

$$(3) f(x) = f \left| \begin{array}{l}]-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1-\cos x} \text{ pour } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 2 \end{array} \right.$$

Pour $x \neq 0$ f est continue comme quotient de fonctions clairement continues.

Problème en 0: on calcule $\lim_0 f(x)$

$$\ln(1+x) = (x + o(x)) = x + o(x^2) \sim_0 x^2$$

$$1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim_0 \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim_0 \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2 \quad \text{Donc } \lim_0 f(x) = 2$$

D'après l'énoncé, on voit que $f(0) = 2$.

$$\text{Ainsi, } \lim_0 f(x) = f(0)$$

Donc f est aussi continue en 0

Finalement, f est continue $\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}[$