

(1a)  $S = \text{Mat}_B(S) = \begin{pmatrix} \lambda(E_1) & \lambda(E_2) & \lambda(E_3) & \lambda(E_4) \\ \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1b) S est symétrique, donc diagonalisable.

(1c)  $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$

$S = S^T$  et  $SS^T = I_4$ . S est un endomorphisme orthogonal. C'est une symétrie

(1d) 
$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{dév}^1 / \\ \text{ligne 1} \end{matrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{dév}^1 / \text{ligne 1} \\ \text{dév}^1 / \text{ligne 2} \end{matrix}$$

$$= -x(-x \cdot 0 - 1) + 1(0 \cdot 0 - 1) = -x(-x) - 1 = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

(1e) Il y a donc 2 valeurs propres :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 1$

(1B)  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow f(\vec{u}) = -\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \\ -t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \\ x = -z \\ y = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$

On peut choisir  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(1g)  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ t = y \end{cases}$  On peut choisir  $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1h)  $Q_i$  est la matrice de passage de B à  $B' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$

$Q_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{B'}(S)$

$S = Q_i D_i Q_i^{-1}$  est la formule de chgt de base

(2a) 
$$P = \frac{1}{2}(I - S) = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2b) 
$$P \cdot P = \text{Mat}_B(p \circ p) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P \quad P \cdot P = P, \text{ donc } \boxed{p \circ p = p}$$
  
 $P$  est donc une projection

(2c) 
$$p(\vec{u}_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u}_1$$

2<sup>ème</sup> méthode: 
$$p(\vec{u}_1) = \frac{1}{2}(\text{id}(\vec{u}_1) - S(\vec{u}_1)) = \frac{1}{2}(\vec{u}_1 + \vec{u}_1) = \vec{u}_1$$

$$p(\vec{u}_2) = \frac{1}{2}(\vec{u}_2 + \vec{u}_2) = \vec{u}_2 \quad p(\vec{u}_3) = \frac{1}{2}(\vec{u}_3 - \vec{u}_3) = \vec{0} = p(\vec{u}_4).$$

(2d) Ainsi,  $B' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$  est une base de vecteurs propres.

Donc  $P$  est diagonalisable

(2e) 
$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } Q_2 = Q_1 \dots$$
 (c'est à nouveau la formule de choix de base)

(3a) 
$$F = 3S + 4P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ +1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(3b) Dans  $B'$ :  $S(\vec{u}_1) = -\vec{u}_1$  et  $p(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$ , donc  $f(\vec{u}_1) = -3\vec{u}_1 + 4\vec{u}_1 = \vec{u}_1$   
 De même  $f(\vec{u}_2) = -3\vec{u}_2 + 4\vec{u}_2 = \vec{u}_2$  .  $f(\vec{u}_3) = 3\vec{u}_3 + 4\vec{0} = 3\vec{u}_3$  et  $f(\vec{u}_4) = 3\vec{u}_4$

Donc  $\text{Mat}_{B'}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D_3$  et  $Q_3 = Q_1$ .

exercice 2

1. (a) Un vecteur tangent s'obtient en dérivant les composantes du point courant. On obtient donc :

$$\vec{T} \left( 1, -\frac{1}{t^2} \right)$$

(b) Soit  $N(x, y)$  un point du plan.

$$\begin{aligned} N(x, y) \in (\mathcal{N}) &\iff \overrightarrow{NM} \cdot \vec{T} = 0 \\ &\iff \left( t - x, \frac{1}{t} - y \right) \cdot \left( 1, -\frac{1}{t^2} \right) = 0 \\ &\iff x - \frac{1}{t^2}y - t + \frac{1}{t^3} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega(a, b) \in (\mathcal{N}) &\iff a - \frac{1}{t^2}b - t + \frac{1}{t^3} = 0 \\ &\iff at^3 - bt = t^4 - 1. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} O\Omega^2 = M\Omega^2 &\iff a^2 + b^2 = (a - t)^2 + \left( b - \frac{1}{t} \right)^2 \\ &\iff at^3 + bt = \frac{1}{2}(t^4 + 1). \end{aligned} \quad (2)$$

En sommant les équations (1) et (2), on obtient :

$$a = \frac{3t^4 - 1}{4t^3}$$

En faisant la différence (1) - (2), on obtient :

$$b = \frac{-t^4 + 3}{4t}$$

Une représentation paramétrique des centres  $\Omega$  est donc donnée, lorsque  $t$  varie, par :

$$\begin{cases} a(t) = \frac{3t^4 - 1}{4t^3} \\ b(t) = \frac{-t^4 + 3}{4t} \end{cases}$$

- (a) Les deux fonctions  $x$  et  $y$  sont impaires, ce qui montre que la courbe  $(\Gamma)$  présente une symétrie centre  $O$ .
- (b) Soit  $t \in \mathbb{R}^*$ . On a :  $x\left(\frac{1}{t}\right) = y(t)$  et  $y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t)$ , donc la courbe  $(\Gamma)$  présente une symétrie par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .
- (c) La propriété de la question 4(a) permet de réduire le domaine d'étude à  $]0 ; +\infty[$ . Et, comme fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est bijective de  $]0 ; 1]$  sur  $]1 ; +\infty[$ , la propriété de la question 4(b) permet finalement de réduire l'étude à l'intervalle  $]0 ; 1]$ .

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont dérivables sur  $]0 ; 1]$ . On a :

$$\forall t \in ]0 ; 1], \quad x'(t) = \frac{3(t^4 + 1)}{4t^4} \quad \text{et} \quad y'(t) = -\frac{3(t^4 + 1)}{4t^2}$$

La fonction  $x$  est donc strictement croissante sur  $]0 ; 1]$ , et la fonction  $y$  strictement décroissante. Les limites en  $0^+$  de  $x$  et  $y$  sont les suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = -\infty$$

De plus,  $x(1) = y(1) = \frac{1}{2}$ , et  $x(-1) = y(-1) = -\frac{1}{2}$ . On obtient donc le tableau de variations suivant :

$t$	0	1
$x'(t)$		+
$x$		$\nearrow$ $\frac{1}{2}$
$y$		$\searrow$ $\frac{1}{2}$
$y'(t)$		-

6. (a) La partie de  $(\Gamma)$  obtenue quand  $t$  parcourt  $]0; 1]$  est  $(\Gamma_1)$ . En effet, lorsque  $t$  parcourt  $]0; 1]$ ,  $x$  croît,  $y$  décroît, et le point  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  est atteint lorsque  $t = 1$ .
- (b) Résolvons  $x(t) = x\left(-\frac{1}{t}\right)$ . On trouve :

$$x(t) = x\left(-\frac{1}{t}\right) \iff t^6 - 3t^4 - 3t^2 + 1 = 0.$$

Posons alors  $T = t^2$ . On doit résoudre :  $T^3 - 3T^2 - 3T + 1 = 0$ . Or  $-1$  est racine évidente, et en factorisant on se ramène à :  $(T + 1)(T^2 - 4T + 1) = 0$ . Les solutions sont :  $-1, 2 + \sqrt{3}$  et  $2 - \sqrt{3}$ , et comme  $2 + \sqrt{3}$  et  $2 - \sqrt{3}$  sont strictement positives, on obtient donc quatre valeurs possibles (réelles) pour  $t$  :

$$t \in \left\{ \sqrt{2 + \sqrt{3}}; -\sqrt{2 + \sqrt{3}}; \sqrt{2 - \sqrt{3}}; -\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right\}.$$

Soit  $t_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$  et  $t_2 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ . On a  $t_1 t_2 = 1$ , donc  $t_1$  et  $t_2$  sont inverses l'un de l'autre, et les points  $P_1$  et  $P_2$ , de paramètres respectifs  $t_1$  et  $t_2$ , sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation  $y = x$ . De plus,  $P_1$  appartient à la droite d'équation  $y = -x$  (car  $x(t_1) = x\left(-\frac{1}{t_1}\right) = y(-t_1) = -y(t_1)$ ), donc  $P_2$  est aussi le symétrique de  $P_1$  par rapport à  $O$ , c'est donc le point de paramètre  $-t_1$ . De même le point de paramètre  $-t_2$  est  $P_1$ .

(c) On a :

$$y(t_1) = y\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}},$$

d'où :

$$y(t_1)^2 = 2.$$

Comme  $t_1 \in ]0; 1]$ , on sait d'après les variations de  $y$ , que  $y(t_1) > 0$ , donc :  $y(t_1) = \sqrt{2}$ . On en conclut que :

$$P_1\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right).$$

Fin

ATS 2008. Ex 3

$$\textcircled{1} \int_0^{\pi} x^p dx = \left[ \frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^{p+1}}{p+1}$$

$$\int_0^{\pi} \cos(2nx) dx = \left[ \frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_0^{\pi} = \frac{\sin(2n\pi)}{2n} - \frac{\sin(0)}{2n} = 0$$

$$\int_1^{\pi} x \cos(2nx) dx \quad \text{IPP} \quad \begin{array}{l} u=x \quad u'=1 \\ v=\cos(2nx) \quad v'=\frac{\sin(2nx)}{2n} \end{array}$$

$$\int_1^{\pi} x \cos(2nx) dx = \left[ x \frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(2nx)}{2n} dx = 0 + \left[ \frac{\cos(2nx)}{4n^2} \right]_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos(2nx) dx \quad \text{IPP} \quad \begin{array}{l} u=x^2 \quad u'=2x \\ v=\cos(2nx) \quad v'=\frac{\sin(2nx)}{2n} \end{array}$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos(2nx) dx = \left[ x^2 \frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} x \sin(2nx) dx \quad \text{IPP} \quad \begin{array}{l} u=\frac{1}{n}x \quad u'=\frac{1}{n} \\ v=\sin(2nx) \quad v'=\frac{\cos(2nx)}{2n} \end{array}$$

$$= 0 - \left[ \frac{-x}{2n^2} \cos(2nx) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(2nx)}{2n^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2n^2} - \left[ \frac{\sin(2nx)}{4n^3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2n^2}$$

$$\textcircled{2a} \int_0^{\pi} (\alpha x^2 + \beta x) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \alpha \frac{x^3}{3} + \beta \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left( \alpha \frac{\pi^3}{3} + \beta \frac{\pi^2}{2} \right) = \alpha \frac{\pi^2}{3} + \beta \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\alpha x^2 + \beta x) \cos(2nx) dx = \frac{2}{\pi} \alpha \int_0^{\pi} x^2 \cos(2nx) dx + \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(2nx) dx$$

$\int_0^{\pi} x^2 \cos(2nx) dx = \frac{\pi}{2n^2} \quad \int_0^{\pi} x \cos(2nx) dx = 0$

$$a_n = \frac{\alpha}{n^2} \Rightarrow \alpha = -1$$

$$a_0 = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{3} + \beta \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{3} = \frac{3\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow \beta = \pi$$

$\alpha = -1$  et  $\beta = \pi$

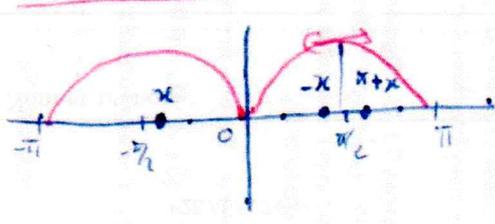
$$f(x) = -x^2 + \pi x \quad \forall x \in [0, \pi]$$

$f'(x) = -2x + \pi$   $f'$  s'annule en  $\frac{\pi}{2}$

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$f(x)$	0	+	0
$f'(x)$	+	0	-

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$f(0) = 0$$



①  $f(x) = -x^2 - \pi x$  et  $f(\pi+x) = -(\pi+x)^2 + \pi(\pi+x) = -\pi^2 - 2\pi x - x^2 + \pi^2 + \pi x = -x^2 - \pi x = f(x)$

② Il y a donc une symétrie par rapport à la droite d'éq  $x = \frac{\pi}{2}$

La partie entre  $-\frac{\pi}{2}$  et 0, est donc symétrique de celle entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$

et de même la partie entre  $-\pi$  et  $-\frac{\pi}{2}$  est la sym de celle entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$

Bref, il y a une symétrie par rapport à l'axe des y. Donc  $f$  est paire

Et bien sûr, comme  $f(0^-) = f(0^+)$ ,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

③  $f$  est paire, donc  $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

④ C'est le T de Dirichlet:  $f$  est de classe  $C^1$  par morceaux, donc la série de Fourier  $S_f(x)$  converge pour tout  $x$  vers  $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$ .

Comme de plus  $f$  est continue:  $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = f(x)$  et donc  $S_f = f$

⑤  $S_f(x) = \frac{x^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n^2} \cos(nx)$ . En 0:  $S_f(0) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = f(0) = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

⑥ En  $x = \frac{\pi}{2}$ :  $S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{2\pi^2 - 3\pi^2}{12} = -\frac{\pi^2}{12}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impaires}}}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{pairs}}}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} = -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$

$-\frac{\pi^2}{12} = -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{3\pi^2 + \pi^2}{24} = \frac{4\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}$

$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

⑦  $f$  est continue donc a portion continues par morceaux

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi^4}{36} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\pi^4}{n^4} + \frac{\pi^4}{n^4})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-x^2 + \pi x)^2 dx = \frac{\pi^4}{36} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x^4 - 2\pi x^3 + \pi^2 x^2) dx = \frac{\pi^4}{36} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{2\pi x^4}{4} + \frac{\pi^2 x^3}{3} \right]_0^{\pi} = "$$

$$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi^5}{5} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{3} \right] - \frac{\pi^4}{36} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \pi^4 \left[ \frac{2}{5} - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{18} \right] = \pi^4 \left[ \frac{2 \times 18 - 90 + 60 - 5}{5 \times 18} \right] = \pi^4 \left( \frac{36 - 5 - 30}{90} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$