

②  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto x + y$

linéaire? Je prends  $\vec{u}(x, y)$  et  $\vec{v}(x', y') \in \mathbb{R}^2$   
et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(a\vec{u} + b\vec{v}) &= f(\underbrace{ax + bx'}_X; \underbrace{ay + by'}_Y) = X + Y \\ &= ax + bx' + ay + by' = a(x + y) + b(x' + y') \\ &= \underline{a f(\vec{u}) + b f(\vec{v})} \end{aligned}$$

donc  $f$  est linéaire.

Calcul de  $\ker(f)$ :  $\vec{u}(x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \end{cases}$   
2 inconnues + 1 eq  $\rightarrow$  1 paramètre  $x = t \Rightarrow y = -t$  " $\ker(f) = \{ (t, -t) \mid t \in \mathbb{R} \}$ "

ou " $\ker(f)$  est la droite de vecteur directeur  $\vec{u} = (1, -1)$ "

ou  $\ker(f) = \text{Vect}(\vec{u}) = \{ t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \}$

Calcul de l'image : T de rang:  $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2)$   
 $1 + ? = 2$

$\dim(\text{Im}(f)) = 1$   
 $\text{Im}(f)$  est un sev de  $\mathbb{R}$  } donc  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

$f$  est surjective car  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

$f$  n'est pas injective car  $\text{Ker}(f) \neq \{ \vec{0} \}$

---

$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y, z) \mapsto x + y$

Je prends  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$g(a\vec{u} + b\vec{v}) = g(\underbrace{ax + bx'}_X; \underbrace{ay + by'}_Y; \underbrace{az + bz'}_Z) = X + Y$$
$$= ax + bx' + ay + by' = ax + ay + bx' + by' = a(x + y) + b(x' + y')$$
$$= a g(\vec{u}) + b g(\vec{v}). \text{ Donc } g \text{ est } \underline{\text{linéaire}}$$

Calcul de Ker(g):  $\vec{u} \in \text{Ker}(g) \Leftrightarrow g(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow x+y=0$  3 lignes, 1 eq  
 $\vec{u} = (x, y, z)$  dim 2, 2 paramètres

$$x=t \Rightarrow y=-t \text{ et } z=t$$

$$\text{Ker}(g) = \{ (t; -t; t) \text{ ou } t \in \mathbb{R} \} = \text{Vect} \left( \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

c'est le plan de vecteurs directeurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calcul de Im(g): 1ère rang: dim(Ker(g)) + dim(Im(g)) = dim( $\mathbb{R}^3$ )  
2 + ? = 3

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \dim(\text{Im}(g)) = 1 \\ \text{Im}(g) \text{ est un seu de } \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{ donc } \underline{\text{Im}(g) = \mathbb{R}}$$

g est surjective car  $\text{Im}(g) = \mathbb{R}$

g n'est pas injective car  $\text{Ker}(g) \neq \{ \vec{0} \}$

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x-y, x+y)$$

J'ai pris  $\vec{u}(x, y)$  et  $\vec{v}(x', y') \in \mathbb{R}^2$

J'ai pris  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h(a\vec{u} + b\vec{v}) &= h(a(x, y) + b(x', y')) \\ &= h((ax, ay) + (bx', by')) = h\left(\underbrace{(ax + bx',)}_X, \underbrace{(ay + by')}_Y\right) \end{aligned}$$

$$= (X - Y, X + Y)$$

$$= (ax + bx' - ay - by', ax + bx' + ay + by')$$

$$= \left( \underbrace{a(x-y)}_A + \underbrace{b(x'-y')}_B, \underbrace{a(x+y)}_C + \underbrace{b(x'+y')}_D \right) = (A; C) + (B; D)$$

$$= (a(x-y), a(x+y)) + (b(x'-y'), b(x'+y'))$$

$$= a(x-y, x+y) + b(x'-y', x'+y')$$

$$= a h(\vec{u}) + b h(\vec{v}) \quad \text{donc } h \text{ est } \underline{\text{linéaire}}$$



Calcul des noyaux :  $\vec{u} \in \text{ker}(h) \Leftrightarrow h(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} l_2 - l_1 \\ l_2 - l_1 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \quad \text{ker}(h) = \{ (0, 0) \}$$

donc  $h$  est injective

Calcul de Im(h) : T des rang :  $\dim(\text{ker}(h)) + \dim(\text{Im}(h)) = \dim(\text{espace de départ})$   
 $0 + ? = 2$

donc  $\dim(\text{Im}(h)) = 2$   
 $\text{Im}(h)$  est un sev de  $\mathbb{R}^2$  } donc  $\text{Im}(h) = \mathbb{R}^2$   
 $h$  est surjective

$h$  est bijjective

$$\textcircled{2} \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

$$\text{ex: } f(1; 2) = 1 + 2 = 3$$

Je prends  $\vec{u}(x, y)$  et  $\vec{v}(x', y') \in \mathbb{R}^2$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$f(a\vec{u} + b\vec{v}) = f(ax, ay + bx', by') = f\left(\underbrace{ax + bx'}_X; \underbrace{ay + by'}_Y\right) = X + Y$$

$$= ax + bx' + ay + by' = a(x + y) + b(x' + y')$$

$$= a f(\vec{u}) + b f(\vec{v})$$

donc  $f$  est linéaire

Calcul de  $\text{Ker } f$ :  $\vec{u}(x, y) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$

$\text{Ker } f$  est la droite d'éq  $x + y = 0$

$$\text{Ker } f = \text{Vect}((-1, 1))$$

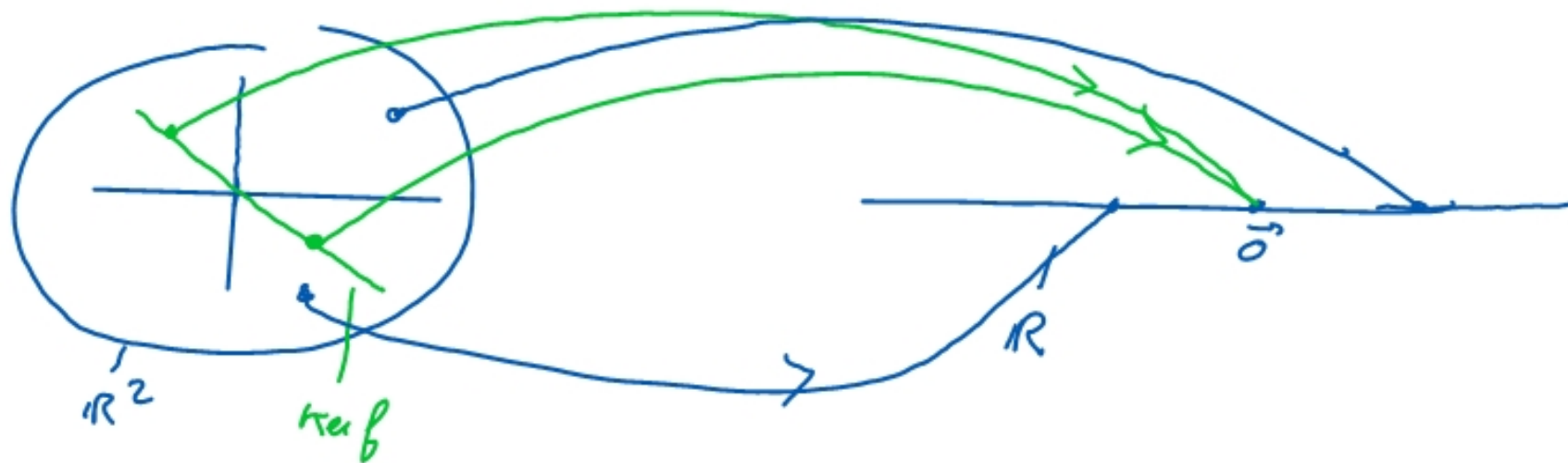
$$\text{Ker } f = \{ (t; -t) \text{ où } t \in \mathbb{R} \}$$

Calcul de  $\text{Im}(f)$ : T du rang:  $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{espace de départ})$   
 $1 + ? = 2$

$\Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 1$   
 $\text{Im}(f)$  est un sev de  $\mathbb{R}$  }  $\Rightarrow \boxed{\text{Im}(f) = \mathbb{R}}$

$f$  est surjective car  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

$f$  n'est pas injective car  $\ker(f) \neq \{ \vec{0} \}$



$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto x + y$$

Je prends  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$   
et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$g(a\vec{u} + b\vec{v}) = g\left(\underbrace{ax + bx'}_X, \underbrace{ay + by'}_Y, a_3 + b_3'\right)$$

$$= X + Y = ax + bx' + ay + by'$$

$$= a(x + y) + b(x' + y')$$

$$= a g(\vec{u}) + b g(\vec{v}) \quad \text{donc } g \text{ est } \underline{\text{linéaire}}$$

Calcul de ker(g):  $\vec{u}(x, y, z) \in \ker(g) \Leftrightarrow g(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$

3 inconnues et 1 eq, donc deux degrés de liberté

$$x = t \text{ et } y = -t \quad z = t' \quad \underline{\ker(g) = \{(t, -t, t') \mid t \text{ et } t' \in \mathbb{R}\}}$$

ker(g) est le plan de vecteurs de base  $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ker(g) = Vect( $\vec{u}, \vec{v}$ )



Calcul de  $\text{Im}(f)$ : T de rang:  $\dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = \dim(\mathbb{R}^3)$   
 $2 + ? = 3$

$\rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 1$   
 $\text{Im}(f)$  est un seul de  $\mathbb{R}$  } donc  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

$f$  est surjective car  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

$g$  n'est pas injective car  $\text{Ker}(g) \neq \{ \vec{0} \}$

---

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$       $\exists$  points  $\vec{u}(x, y)$  et  $\vec{v}(x', y') \in \mathbb{R}^2$   
et  $a, b \in \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto (x - y; x + y)$

$$\begin{aligned} f(a\vec{u} + b\vec{v}) &= f(ax, ay) + f(bx', by') = f\left(\frac{ax+bx'}{x}; \frac{ay+by'}{y}\right) \\ &= (x-y; x+y) = (ax+bx' - (ay+by'); ax+bx' + ay+by') \\ &= (ax-ay; ax+ay) + (bx'-by'; bx'+by') \end{aligned}$$

$$= a(x-y; x+y) + b(x'-y'; x'+y')$$

$$= a h(\vec{u}) + b h(\vec{v}) \quad \text{d'où } h \text{ est linéaire}$$

Calcul de  $\ker(h)$ :  $\vec{u}(x,y) \in \ker(h) \Leftrightarrow h(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2y=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\ker(h) = \{ \vec{0} \}$$

h est injective

Calcul de  $\text{Im}(h)$ :  $\vdash$  du rang:  $\dim(\ker(h)) + \dim(\text{Im}(h)) = \dim(\mathbb{R}^2)$

$$0 + ? = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \dim(\text{Im}(h)) = 2 \\ \text{Im}(h) \text{ est un sev de } \mathbb{R}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Im}(h) = \mathbb{R}^2$$

$$m \mid \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (x+y, x-y, x+2y)$$

Calcul du noyau:  $\vec{u}(x, y) \in \text{Ker}(m) \Leftrightarrow m(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow$

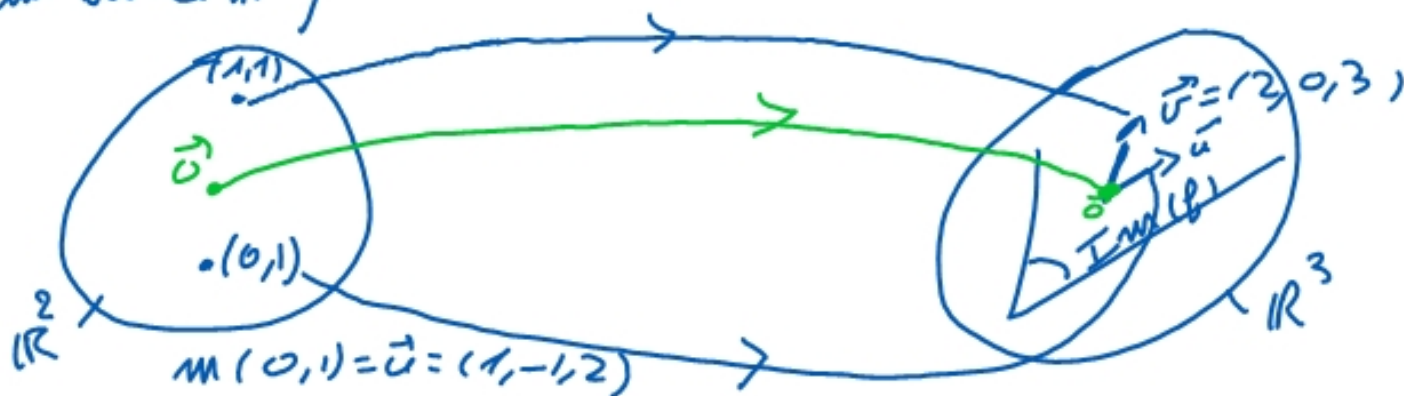
$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 - L_2 \\ L_1 - L_3 \end{cases} \begin{cases} x+y=0 \\ 2y=0 \\ -y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \boxed{\text{Ker}(m) = \{ \vec{0} \}} \quad \underline{\text{m est injective}}$$

Calcul de  $\text{Im}(f)$ :  $\tau$  du rang  $\cdot \dim(\text{Ker}(f) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim \mathbb{R}^2$

$$0 + \dots = 2$$

$\Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 2$   
 $\text{Im}(f)$  est un seu de  $\mathbb{R}^3$  ) c'est un plan de  $\mathbb{R}^3$ . lequel ?



$\Sigma_{\text{in}}(\beta)$  est le plan de vecteurs directeurs  $\vec{u}(1, -1, 2)$  et  $\vec{v}(2, 0, 3)$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Sigma_{\text{in}}(\beta)$  est le plan d'eq cart  $-3x + y + 2z = 0$