

Problem 1

$$\textcircled{1} N_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2, \text{ donc } \underline{N_1 \text{ est nilpotente}}$$

$$B_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3 \text{ donc } \underline{B_1 \text{ est nilpotente}}$$

$$C_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3C_1$$

$$\Rightarrow C_1^3 = C_1^2 \times C_1 = 3C_1 \times C_1 = 3 \cdot 3C_1 = 9C_1$$

$$\Rightarrow C_1^4 = C_1^3 \times C_1 = 9 \cdot C_1 \times C_1 = 9 \cdot 3C_1 = 27C_1$$

Il semble que $C_1^n = 3^{n-1} C_1, \forall n \geq 1$. On le vérifie par récurrence :

Initialisation : C'est vrai pour $n=1; 2; 3$ et 4 !

Résumé : Je suppose que $C_1^n = 3^{n-1} C_1$ pour un $n \geq 1$

$$C_1^{n+1} = C_1^n \times C_1 = 3^{n-1} C_1 \times C_1 = 3^{n-1} \cdot 3C_1 = 3^n C_1 \quad \text{CQFD}$$

Conclusion : $\forall n \geq 1, C_1^n = 3^{n-1} C_1$

Donc C_1^n n'est jamais nul $\underline{C_1 \text{ n'est pas nilpotente}}$

$$\textcircled{2} A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(i) A_1 = \Delta_1 + N_1$$

(ii) Δ_1 est diagonale, donc a fortiori diagonalisable

(iii) N_1 est nilpotente (Q1)

$$(iv) \Delta_1 N_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N_1 \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 N_1 = N_1 \Delta_1$$

Donc (Δ_1, N_1) est une décomposition de Dunford de A_1

$$(3) A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(i) A_2 = \Delta_2 + N_2$$

(ii) Δ_2 est diagonale, donc diagonalisable

(iii) $N_2^2 = 0$, donc N_2 est nilpotente

$$\text{Mais (iv) } \Delta_2 N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq N_2 \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc (Δ_2, N_2) n'est pas une décomposition de Dunford de A_2

(4) Si A_3 est diagonalisable, alors on écrit $A_3 = \Delta_3 + 0$

Donc $(A_3, 0)$ est une décomposition de Dunford de A_3 .

En effet $\Delta = A_3$ est diagonalisable; 0 est nilpotente
et $\Delta \cdot 0 = 0 \cdot \Delta = 0$

(5) Si A_4 est nilpotente, alors on écrit $A_4 = 0 + A_4$

0 est diagonale, donc diagonalisable

A_4 est nilpotente et $0 \times A_4 = A_4 \times 0 = 0$

Donc $(0, A_4)$ est une décomposition de Dunford de A_4

(6) On suppose que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A .

Alors $A = \Delta + N$ et $\Delta N = N \Delta$.

$$\Delta A = \Delta(\Delta + N) = \Delta^2 + \Delta N = \Delta^2 + N \Delta = (\Delta + N)\Delta = A \Delta$$

Donc A commute avec Δ

De même,

$$NA = N(\Delta + N) = N\Delta + N^2 = \Delta N + N^2 = (\Delta + N)N = AN$$

donc N commute avec A

⑦. $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\det(\Delta) \stackrel{\text{dép/1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(9-1) = 16 \neq 0$
 ligne 1

$\det \Delta \neq 0$, donc Δ est inversible

• $\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ -1 & 3-x & 1 \\ -1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x) \underbrace{[(3-x)^2 - 1]}_{\text{identité remarquable}}$
 $= (2-x) [(3-x+1)(3-x-1)] = (2-x)(4-x)$

On appelle $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \Delta$

• Calcul de l'espace propre $E_2 = \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{u}) = 2\vec{u} \}$

Avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $f(\vec{u}) = 2\vec{u} \Leftrightarrow \Delta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2x \\ -x + 3y + z = 2y \\ -x + y + 3z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -x + y + z = 0$ c'est un plan. On peut choisir $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_2 = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$

• Calcul de l'espace propre E_4

$\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4$ est $f(\vec{w}) = 4\vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4x \\ -x + 3y + z = 4y \\ -x + y + 3z = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$ c'est une droite. On peut choisir $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3

Alors la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' vaut:

$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathcal{P}^{-1} \Delta \mathcal{P}$

• Calcul de \mathcal{P}^{-1} : On a $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ dans \mathcal{P} .

Dans \mathcal{P}^{-1} , on aura $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w}$ $\vec{v}-\vec{u} \quad \vec{w}$ $\begin{matrix} \vec{u}+\vec{v} \\ \vec{v}+\vec{w} \end{matrix}$

Colonne 3: $k\vec{k} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \Rightarrow \vec{k} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, Ok vérifie!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ok}$$

Colonne 2: $-\vec{j} + \vec{k} = -\vec{u} + \vec{v} \Rightarrow \vec{j} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{k} = \vec{u} - \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

$\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$. Ok vérifie!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ok}$$

Colonne 1: $\vec{i} + \vec{j} = \vec{u} \Rightarrow \vec{i} = \vec{u} - \vec{j} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

et bien sûr, on vérifie!

Finalement,

$$Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta = Q D Q^{-1}$, donc $\Delta^i = \underbrace{(Q D Q^{-1}) \dots (Q D Q^{-1})}_{i \text{ fois}} = Q D^i Q^{-1}$

et $D^i = \begin{pmatrix} 2^i & 0 & 0 \\ 0 & 2^i & 0 \\ 0 & 0 & 4^i \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} 2^i & 2^i & -2^i \\ 2^i & -2^i & 2^i \\ -4^i & 4^i & 4^i \end{pmatrix}$

$$\Delta^i = Q \begin{pmatrix} 2^i & 0 & 0 \\ 0 & 2^i & 0 \\ 0 & 0 & 4^i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta^i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^i & 0 & 0 \\ 2^i - 4^i & 2^i + 4^i & -2^i + 4^i \\ 2^i - 4^i & -2^i + 4^i & 2^i + 4^i \end{pmatrix} = 2^{i-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 - 2^i & 1 + 2^i & -1 + 2^i \\ 1 - 2^i & -1 + 2^i & 1 + 2^i \end{pmatrix}$$

8) $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc Nest nilpotente

$N\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1-1 & -3+1 & -1+3 \\ 2+1-1 & -3+1 & -1+3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2N$
 $\Delta N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1+3 & 1-3 & -1+3 \\ -1+1 & 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2N$
 $N\Delta = \Delta N = 2N$

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\chi_{\text{car}}(A) = \begin{vmatrix} 3-x & -1 & 1 \\ 0 & 2-x & 2 \\ -1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{dévelop.} \\ = (3-x) \begin{vmatrix} 2-x & 2 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \text{Colonne 1} \end{array}$
 On appelle g l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $A = \text{Mat}(g, \mathcal{B})$

$\chi_{\text{car}}(A) = (3-x)[(2-x)(3-x)-2] - (-2-2+x)$
 $= (3-x)(6-2x-3x+x^2-2) + 4 - x$
 $= (3-x)(4-5x+x^2) + 4 - x$
 $= 12 - 15x + 3x^2 - 4x + 5x^2 - x^3 + 4 - x = 16 - 20x + 8x^2 - x^3 = P(x)$

$P(2) = 16 - 40 + 32 - 8 = 0$. 2 est racine de P . On peut factoriser par $x-2$

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 8x^2 - 20x + 16 & x-2 \\ \hline -(-x^3 + 2x^2) & x^2 + 6x - 8 \\ \hline 6x^2 - 20x + 16 & \Delta = 36 - 32 = 4 \\ \hline -(6x^2 - 12x) & 2 \text{ racines : } \frac{-6 \pm 2}{-2} = 2 \text{ et } 4 \\ \hline -8x + 16 & \\ \hline -(-8x + 16) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$P(x) = (x-2)^2(x-4)$

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est une valeur propre de g pour la valeur propre 2 lorsque $g\vec{u} = 2\vec{u}$

ce d $\begin{cases} 3x - y + z = 2x \\ 2y + 2z = 2y \\ -x + y + 3z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} +x - y + z = 0 \\ z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. (C'est une droite)

On cherche les traces un plan car la valeur propre 2 est de multiplicité 2

Donc A n'est pas diagonalisable. $A = \Delta + N$; Δ est diagonalisable; Nest nilpotente et $\Delta N = N \Delta$, donc (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A page 7

⑨. Induction : pour $i=1$: $N\Delta = \varepsilon N$ (Q8)
 $= 2^1 N$ ok

Hypothèse : Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que $N\Delta^i = \varepsilon^i N$
 On calcule alors $N\Delta^{i+1}$:

$$N\Delta^{i+1} = N\Delta^i \Delta = \varepsilon^i N \Delta = \varepsilon^i \cdot \varepsilon N = \varepsilon^{i+1} N \quad \text{CQFD}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence : $N\Delta^i = \varepsilon^i N, \forall i \geq 1$

• $A = \Delta + N$ Récurrence

Induction : pour $p=1$ $A^1 = \Delta + 1 \cdot \varepsilon^0 N = \Delta + N$ oui

Hypothèse : Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que $A^p = \Delta^p + p\varepsilon^{p-1} N$

$$A^{p+1} = A \cdot A = (\Delta^p + p\varepsilon^{p-1} N)(\Delta + N) = \Delta^{p+1} + p\varepsilon^{p-1} N\Delta + \Delta^p N + p\varepsilon^{p-1} N^2$$

Or $N^2 = 0$ et $N\Delta = \varepsilon N$ et $\Delta^p N = N\Delta^p = \varepsilon^p N$

$$\text{Donc } A^{p+1} = \Delta^{p+1} + p\varepsilon^p N + \varepsilon^p N = \Delta^{p+1} + (p+1)\varepsilon^p N \quad \text{CQFD}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence : $A^p = \Delta^p + p\varepsilon^{p-1} N, \forall n \geq 1$

• (i) $A^p = \Delta^p + p\varepsilon^{p-1} N$

(ii) Δ est diagonalisable et $D = \varepsilon^{-1} \Delta \varepsilon$, donc $D^p = \varepsilon^{-1} \Delta^p \varepsilon$

Donc Δ^p est aussi diagonalisable

(iii) $N^2 = 0$, donc $(p\varepsilon^{p-1} N)^2 = p^2 \varepsilon^{2p-2} N^2 = 0$. $p\varepsilon^{p-1} N$ est nilpotente

(iv) $p\varepsilon^{p-1} N \cdot \Delta^p = p\varepsilon^{p-1} \Delta^p N$ (début de la Q9)

$$= \Delta^p \cdot p\varepsilon^{p-1} N$$

Ainsi, $(\Delta^p, p\varepsilon^{p-1} N)$ est une décomposition de Dunford de A^p

$$A^p = \Delta^p + p\varepsilon^{p-1} N = \varepsilon^p \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 1-2^p & 1+2^p & -1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix} + p\varepsilon^{p-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon^p \begin{pmatrix} 2+p & -p & p \\ 1+p-2^p & 1-p+2^p & p-1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix}$$

10. $U = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $U^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Donc $a = \pm\sqrt{2}$
 $b = \pm\sqrt{2}$
 $c = 2$

• Avec $a = b = \sqrt{2}$ et $c = 2$. On pose $S = \mathcal{L}U\mathcal{L}^{-1}$

• Alors, $S^2 = \mathcal{L}U\mathcal{L}^{-1} \times \mathcal{L}U\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L}U^2\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L}D\mathcal{L}^{-1} = \Delta$

• Calculons explicitement S :

$$S = \mathcal{L} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 & -\sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}+2 & \sqrt{2}+2 \end{pmatrix}$$

$$a\Delta + bI_3 = \begin{pmatrix} 2a+b & 0 & 0 \\ -a & 3a+b & a \\ -a & a & 3a+b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b = \sqrt{2} \\ -a = \frac{\sqrt{2}-2}{2} \\ 3a+b = \frac{\sqrt{2}+2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ b = 2\sqrt{2}-2 \end{cases}$$

• En raisonnant sur les formes diagonalisées:

On cherche a et b tels que U (la forme diagonalisée de S)

et égale à $aU^2 + bI$ (la forme diagonalisée de $a\Delta + bI$)

ce qui donne: $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et qui conduit au résultat bien sûr!

• $S \cdot N_3 = (a\Delta + bI_3) \cdot \Delta^{-1}N = a\Delta\Delta^{-1}N + b\Delta^{-1}N = aN + b\Delta^{-1}N$

et $N_3 \cdot S = \Delta^{-1}N(a\Delta + bI_3) = a\underbrace{\Delta^{-1}N\Delta}_{=\Delta N} + b\Delta^{-1}N = a\Delta N + b\Delta^{-1}N = aN + b\Delta^{-1}N$

Donc S et N_3 commutent

avec Q et Q^8 : $N\Delta = \Delta N = 2N$

$N\Delta = 2N \Rightarrow N\Delta \times \Delta^{-1} = 2N \times \Delta^{-1} \Rightarrow N = 2N\Delta^{-1}$ $N\Delta^{-1} = \frac{N}{2}$

Ém: $\Delta N = 2N \Rightarrow \Delta^{-1} \times \Delta N = \Delta^{-1} \times 2N = N \Rightarrow N = 2\Delta^{-1}N$ $\Delta^{-1}N = \frac{N}{2}$

Donc $N\Delta^{-1} = \Delta^{-1}N$

$$M = I_3 + \frac{1}{2} N_3 \quad M^2 = \left(I_3 + \frac{1}{2} N_3 \right) \left(I_3 + \frac{1}{2} N_3 \right)$$

$$= I_3 + \frac{1}{2} N_3 + \frac{1}{2} N_3 + \frac{1}{4} N_3^2 = I_3 + N_3 + \frac{1}{4} N_3^2$$

$$\text{et } N_3^2 = \Delta^{-1} N_3 \Delta^{-1} N_3 = \Delta^{-1} N_3 N_3 \Delta^{-1} = \Delta^{-1} N_3^2 \Delta^{-1} = \Delta^{-1} \cdot 0 \cdot \Delta^{-1} = 0$$

$$\text{Donc } \boxed{M^2 = I_3 + N_3}$$

$$A = \Delta + N = \Delta + \Delta \Delta^{-1} N = \Delta (I_3 + \Delta^{-1} N) = \Delta (I_3 + N_3) = \Delta M^2$$

$$\text{et } \Delta = S^2, \text{ donc } A = S^2 M^2$$

$$S = a\Delta + bI \quad M = I + \frac{1}{2} N_3 = I + \frac{1}{2} \Delta^{-1} N$$

Les matrices Δ et N et Δ^{-1} commutent, donc S et M commutent :

$$\boxed{A = S \times S \times M \times M = S \times M \times S \times M = (SM)^2} \quad \boxed{R = SM}$$

$$R = SM = (a\Delta + bI) \left(I + \frac{1}{2} N \right) = a\Delta + bI + \frac{a}{2} \Delta N + \frac{b}{2} N$$

$$R = a\Delta + bI + \frac{a}{2} \Delta N + \frac{b}{2} N = (a\Delta + bI) + (a + \frac{b}{2}) N$$

$a\Delta + bI = P^{-1}(aD + bI)P$, donc $a\Delta + bI$ est diagonalisable

$$\left((a + \frac{b}{2}) N \right)^2 = (a + \frac{b}{2})^2 N^2 = 0 \quad \text{car } N^2 = 0 \quad (a + \frac{b}{2}) N \text{ est nilpotente.}$$

et comme Δ et N commutent : $a\Delta + bI$ et $(a + \frac{b}{2}) N$ commutent aussi.

Ainsi

$$\boxed{\left(a\Delta + bI ; (a + \frac{b}{2}) N \right) \text{ est une décomposition de Dunford de } R}$$