



$$\textcircled{1} f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{x-1} \ln|x|}$$

pb en 1 (limit de fraction)
pb en 0 (Lm)

pb en 1: On calcule $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln|x|}{x-1}} = e^{\frac{0}{0}}$ F.I

chgt $X = x - 1$

ici $|1+x| = 1+x$ car $x \approx 0$

$$e^{\frac{\ln|x|}{x-1}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\frac{x + o(x)}{x}} = e^{\frac{x(1+o(1))}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^1 = e$$

On peut prolonger f par continuité en 1. On pose $f(1) = e$

pb en 0. On calcule $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln|x|}{x-1}} = e^{\frac{-\infty}{-1}} = e^{+\infty} = +\infty$

On ne peut pas prolonger f par continuité en 0.

$$(2) f(x) = \frac{\ln|x|}{1-x-\ln|x|}$$

pb en 1: chgt $x = z - 1 \Rightarrow z = 1 + x$

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{-x - \ln(1+x)} = \frac{x + o(x)}{-x - x + o(x)} = \frac{x(1+o(x))}{x(-2+o(x))} \rightarrow \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

On peut prolonger f par continuité en 1. On pose $f(1) = -\frac{1}{2}$

pb en 0
$$\frac{\ln|x|}{1-x-\ln|x|} = \frac{\ln|x|}{\ln|x| \left(\frac{1}{\ln|x|} - \frac{x}{\ln|x|} - 1 \right)} = \frac{1}{\frac{1}{\ln|x|} - \frac{x}{\ln|x|} - 1} \rightarrow \frac{1}{0-0-1} = -1$$

On peut prolonger f par continuité en 0. On pose $f(0) = -1$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x} & \text{qd } x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\} \\ \ell & \text{qd } x = 0 \end{cases}$$

• Qd $x \neq 0$, f est continue comme une somme, une composée et un quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions clairement continues.

• Qd $x = 0$ On calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x}$

$$\frac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x} = \frac{(x + o(x))^2}{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))} = \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{x^2 [1 + o(1)]}{x^2 [\frac{1}{2} + o(1)]} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell = f(0)$. Donc f est continue en 0

• Conclusion: f est continue sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

⑤ On doit montrer que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

chgt $\lambda = x - 2 \Rightarrow x = 2 + \lambda$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln((2+\lambda)^2 - 4(2+\lambda) + 5)}{x} = \frac{\ln(4 + 4\lambda + \lambda^2 - 8 - 4\lambda + 5)}{x}$$

$$= \frac{\ln(1 + \lambda^2)}{x} = \frac{\lambda^2 + o(\lambda^2)}{x} = \frac{\lambda(x + o(\lambda))}{x} = \lambda + o(\lambda) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Donc f est négligeable devant g au voisinage de 2

$$⑦ f(x) = (1+x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} = e^{\frac{\cos x}{\sin x} \ln(1+x)}$$

pb avec le ln : $1+x > 0 \Rightarrow x > -1 \quad x \in]-1, +\infty[$

pb avec le sin : On exclut tous les $k\pi$

$$\mathcal{D}_f =]-1; 0[\cup]0; \pi[\cup]\pi; 2\pi[\cup]2\pi; 3\pi[\cup \dots$$

pbs en $-1, 0, \pi, 2\pi, \dots$

pb en -1: On calcule $\lim_{x \rightarrow -1^+} e^{\frac{\cos x}{\sin x} \ln(1+x)} \simeq e^{\frac{1/2}{-\sqrt{3}/2} (-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$

On ne peut prolonger par continuité en -1

pb en 0. On calcule $\lim_0 e^{\frac{\cos x}{\sin x} \ln(1+x)}$ FL DL

($\frac{\cos x \ln(1+x)}{\sin x} \underset{0}{\sim} \frac{1 \cdot x}{x} = 1 \xrightarrow{0} 1$, donc $f(x) \rightarrow e^1 = e$)

$$e^{\frac{\cos x \cdot \ln(1+x)}{\sin x}} = e^{\frac{(1+o(x))(x+o(x))}{x+o(x)}} = e^{\frac{x(1+o(1))}{x(1+o(1))}} \rightarrow e^1 = e$$

On peut prolonger par continuité en 0. On pose $f(0) = e$

pb en π $\lim_{\pi} e^{\frac{\cos(x) \ln(1+x)}{\sin(x)}} =$

$$\lim_{\pi^-} f(x) = e^{\frac{-1}{0^+} \ln(1+\pi)} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{\pi^+} f(x) = e^{0^- \cdot \ln(1+\pi)} = e^{-\infty} = 0$$



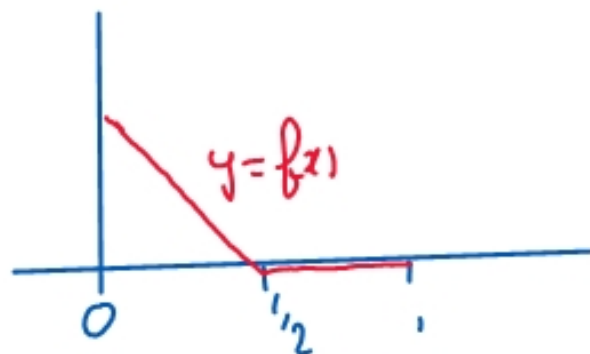
$$\lim_{\pi^-} \sin x = 0^+$$

$$\lim_{\pi^+} \sin x = 0^-$$

On ne peut pas prolonger par continuité en π

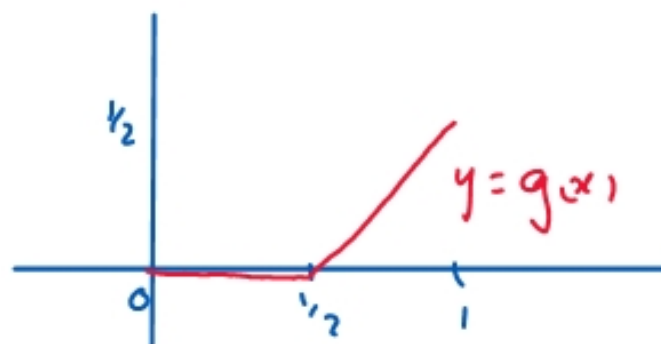
Laet pour les autres π

$$9 \quad f(x) = \begin{cases} -x + \frac{1}{2} & \text{sur }]0; \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{sur }]\frac{1}{2}; 1[\end{cases}$$



f est continue car
 $\lim_{\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{\frac{1}{2}^+} f(x) = f(\frac{1}{2})$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur }]0; \frac{1}{2}[\\ x - \frac{1}{2} & \text{sur }]\frac{1}{2}; 1[\end{cases}$$



pareil pour g

$f+g$ et $f \cdot g$ sont continues comme somme et produit de fonctions continues

$$10 \quad g \circ f = ?$$

$$\text{avec } x < \frac{1}{2}: \quad g \circ f(x) = g\left[-x + \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$x > \frac{1}{2} \quad g \circ f(x) = g\left[0\right] = 0$$

① $f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{\ln|x|}{x-1}}$ $x \neq 0$ (ln) et $x \neq 1$ (trait de fraction) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

problème en 0 :

appel : $a^b = e^{b \ln(a)}$

$$|x|^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{x-1} \ln|x|} \rightarrow e^{\frac{1}{-1}(-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty.$$

donc, on ne peut pas prolonger f par continuité en 0

pb en 1 On doit calculer $\lim_{x \rightarrow 1} |x|^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln|x|}{x-1}} = e^{\frac{0}{0}}$ F.V

chgt $X = x - 1 \Rightarrow x = 1 + X$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x} \ln|1+x|} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \text{ car } 1+x > 0 \text{ qd } x \text{ est proche de } 0$$

$$= e^{\frac{x + o(x)}{x}} = e^{1 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^1 = e$$

donc, on peut prolonger f par continuité en 1, on pose $f(1) = e$

$$(2) f(x) = \frac{\ln|x|}{1-x-\ln|x|}$$

pb avec le Ln: $x \neq 0$

pb avec le trait de fraction: $x \neq 1$?

on étudie $g(x) = 1-x-\ln|x|$ pour $x \neq 0$

$$g'(x) = -1 - \frac{1}{x} = \frac{-x-1}{x} \text{ s'annule en } -1$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	

\swarrow \searrow \rightarrow \rightarrow

g s'annule seulement en 1

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

pb en 0: on calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{1-x-\ln|x|} = \frac{-\infty}{1-0+\infty} \text{ f.i.}$

On met le plus grand en facteur

$$f(x) = \frac{\cancel{\ln|x|} \cdot 1}{\cancel{\ln|x|} \left(\frac{1}{\ln|x|} - \frac{x}{\ln|x|} - 1 \right)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\infty} - \frac{0}{\infty} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

on peut prolonger f par continuité en 0. on pose $f(0) = -1$

pb en 1: $\frac{\ln|x|}{1-x-\ln|x|} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{0}{1-1-0} = \frac{0}{0}$. F.V

chgt de variable $x-1=X$ $x=1+X$

$$f(x) = \frac{\ln|1+X|}{1-(1+X)-\ln|1+X|} = \frac{\ln(1+X)}{-X-\ln(1+X)} \quad (\text{ici } 1+X > 0 \text{ car } X \text{ est proche de } 0)$$

$$= \frac{X + o(X)}{-X - 1 + o(X)} = \frac{X(1+o(1))}{X(-2+o(1))} \xrightarrow{X \rightarrow 0} \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

On peut prolonger f par continuité en 1. On pose $f(1) = -\frac{1}{2}$

③

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x} & \text{qd } x \neq 0 \text{ et } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ 2 & \text{qd } x = 0 \end{cases}$$

(pour le dénominateur ne s'annule pas)

• pour $x \neq 0$, f est continue comme quotient et composée de fonctions clairement continues.

• pbemo On calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x} = 0 \quad \text{F. I.}$

$$\frac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x} = \frac{(x + o(x))^2}{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))} = \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{x^2(1 + o(1))}{x^2(\frac{1}{2} + o(1))} \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Conclusion: f est continue sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

⑤ Rappel: f est négligeable devant g au voisinage de x_0 lorsque

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Ici, on doit donc prouver que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 4x + 5)}{x-2} = 0$

chgt $X = x - 2 \Rightarrow x = 2 + X$

$$f(x) = \frac{\ln((2+X)^2 - 4(2+X) + 5)}{X} = \frac{\ln(4 + 4X + X^2 - 8 - 4X + 5)}{X}$$

$$f(x) = \frac{\ln(1+X^2)}{X} = \frac{X^2 + o(X^2)}{X} = X + o(X) \xrightarrow{X \rightarrow 0} 0$$

⑦ $f(x) = (1+x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} = e^{\frac{\cos x}{\sin x} \ln(1+x)}$

pb avec le ln: il faut $1+x > 0$ c-à-d $x > -1$

pb avec le \div : $x \neq k\pi$

$$D_f =]-1; 0[\cup]0; \pi[\cup]\pi; 2\pi[\cup \dots$$

problème en -1: On calcule $\lim_{x \rightarrow -1} e^{\frac{\cos x}{\sin x} \ln(1+x)} = e^{\frac{1/2}{-1/\sqrt{2}}(-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$

On ne peut pas prolonger par continuité en -1

problème en 0 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cos x}{\sin x} \ln(1+x)} = e^{\frac{1}{0} \times 0}$ F.I.

$$f(x) = e^{\frac{(1+\theta x)(x+\theta x)}{x+\theta x}} = e^{\frac{x(1+\theta)}{x(1+\theta)}} \rightarrow e^{\frac{1}{1}} = e^1 = e$$

On peut prolonger f par continuité en 0. On pose $f(0) = e$

problème en π : $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{\sin x} \ln(1+x) = e^{\frac{-1}{0} \ln(1+\pi)} = e^{\pm \infty} = \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$

pas de limite finie en π .

donc f n'est pas prolongable par continuité en π

pareil pour $2\pi, 3\pi, \dots$