(a,b) \text{ où } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \} \quad \text{avec } M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Je prends } A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} a' & b' & b' \\ b' & a' & b' \\ b' & b' & a' \end{pmatrix} \in F$$

$$A + A' = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' & b+b' \\ b+b' & a+a' & b+b' \\ b+b' & b+b' & a+a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{avec } \alpha = a+a' \text{ et } b+b'$$

donc $A + A' \in F$ donc F est stable pour +

• Je prends $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha b \\ \alpha b & \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha b & \alpha a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix} \text{ avec } x = \alpha a \text{ et } y = \alpha b$$

donc $\alpha A \in F$ Donc F est stable pour.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M(0,0) \in F$$

Donc F est un sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

b) $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_I + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_A$ Donc $F = \text{Vect}(I, A)$ base de F

$\dim(F) = 2$

c) $(A + I, A - 2I) = \emptyset$ On suppose $a(A + I) + b(A - 2I) = O$
(on montre que $a = b = 0$)

$$a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b & a+b & a+b \\ a+b & a-2b & a+b \\ a+b & a+b & a-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-2b=0 \\ a+b=0 \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow 3b=0 \\ \Rightarrow b=0 \\ \Rightarrow a=0 \end{matrix}$$

la famille $(A+I, A-2I)$ est libre

2 vecteurs libres dans un ev de dim 2 forment une base de F

$$d) M(b, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_B = \alpha(A+I) + \beta(A-2I)$$

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-2\beta & \alpha+\beta & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & \alpha-2\beta & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & \alpha+\beta & \alpha-2\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = a \\ \alpha + \beta = b \end{cases} \quad \begin{array}{l} l_2 - l_1: 3\beta = b - a \\ l_2: \alpha = b - \beta = b - \frac{b-a}{3} = \frac{3b - b + a}{3} = \frac{2b + a}{3} \end{array} \quad \beta = \frac{b-a}{3}$$

$$M(b, b) = \frac{2b+a}{3}(A+I) + \frac{b-a}{3}(A-2I) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{2b+a}{3} \\ \frac{b-a}{3} \end{pmatrix}_B}}$$