

Exo 1 Soit  $\vec{u}(x|y)$  et  $\vec{v}(x'|y') \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$

$$f(a\vec{u} + b\vec{v}) = f(ax + bx'; ay + by')$$

$$= (ax + bx' + 3(ay + by'); 2(ax + bx') + 6(ay + by'); -(ax + bx') - 3(ay + by'))$$

$$= (ax + 3ay + bx' + 3by'; 2ax + 6ay + 2bx' + 6by'; -ax - 3ay - bx' - 3by')$$

$$= (ax + 3ay; 2ax + 6ay; -ax - 3ay) + (bx' + 3by'; 2bx' + 6by'; -bx' - 3by')$$

$$= a(x + 3y; 2x + 6y; -x - 3y) + b(x' + 3y'; 2x' + 6y'; -x' - 3y')$$

$= a \text{ fl} + b \text{ fl}'$ . Donc est linéaire

•  $\vec{u}(x|y) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + 6y = 0 \\ -x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 3y = 0$  dimension 1  
si  $y = t$ , alors  $x = -3t$

$\text{Ker}(f)$  est la droite d'équation cartésienne  $x + 3y = 0$

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(-3; 1) = \{(-3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$\text{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$ , donc est pas injective donc est pas bijective

•  $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$   
 $\Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 1$

$\text{Im}(f)$  est une droite de  $\mathbb{R}^3$  laquelle?

$$f(1|0) = (1, 2, -1) = \vec{u}$$

$\text{Im}(f)$  est la droite de vecteur directeur  $\vec{u}$

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(\vec{u})$$

est pas surjective car  $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$

Exo 2 :  $l_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot k!}$        $U_n = l_n + \frac{1}{n^2 n!}$

$$l_{n+1} - l_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k \cdot k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot k!} = \frac{1}{(n+1)(n+1)!} > 0$$

donc la suite  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante

$$U_{n+1} - U_n = l_{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2 (n+1)!} - l_n - \frac{1}{n^2 n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+1)!} \times \frac{n^2 (n+1)}{n^2 (n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2 (n+1)!} \times \frac{n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2 n!} \times \frac{(n+1)^3}{(n+1)^2 (n+1)}$$

$$= \frac{n^2 (n+1) + n^2 - (n+1)^3}{n^2 (n+1)^2 (n+1)!}$$

$$= \frac{n^3 + n^2 + n^2 - n^3 - 3n^2 - 3n - 1}{n^2 (n+1)^2 (n+1)!}$$

$$= \frac{-n^2 - 3n - 1}{n^2 (n+1)^2 (n+1)!} < 0$$

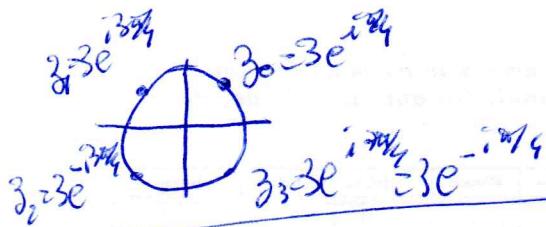
donc la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante

$$U_n - l_n = \frac{1}{n^2 n!} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0$$

donc les deux suites sont adjacentes

**Exo 3** ①  $2X^4 + 162 = 0 \Leftrightarrow X^4 = -81 = 81e^{i\pi}$

les 4 racines de  $81e^{i\pi}$  sont les  $z_k = 81^{1/4} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4})} = 3e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})}$



$$2X^4 + 162 = 2(X - 3e^{i\pi/4})(X - 3e^{-i\pi/4})(X - 3e^{i3\pi/4})(X - 3e^{-i3\pi/4})$$

$$= 2 \left( X^2 - 3(e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4})X + 9 \right) \left( X^2 - 3(e^{i3\pi/4} + e^{-i3\pi/4})X + 9 \right)$$

$$= 2 \left( X^2 - 3 \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 9 \right) \left( X^2 - 3 \cdot 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 9 \right)$$

$$2X^4 + 162 = 2 \left( X^2 - 3\sqrt{2}X + 9 \right) \left( X^2 + 3\sqrt{2}X + 9 \right) \text{ dans } \mathbb{R}[X]$$

**Exos**  $F(x) = \frac{2X^4 + 1}{(X-1)^2(X^2+1)} = E(x) + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}$

$$(X-1)^2(X^2+1) = (X^2-2X+1)(X^2+1) = X^4 + X^2 - 2X^3 - 2X + X^2 + 1 = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$$

$$2X^4 + 1 \mid X^4 - 2X^3 \quad \boxed{E(x) = 2}$$

On x par  $(X-1)^2$  et on prend la valeur en 1 :

$$\left. \frac{2X^4 + 1}{X^2 + 1} \right|_{X=1} = 0 + 0 + b + 0 \quad \boxed{b = 3/2}$$

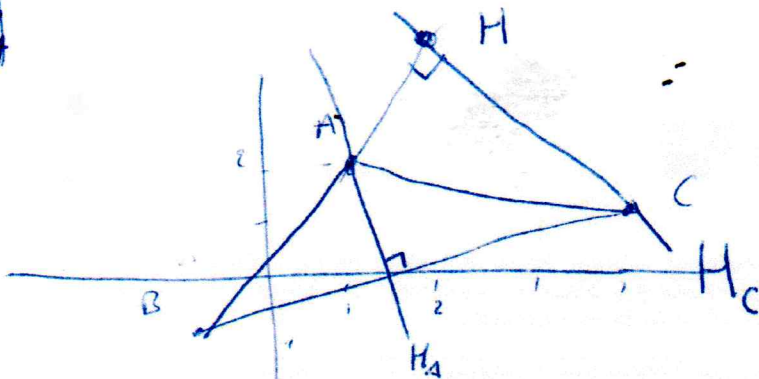
On x par  $X^2 + 1$  et on prend la valeur en  $i$  :

$$\left. \frac{2X^4 + 1}{(X-1)^2} \right|_{X=i} = 0 + 0 + 0 + ci + d = \frac{3}{(i-1)^2} = \frac{3}{i^2 - 2i + 1} = \frac{3}{-2i} = \frac{3}{-2} \cdot \frac{i}{i} = \frac{3}{2}i = ci + d$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{3}{2}} \text{ et } \boxed{d = 0} ; \text{ valeur en } 0 : 1 = 2 - a + \frac{3}{2} \Rightarrow a = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{2X^4 + 1}{(X-1)^2(X^2+1)} = 2 + \frac{5/2}{X-1} + \frac{3/2}{(X-1)^2} + \frac{3/2 X}{X^2+1}$$

Exo 4



hauteur en A :  $H_A$  passe par A et est  $\perp$  au côté opposé

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (5, 2)$$

Donc  $H_A$  a pour eq cartésienne  $5x + 2y = c$

Elle passe par A, donc  $5x_A + 2y_A = c = 5 + 4 = 9$

$$\boxed{H_A : 5x + 2y = 9}$$

hauteur en C :  $H_C$  passe par C et est  $\perp$  à la droite (AB)

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-2, -3)$$

Donc  $H_C$  a pour eq cartésienne  $-2x - 3y = c$

Elle passe par C, donc  $-8 - 3 = c = -11$

$$\boxed{H_C : 2x + 3y = 11}$$

Orthocentre :  $H \in H_A \cap H_C$

$$\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3L_1 \\ 2L_2 \end{cases} \begin{cases} 15x + 6y = 27 \\ 4x + 6y = 22 \end{cases}$$

$$L_1 - L_2 : 11x = 5 \quad x = \frac{5}{11} \Rightarrow 2y = 9 - \frac{25}{11} = \frac{99 - 25}{11} = \frac{74}{11} \Rightarrow y = \frac{37}{11}$$

$$\boxed{H = \left( \frac{5}{11}, \frac{37}{11} \right)}$$

hauteur en B :  $H_B$  passe par B et est  $\perp$  à (AC)

$$\vec{AC} = (3, -1)$$

$H_B$  a pour eq  $3x - y = c$

Elle passe par B :  $-3 + 1 = c = -2$

$$\boxed{H_B : 3x - y = -2}$$

$$3x_H - y_H = \frac{15}{11} - \frac{37}{11} = \frac{-22}{11} = -2$$

On voit que  $H \in H_B$  les calculs ont l'air juste