

$$(11) f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{qd } x = 0 \end{cases}$$

Continuité: Pour $x \neq 0$, f est continue comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues

• Problème en 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + o(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + o(1) = 1 + 0 = 1 = f(0)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, donc f est continue en 0

f est continue sur \mathbb{R}

Dérivabilité: Pour $x \neq 0$, f est dérivable comme quotient...

$$\text{et } f'(x) = \frac{e^x \cdot x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2}$$

• Problème en 0:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{\frac{e^x - 1 - x}{x}}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \\ &= \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1) \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

Continuité de f' : Pour $x \neq 0$, f' est un quotient (dt le dénom $\neq 0$), somme, produit de fonction continue, donc f' est continue

• Problème en 0:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{x(1 + x + o(x)) - (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) + 1}{x^2} \\ &= \frac{x + x^2 + o(x^2) - 1 - x - \frac{x^2}{2} + 1}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1) \rightarrow \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} = f'(0) \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$, donc f' est continue en 0

f' est continue sur \mathbb{R}

Donc f est de classe C^1 sur \mathbb{R}