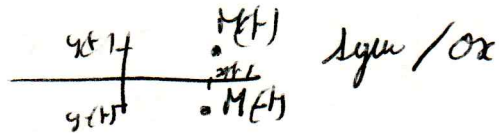


Exo) $\begin{cases} x(t) = 2\cos(2t) \\ y(t) = 3\sin(3t) \end{cases}$

$x(t+2\pi) = 2\cos(2t+4\pi) = 2\cos(2t) = x(t)$
 $y(t+2\pi) = 3\sin(3t+6\pi) = 3\sin(3t) = y(t)$ } donc x et y sont 2 π -périodiques

$x(-t) = 2\cos(-2t) = 2\cos(2t) = x(t)$
 $y(-t) = 3\sin(-3t) = -3\sin(3t) = -y(t)$



$x(\pi-t) = 2\cos(2\pi-2t) = 2\cos(-2t) = 2\cos(2t) = x(t)$
 $y(\pi-t) = 3\sin(3\pi-3t) = -3\sin(-3t) = 3\sin(3t) = y(t)$

$M(t) = M(\pi-t)$

On étudie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Lorsque t varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\pi-t$ varie de $\frac{\pi}{2}$ à π

On a donc (sans rien faire de plus car $M(\pi-t) = M(t)$) tous les points pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

On fait alors la symétrie/Ox. Or $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $-t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$.

On a donc tous les points pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. C'est un intervalle de longueur π .
 On a tous les points.

$x'(t) = -4\sin(2t)$ $x'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

$y'(t) = 3\cos(3t)$ $y'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2}$

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
x'(t)	0	$-2\sqrt{3}$	0
x(t)	2	1	0
y'(t)	3	0	0
y(t)	0	1	-1

pointe $\frac{9}{8}$

en $\frac{\pi}{6}$: $x'(\frac{\pi}{6}) = -4\sin(\frac{\pi}{3}) = -4\frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$; $x(\frac{\pi}{6}) = 2\cos(\frac{\pi}{3}) = 1$
 $y'(\frac{\pi}{6}) = 0$ $\vec{T}(\frac{\pi}{6}) = (-2\sqrt{3}, 0)$ tpe horizontale

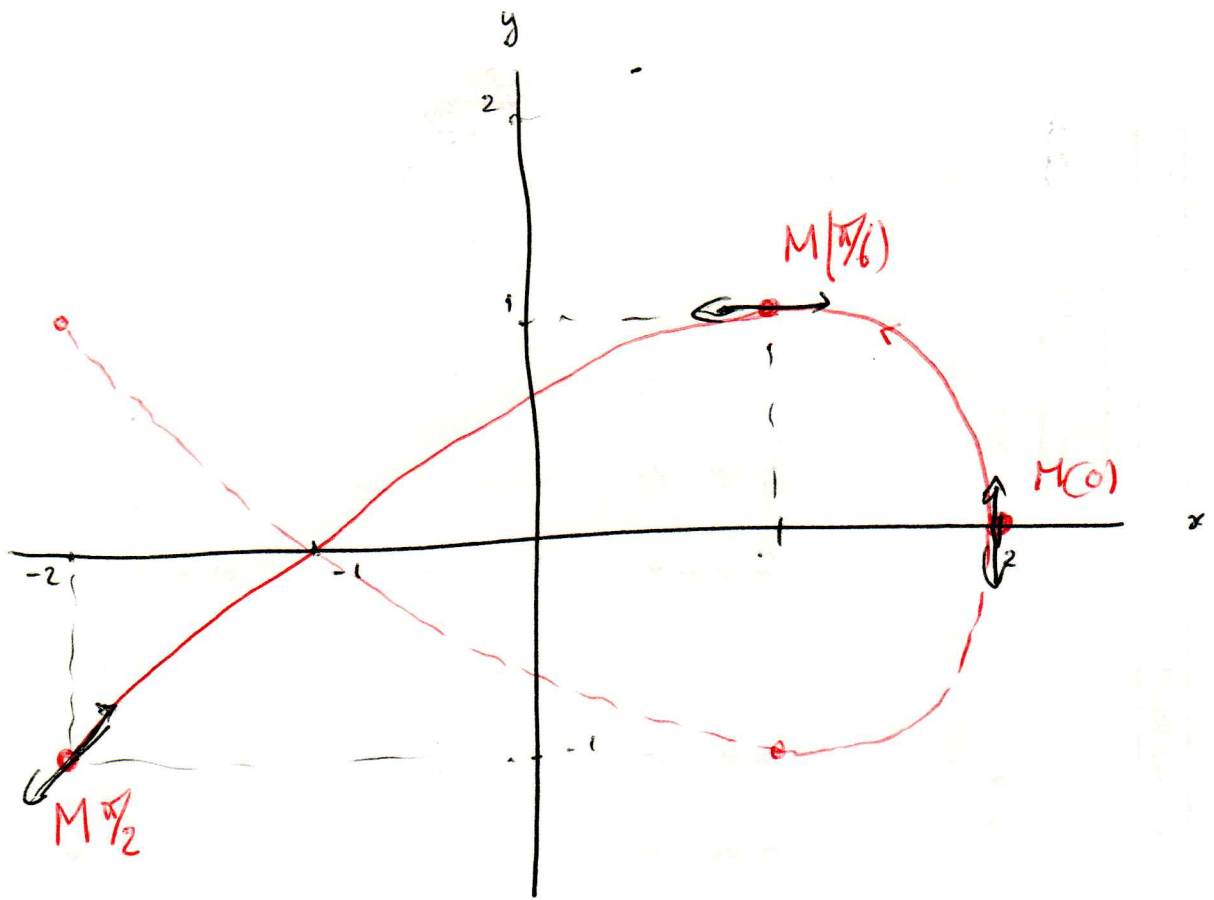
en 0: $x'(0) = 0$ $y'(0) = 3$ $\vec{T}(0) = (0, 3)$ tpe verticale

en $\frac{\pi}{2}$: $y'(0) = x'(0) = 0$. C'est un point singulier

$\frac{y'}{x'} = \frac{3\cos(3t)}{-4\sin(2t)}$ Cherchons $\alpha = t - \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \alpha + \frac{\pi}{2}$

$\frac{y'}{x'} = \frac{3\cos(3\alpha + \frac{3\pi}{2})}{-4\sin(2\alpha + \pi)} = \frac{3(\cos(3\alpha)\cos(\frac{3\pi}{2}) - \sin(3\alpha)\sin(\frac{3\pi}{2}))}{-4(\sin(2\alpha)\cos(\pi) - \cos(2\alpha)\sin(\pi))} = \frac{3\sin(3\alpha)}{4\sin(2\alpha)}$

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{3 \times 3\alpha}{4 \times 2\alpha} = \frac{9}{8}$



Ex 02

$$2xy'' + y' - y = 0 \quad y = \sum_0^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_1^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad y'' = \sum_2^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\begin{aligned} 2x y'' + y' - y &= \sum_1^{\infty} \underset{\text{descalage}}{2n(n-1)} a_n x^{n-1} + \sum_2^{\infty} \underset{\text{descalage}}{n} a_n x^{n-1} - \sum_0^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_0^{\infty} 2(n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_0^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_0^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_0^{\infty} [2(n+1)n + (n+1) a_{n+1} - a_n] x^n = 0 \end{aligned}$$

D'après l'unicité du Dévpt en Série Entière: $\forall n \geq 0 \quad (n+1)(2n+1)a_{n+1} - a_n = 0$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(2n+1)} = \frac{2 a_n}{(2n+1)(2n+2)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_1 = \frac{2 a_0}{1 \cdot 2} ; a_2 = \frac{2 a_1}{3 \cdot 4} = \frac{2^2 a_0}{2 \cdot 3 \cdot 4} ; a_3 = \frac{2 a_2}{5 \cdot 6} = \frac{2^3 a_0}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

Il semble que $a_n = \frac{2^n a_0}{(2n)!}$. On le prouve par récurrence:

Initialisation: Vrai pour $n = 0, 1, 2$ et 3

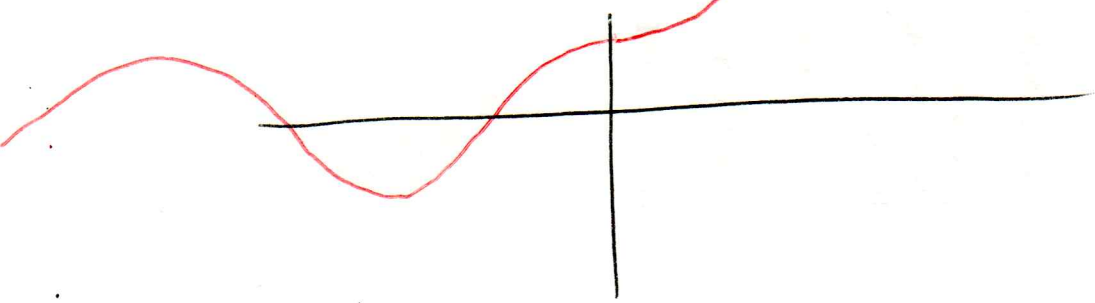
Hérédité: Je prends un $n \in \mathbb{N}$. Je suppose que $a_n = \frac{2^n a_0}{(2n)!}$

$$a_{n+1} = \frac{2 a_n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{2 \cdot \frac{2^n a_0}{(2n)!}}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{2^{n+1} a_0}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} = \frac{2^{n+1} a_0}{(2n+2)!} \quad \text{CQFD}$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{2^n a_0}{(2n)!}$

$$a_0 \sum_0^{+\infty} \frac{(2x)^n}{(2n)!} = a_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2x}) \quad \text{si } x \geq 0$$

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{(2n)!} = a_0 \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-2x})^{2n}}{(2n)!} = a_0 \operatorname{cos}(\sqrt{-2x}) \quad \text{si } x \leq 0$$



Exo 3 . $u_n = \frac{2^n + n^3}{3^n + n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$\sum_0^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n CV$ car c'est une série géométrique de raison $\frac{2}{3} \in]-1, 1[$

Donc $\left| \sum u_n CV \right| (T \text{ de } \mathcal{N})$

• $v_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$

$\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} CV$ (Riemann) $\Rightarrow \left| \sum v_n CV \right| (T \text{ de } \mathcal{N})$

• $w_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^a} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^a}} = \frac{(-1)^n}{n^a} \left[1 - \frac{(-1)^n}{n^a} + o\left(\frac{1}{n^a}\right) \right]$

$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^a}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)}_{b_n}$

• $a > 0$, donc $\sum a_n CV$ (critère des Séries Alternées)

• $b_n \sim \frac{1}{n^{2a}}$ $\sum \frac{1}{n^{2a}} CV$ qd $2a > 1$ (Riemann) $a > \frac{1}{2}$
 \setminus Div qd $2a \leq 1$ $a \leq \frac{1}{2}$

donc $\sum b_n \begin{cases} CV \text{ qd } a > \frac{1}{2} \\ \setminus \text{ Div qd } a \leq \frac{1}{2} \end{cases} (T \text{ de } \mathcal{N})$

donc $\left[\sum w_n \begin{cases} CV \text{ qd } a > \frac{1}{2} \\ \setminus \text{ Div qd } a \leq \frac{1}{2} \end{cases} \right. \begin{matrix} (CV + CV = CV) \\ (CV + Div = Div) \end{matrix}$