

leçon

$$\textcircled{11} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Continuité : qd  $x \neq 0$  :  $f$  est continue comme un quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues

qd  $x=0$  on calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cancel{e^x} - 1}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \cancel{e^x} = 1 = f(0)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , donc  $f$  est continue en 0

conclusion :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Dérivabilité : qd  $x \neq 0$   $f$  est dérivable comme produit. —

$$\text{et } f'(x) = \frac{e^x \cdot x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2}$$

quand  $x=0$  : On cherche un DL à l'ordre 1 de  $f$

(méthode 2 : la def  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = ?$ )  
(méthode 3 :  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ )

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$$

$f$  a un DL à l'ordre 1 en 0, donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = \frac{1}{2}$

$$\left( \begin{aligned} \text{avec la méthode 3 : } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x+o(x)) - (1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - 1 - x - \frac{x^2}{2} + 1 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} + o(1) = \frac{1}{2} = f'(0) \end{aligned} \right)$$

conclusion :  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$g(x) = (1+x)^{1/x} = \begin{cases} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} & \text{qd } x > -1 \text{ et } x \neq 0 \\ e & \text{qd } x = 0 \end{cases}$$

Continuité: pour  $x > -1$  et  $x \neq 0$ :  $f$  est continue comme composée et quotient (dont le dénominateur ne s'annule ps) de fonctions continues

pour  $x=0$ : On calcule  $\lim_0 e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

$$e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\frac{x+0x}{x}} = e^{\frac{1+0x}{1}} \rightarrow e = g(0)$$

$\lim_0 g(x) = g(0)$ , donc  $g$  est continue en 0

Conclusion:  $g$  est continue sur  $]-1; +\infty[$

Dérivabilité: pour  $x > -1$  et  $x \neq 0$ :  $g$  est dérivable comme ...

$$\text{et } g'(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \times \frac{\frac{1}{1+x} \cdot x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

pour  $x=0$  On cherche un DL de  $g$  à l'ordre 1 en 0.

$$g(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x}} = e^{1 - \frac{x}{2} + o(x)} = e \underbrace{e^{-\frac{x}{2} + o(x)}}_{DL}$$

$$g(x) = e \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) = e - \frac{e}{2}x + o(x)$$

$g$  est dérivable en 0 et  $g'(0) = -\frac{e}{2}$

Ex. 1  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

qd  $x \rightarrow +\infty$   $f(x) \rightarrow +\infty$   
asymptote oblique?

$$f(x) = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

rappel:

$$\sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + o(X^2)$$

$$f(x) = x \sqrt{4\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = x \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

$$= x \left( 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

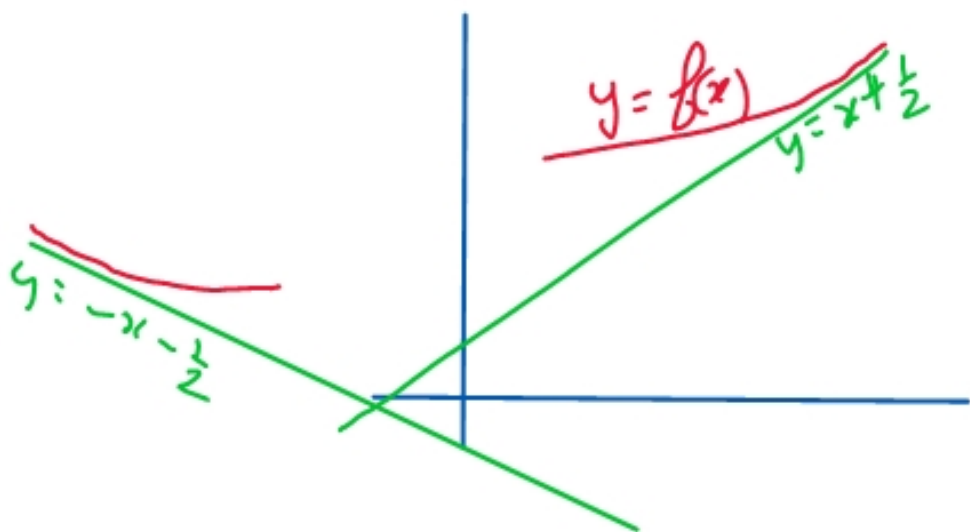
$$= x \left( 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) =$$

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

asymptote de  $\mathbb{R}^+$   $y = x + \frac{1}{2}$

$$f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow 0$$

comme au dessus car  $\frac{3}{8x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+}$

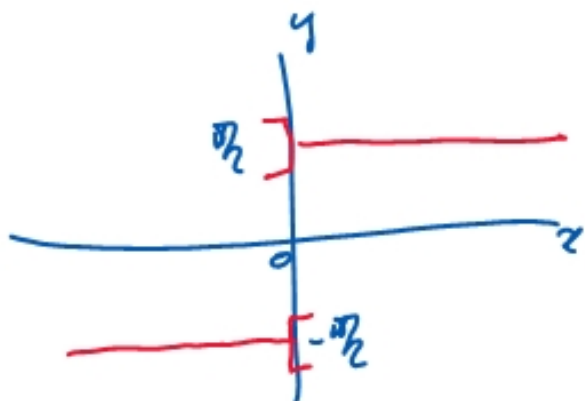


( en  $-\infty$ , on trouve  
 $f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  
 donc asymptote  $y = -x - \frac{1}{2}$   
 comme au dessous )

$$(3.1) \quad f(t) = \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$$

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \times \left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2+1} = 0$$

| $t$    | $-\infty$              | $0$         | $+\infty$             |
|--------|------------------------|-------------|-----------------------|
| $f'$   | $0$                    | $\parallel$ | $0$                   |
| $\phi$ | $\xrightarrow{-\pi/2}$ | $\parallel$ | $\xrightarrow{\pi/2}$ |



$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2 \arctan(1)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f(1) = \frac{\pi}{2}$$

3.2)  $g(t) = \arcsin(2t\sqrt{1-t^2})$   
 $D_g = ?$  Il faut  $\underbrace{2t\sqrt{1-t^2}}_{f(t)} \in [-1, 1]$  car arcsin est défini sur  $[-1, 1]$

$f(t) = 2t\sqrt{1-t^2}$  il faut  $1-t^2 \geq 0$   $t^2 \leq 1$   $t \in [-1, 1]$

$$f'(t) = 2\left(\sqrt{1-t^2} + t \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} \times (-2t)\right) = 2\left(\sqrt{1-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1-t^2-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

.....

$$D_g = [-1, 1]$$

$$\textcircled{1.1} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{quand } x \neq 0 \\ 1 & \text{quand } x = 0 \end{cases}$$

continuité: pour  $x \neq 0$ ,  $f$  est continue comme somme et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues

$$\text{pour } x=0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0} \quad \text{f. I}$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\cancel{1} + x + \frac{x^2}{2} - \cancel{x}}{x} = 1 + \frac{x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = f(0)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , donc  $f$  est continue en 0

continue.  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$



dérivabilité : pour  $x \neq 0$ ,  $f$  est dérivable ...

pour  $x=0$  méthode 1 : existence d'un DL de  $f$  en 0 à l'ordre 1

méthode 2 :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$  existe et est finie

méthode 3 :  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  existe et est finie

méthode 3

$$\text{pour } x \neq 0 : f'(x) = \frac{x e^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ F.I.}$$

$$f(x) = \frac{x(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) - (1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) + 1}{x^2}$$

$$= \frac{x + x^2 + o(x^2) - 1 - x - \frac{x^2}{2} + 1}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1) \rightarrow \frac{1}{2}$$

donc  $f'(0) = \frac{1}{2}$

méthode 1

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2) - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

$f'(0) = \frac{1}{2}$

$f(0) + f'(0)x + o(x)$

$$1.2 \quad g(x) = (1+x)^{1/x} = \begin{cases} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} & \text{qd } x > -1 \text{ et } x \neq 0 \\ e & \text{qd } x = 0 \end{cases}$$

Continuité pour  $x > -1$  et  $x \neq 0$ ,  $g$  est continue comme somme, composée et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\frac{0}{0}} \text{ F.-I}$$

$$e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\frac{x+0}{x}} = e \rightarrow e^1 = e = g(0)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ , donc  $g$  est continue en 0

conclusion:  $g$  est continue sur  $] -1; +\infty [$

dérivabilité: pour  $x > -1$  et  $x \neq 0$ ,  $f$  est dérivable comme...

$$g'(x) = (e^u)' = u' \cdot e^u = \frac{\frac{1}{1+x} \cdot x - \ln(1+x) \cdot 1}{x^2} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \cdot e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

remark

développabilité en 0: On cherche un DL de  $g$  à l'ordre 1

$$g(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x}} = e^{1 - \frac{x}{2} + o(x)}$$

ne tend pas vers 0

$$= e^1 e^{-\frac{x}{2} + o(x)} = e^1 \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) = e - \frac{e}{2}x + o(x)$$

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + o(x)$$

$g$  est développable en 0 et

$$g'(0) = -\frac{e}{2}$$

2.1  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

$$= \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= x \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = x \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

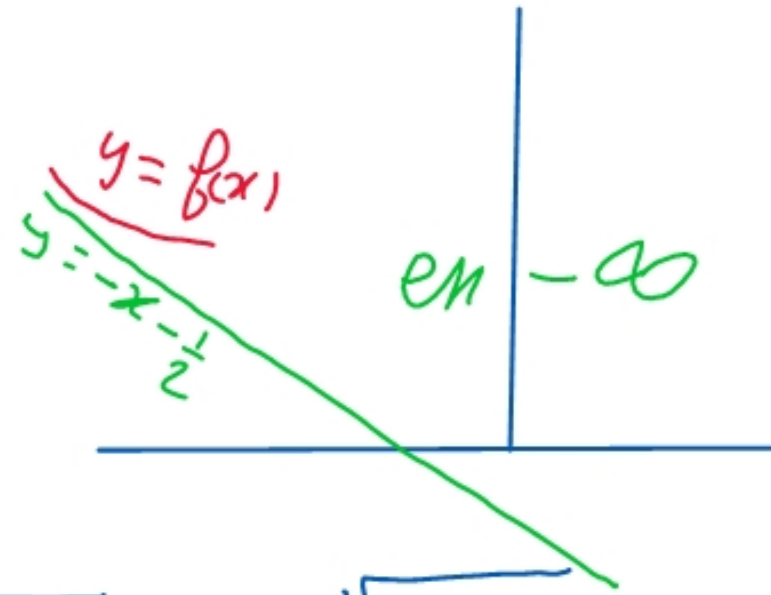
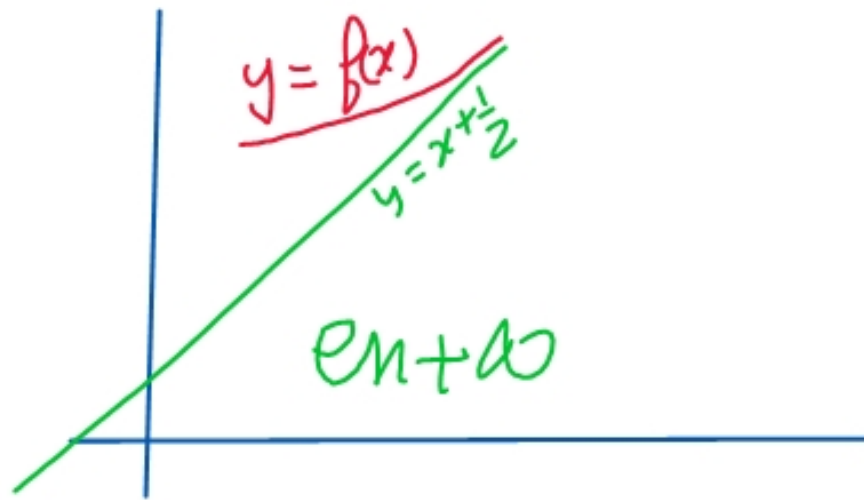
$$f(x) = x \left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

quand  $x \rightarrow +\infty$   
asymptote oblique?  $f(x) \rightarrow \infty$

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

ici  $x \rightarrow +\infty$

asymptote d'obq  $y = x + \frac{1}{2}$  ; courbe au dessus car  $\frac{3}{8x} > 0$



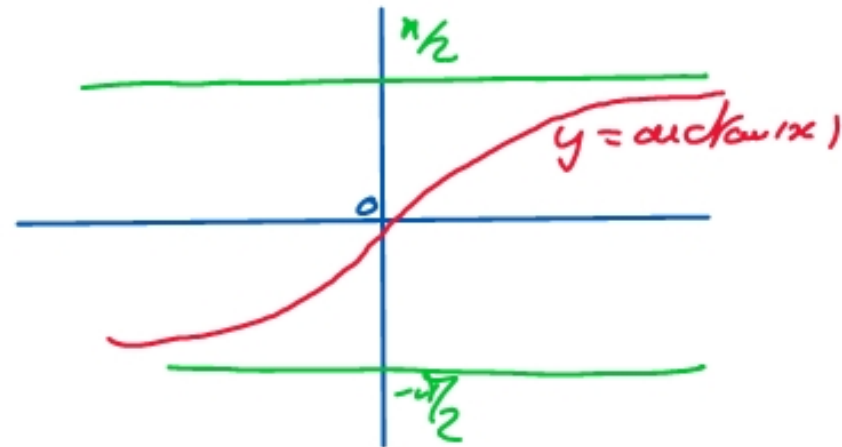
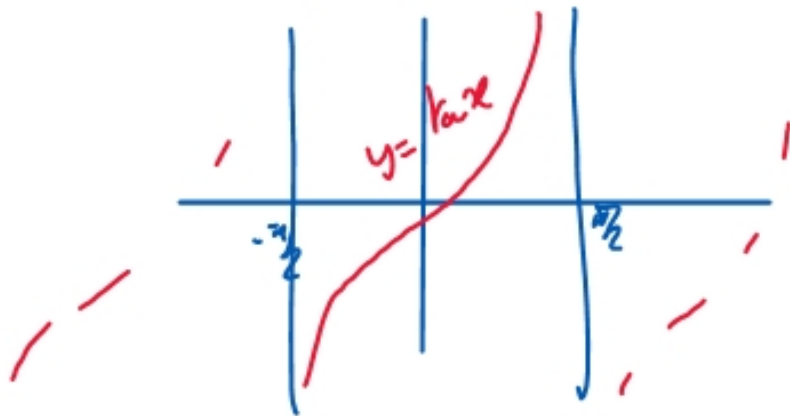
$$\text{en } -\infty : \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \underbrace{-x}_{\substack{\uparrow \\ \text{ici } \sqrt{x^2} = -x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

in calcul qui en +∞  $f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

asymptote d'obq  $y = -x - \frac{1}{2}$  ; courbe au dessus car  $-\frac{3}{8x} > 0$

$$f(t) = \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$D_f = \mathbb{R}^*$$



$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2+1} = 0 \Rightarrow f(t) = \text{cte}$$

| t    | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|------|-----------|---|-----------|
| $f'$ | 0         |   | 0         |
| $f$  | $-\pi/2$  |   | $\pi/2$   |

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \arctan(+\infty) + \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2\arctan(1)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\text{d'où } \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$g(t) = \arcsin(2t\sqrt{1-t^2})$$

ens de def: pb avec le  $\sqrt{\quad}$  il faut  $1-t^2 \geq 0 \Rightarrow t^2 \leq 1$   
 $t \in [-1; 1]$

pb avec le  $\arcsin(x)$  il faut  $x \in [-1; 1]$

$X(t) = 2t\sqrt{1-t^2}$  On étudie la fonction  $X$

$$X'(t) = 2\sqrt{1-t^2} + 2t \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot (-2t) = 2\sqrt{1-t^2} - 2\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$X'(t) = \frac{2(1-t^2) - 2t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2(1-2t^2)}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$X' \text{ annule qd } 1-2t^2 = 0$$

$$t^2 = \frac{1}{2} \quad t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

|      |    |                       |            |                      |   |
|------|----|-----------------------|------------|----------------------|---|
| $t$  | -1 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0          | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 |
| $X'$ | -  | 0                     | +          | 0                    | - |
| $X$  | 0  | $\searrow$            | $\nearrow$ | $\searrow$           | 0 |

donc pas de pb pour  $\arcsin$

$$\mathcal{D}_g = [-1, 1]$$