

Contrôle 1

$$\text{Exo 1: } a = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3a}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3a+1}{3a}}} = \frac{1}{2 + \frac{3a}{3a+1}} = \frac{1}{\frac{2(3a+1) + 3a}{3a+1}} = \frac{1}{\frac{6a+2+3a}{3a+1}}$$

$$a = \frac{4+3a}{8+2a+3a} = \frac{4+3a}{11+3a} \Leftrightarrow (11+3a)a = 4+3a \Leftrightarrow 3a^2 + 11a - a - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 10a - 4 = 0 \quad \Delta = 100 + 4 \times 12 = 148 = 4 \times 37 \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{37}$$

$$a = \frac{-10 \pm 2\sqrt{37}}{6} = \frac{2(-5 \pm \sqrt{37})}{2 \times 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{3} \quad 36 = 6^2 < 37 < 7^2$$

donc $6 < \sqrt{37} < 7$

comme a est positif : $a = \frac{\sqrt{37} - 5}{3}$

$$\text{Exo 2: } P(x) = x^2 - 49 + (3x-4)(-x-7) + 2(2x+14)$$

$$= (x+7)(x-7) - (3x-4)(x+7) + 4(x+7)$$

$$= (x+7) [x-7 - (3x-4) + 4] = (x+7) [x-7-3x+4+4]$$

$$= (x+7) (-2x+1)$$

$$\text{Exo 3: } \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} + \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} + \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2\sqrt{3} + 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$\text{Exo 4: } \prod_{k=1}^n (2k) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = 2^n n!$$

$$\text{Exo 5: } \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j = \sum_{k=0}^n (2^k + 2^{k+1} + \cdots + 2^n) = \sum_{k=0}^n 2^k (1 + 2 + \cdots + 2^{n-k})$$

$$= \sum_{k=0}^n 2^k \frac{2^{n-k+1} - 1}{2 - 1} = \sum_{k=0}^n 2^k (2^{n-k+1} - 1) = \sum_{k=0}^n (2^{n+1} - 2^k)$$

$$= \sum_{k=0}^n 2^{n+1} - \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} \sum_{k=0}^n 1 - \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} (n+1) - (2^{n+1} - 1)$$

$$= 2^{n+1} (n+1) - 2^{n+1} + 1 = n 2^{n+1} + 1$$

Exo 6: $7+9+\dots+37 = \sum_{k=3}^{18} (2k+1) = 2 \sum_{k=3}^{18} k + \sum_{k=3}^{18} 1$

$$= 2 \frac{(18+3)(18-3+1)}{2} + 18-3+1$$

$$= 21 \cdot 16 + 16 = 22 \cdot 16 = \underline{352}$$

Exo 7

$$\begin{array}{r|l} 2X^2 - 6X + 5 & X-1 \\ - (2X^2 - 2X) & 2X-4 \\ \hline -4X+5 & \\ - (-4X+4) & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$2X^2 - 6X + 5 = (X-1)(2X-4) + 1$

Exo 9 $\forall n \geq 1, 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Initialisation: pour $n=1$ $1^3 = 1$ et $\frac{1^2 \cdot 2^2}{4} = 1$ ok

Hérédité: Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que $1^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(Je dois montrer que $1^3 + \dots + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$)

On ajoute $(n+1)^3$ à l'hypothèse de récurrence. On obtient :

$$1^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2 [n^2 + 4(n+1)]}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 [n^2 + 4n + 4]}{4} = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}$$

car $(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$

Conclusion: D'après le principe de récurrence :

$$\forall n \geq 1, 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\text{Ex 8: } \sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{i4x} - 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} - 4e^{-i2x}e^{i4x} + e^{-i4x})$$

$$= \frac{1}{16} (e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-i4x})$$

$$\cos(2x) = \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}$$

$$\sin^4 x \cdot \cos(2x) = \frac{1}{32} (e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-i4x}) (e^{i2x} + e^{-i2x})$$

$$= \frac{1}{32} \left(\begin{array}{l} e^{i6x} - 4e^{i4x} + 6e^{i2x} - 4 + e^{-i2x} \\ + e^{i2x} - 4 + 6e^{-i2x} - 4e^{-i4x} + e^{-i6x} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{32} (e^{i6x} - 4e^{i4x} + 7e^{i2x} - 8 + 7e^{-i2x} - 4e^{-i4x} + e^{-i6x})$$

$$= \frac{1}{32} \left((e^{i6x} + e^{-i6x}) - 4(e^{i4x} + e^{-i4x}) + 7(e^{i2x} + e^{-i2x}) - 8 \right)$$

$$= \frac{1}{32} (2\cos(6x) - 4 \times 2\cos(4x) + 7 \times 2\cos(2x) - 8)$$

$$= \frac{1}{16} \cos(6x) - \frac{1}{4} \cos(4x) + \frac{7}{16} \cos(2x) - \frac{1}{4}$$

Exo 10 $1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1, \quad \forall n \geq 1$

Initialisation : $1 \times 1! = 1$ et $2! - 1 = 2 - 1 = 1$ OK

Hérédité : Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que $1 \times 1! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$

(Je dois montrer que $1 \times 1! + \dots + (n+1) \times (n+1)! = (n+2)! - 1$)

J'ajoute $(n+1) \times (n+1)!$ à l'hypothèse de récurrence. On obtient :

$$\begin{aligned} 1 \times 1! + \dots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! &= (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)! \\ &= (n+1)! [1 + (n+1)] - 1 \\ &= (n+1)! [n+2] - 1 = (n+2)! - 1 \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence :

$$\forall n \geq 1, \quad 1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

Exo 11 : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. C'est le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. C'est donc un entier.

$$(2 + \sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^n \sqrt{5}^k 2^{n-k} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} \sqrt{5} + \binom{n}{2} 2^{n-2} \sqrt{5}^2 + \dots + \binom{n}{n} (\sqrt{5})^n$$

$$(2 - \sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^n (-\sqrt{5})^k 2^{n-k} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} 2^n - \binom{n}{1} 2^{n-1} \sqrt{5} + \binom{n}{2} 2^{n-2} \sqrt{5}^2 - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} (\sqrt{5})^n$$

On ajoute les deux :

$$(2 + \sqrt{5})^n + (2 - \sqrt{5})^n = 2 \times \binom{n}{0} 2^n + 0 + 2 \times \binom{n}{2} 2^{n-2} \sqrt{5}^2 + 0 + \dots$$

Tous les termes avec des puissances impaires de $\sqrt{5}$ s'en vont

Il ne reste que les $(\sqrt{5})^{2k} = 5^k$

Il ne reste donc que les sommes et des produits d'entiers!