

**Exo1**  $e^{\frac{1}{t^2} + \infty} : \frac{1}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , on fait un DL:  $\ln(1+x) = x + o(x) \sim x$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

$\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$  en 0  $\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2}\right) = \ln(1+t^2) - \ln(t^2) = \underbrace{-\ln(t^2)}_{\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty} + \underbrace{t^2}_{\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{o(t^2)}_{\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0}$

$$\underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\ln(t^2) = -2\ln(t)$$

en effet:  $\frac{-\ln(t^2) + t^2 + o(t^2)}{-\ln(t^2)} = 1 - \frac{t^2 + o(t^2)}{\ln(t^2)} \rightarrow 1 - \frac{0}{\infty} = 1 - 0 = 1$

$$\frac{\frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^n}} = e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^0 = 1, \text{ donc } \left| \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^n} \right|$$

**Exo2** TAYLOR:  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$

eq de la tpe:  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

**Exo3**  $I = \int \frac{x}{x^2+1} dx$  clef  $X = x^2+1 \quad \frac{dX}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dX}{2x}$

$$I = \int \frac{x}{X} \frac{dX}{2x} = \frac{1}{2} \int X^{-1} dX = \frac{1}{2} (-X^{-1}) = \underline{\underline{-\frac{1}{2(x^2+1)}}}$$

$I = \int x \cdot \frac{x}{x^2+1} dx$   $\begin{array}{l} \text{PPP} \\ \left| \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = \frac{x}{(x^2+1)^2} \quad v = -\frac{1}{2(x^2+1)} \end{array} \right. \end{array}$

$$I = \left[ -\frac{x}{2(x^2+1)} \right] + \int \frac{1}{2(x^2+1)} dx = \underline{\underline{-\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan(x) + cte}}$$

Exo 4  $f(x,y) = (x+y; x-y; x+2y)$  (il faut montrer que  $f(a\vec{u} + b\vec{v}) = a f(\vec{u}) + b f(\vec{v})$ )

Je prends  $\vec{u}(x,y)$  et  $\vec{v}(x',y') \in \mathbb{R}^2$  et  $a, b \in \mathbb{R}$

$$f(a\vec{u} + b\vec{v}) = f(ax+bx'; ay+by')$$

$$= (ax+bx'+ay+by'; (ax+bx') - (ay+by'); (ax+bx') + 2(ay+by'))$$

$$= ((ax+ay) + (bx'+by')); (ax-ay) + (bx'-by'); (ax+2ay) + (bx'+2by'))$$

$$= (ax+ay; ax-ay; ax+2ay) + (bx'+by'; bx'-by'; bx'+2by')$$

$$= a(x+y; x-y; x+2y) + b(x'+y'; x'-y'; x'+2y')$$

$$= a f(\vec{u}) + b f(\vec{v}) \quad \text{C.O.F.D. } f \text{ est linéaire}$$

• Calcul du noyau:  $\vec{u}(x,y) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0 \quad | \text{Ker}(f) = \{ \vec{0} \}$

• Calcul de l'image: Théorème du rang:  $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$   
 $0 + ? = 2$  est injective

$\dim(\text{Im}(f)) = 2$   
 $\text{Im}(f)$  est un sev de  $\mathbb{R}^3$  }  $\Rightarrow$   $\text{Im}(f)$  est un plan de  $\mathbb{R}^3$  lequel?

$$f(\vec{e}_1) = f(1,0) = (1+0; 1-0; 1+2 \cdot 0) = (1, 1, 1) = \vec{\alpha} \quad \vec{\alpha} = f(\vec{e}_1), \text{ donc } \vec{\alpha} \in \text{Im}(f)$$

$$f(\vec{e}_2) = f(0,1) = (0+1; 0-1; 0+2 \cdot 1) = (1, -1, 2) = \vec{\beta} \quad \vec{\beta} = f(\vec{e}_2), \text{ donc } \vec{\beta} \in \text{Im}(f)$$

$\text{Im}(f)$  est donc le plan engendré par  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$   $\text{Im}(f) = \text{Vect}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

eq paramétriques:  $\begin{cases} x = t + t' \\ y = t - t' \\ z = t + 2t' \end{cases}$  où  $t, t' \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$   $L_1 - L_2: \begin{cases} x = t + t' \\ x - y = 2t' \\ L_1 - L_3: x - z = -t' \end{cases}$

$$L_2 + 2L_3: (x-y) + 2(x-z) = 0 \Rightarrow \boxed{3x - y - 2z = 0}$$

$\uparrow$   
 c'est l'eq caractéristique de  $\text{Im}(f)$  !

$\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$ , donc  $f$  n'est pas surjective. Et donc,  $f$  n'est pas bijective

Exo 5 Inductio schwa: pour  $n=1$ :

$$h'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x = (2x+1)e^x$$

et  $(2x+2 \times 1 - 1)e^x = (2x+1)e^x$  Yes

• Hypothèse: Je prends UN  $n \geq 1$ . Je suppose que  $h(x) = (2x+2n-1)e^x$

On dérive:  $h^{(n+1)}(x) = h^{(n)}(x)' = 2e^x + (2x+2n-1)e^x = (2x+2n+1)e^x$   
 $= (2x+2(n+1)-1)e^x$  CQFD

• Conclusion:  $\boxed{\forall n \geq 1 \quad h^{(n)}(x) = (2x+2n-1)e^x}$   
d'après le principe de récurrence:

• Formule de Leibniz:  $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

•  $h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x-1)^{(k)} (e^x)^{(n-k)}$

Pour  $k=0$ :  $(2x-1)^{(0)} = 2x-1$  (on dérive 0 fois)

et  $(e^x)^{(n)} = e^x$  (car  $e^x' = e^x$ )

Pour  $k=1$ :  $(2x-1)' = 2$  et  $(e^x)^{(n-1)} = e^x$

Pour  $k \geq 1$ :  $(2x-1)^{(k)} = 0$  Donc,

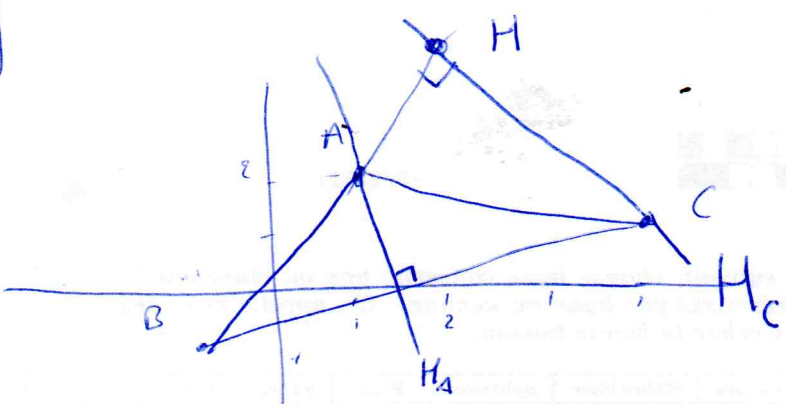
$$h^{(n)}(x) = \binom{n}{0} (2x-1)e^x + \binom{n}{1} 2e^x + 0 + \dots + 0$$

$$= 1(2x-1)e^x + n \cdot 2e^x + 0$$

$$\boxed{h^{(n+1)}(x) = (2x+2n-1)e^x}$$



Exo 6



hauteur en A :  $H_A$  passe par A et est  $\perp$  au côté opposé

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (5, 2)$$

Donc  $H_A$  a pour eq cartésienne  $5x + 2y = c$

Elle passe par A, donc  $5x_A + 2y_A = c = 5 + 4 = 9$

$$\boxed{H_A : 5x + 2y = 9}$$

hauteur en C :  $H_C$  passe par C et est  $\perp$  à la droite (AB)

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-2, -3)$$

Donc  $H_C$  a pour eq cartésienne  $-2x - 3y = c$

Elle passe par C, donc  $-8 - 3 = c = -11$

$$\boxed{H_C : 2x + 3y = 11}$$

Orthocentre :  $H \in H_A \cap H_C$

$$\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3l_1 \\ 2l_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 6y = 27 \\ 4x + 6y = 22 \end{cases}$$

$$l_1 - l_2 : 11x = 5 \quad x = \frac{5}{11} \Rightarrow 2y = 9 - \frac{25}{11} = \frac{99 - 25}{11} = \frac{74}{11} \Rightarrow y = \frac{37}{11} \quad \boxed{H = \left( \frac{5}{11}, \frac{37}{11} \right)}$$

hauteur en B :  $H_B$  passe par B et est  $\perp$  à (AC)

$$\vec{AC} = (3, -1) \quad H_B \text{ a pour eq } 3x - y = c$$

Elle passe par B :  $-3 + 1 = c = -2$

$$\boxed{H_B : 3x - y = -2}$$

$$3x_H - y_H = \frac{15}{11} - \frac{37}{11} = \frac{-22}{11} = -2.$$

On voit que  $H \in H_B$  les calculs ont l'air juste

$$\boxed{\text{Exo 7}} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{or} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin^3(x) \cos(x) = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{-8i} \right)^3 \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{-16i} \left( e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} - e^{-i3x} \right) (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$= -\frac{1}{16i} \left( e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x} \right) (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$= -\frac{1}{16i} \left[ \begin{array}{l} e^{i4x} - 3e^{i2x} + 3 - e^{-i2x} \\ + e^{i2x} - 3 + 3e^{-i2x} - e^{-i4x} \end{array} \right]$$

$$= -\frac{1}{16i} \left[ (e^{i4x} - e^{-i4x}) + 2e^{i2x} + 2e^{-i2x} \right]$$

$$= -\frac{1}{16i} \left[ 2i \sin(4x) - 2(e^{i2x} - e^{-i2x}) \right]$$

$$= -\frac{1}{16i} \left[ 2i \sin(4x) - 4i \sin(2x) \right] = \underline{\underline{-\frac{1}{8} \sin(4x) - \frac{1}{4} \sin(2x)}}$$

Exo 8

$$\begin{cases} x + y + az = a \\ x + ay - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + az = a \\ (a-1)y - (1+a)z = 1-a \\ (a+1)z = a-1 \end{cases}$$

1<sup>er</sup> cas:  $a = -1$  le système devient  $\left. \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 = -2 \text{ impossible} \\ \mathcal{S} = \emptyset \end{array}$

2<sup>es</sup> cas:  $a = 1$  le système devient  $\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ -2z = 0 \\ 2z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y = 1 \\ z = 0 \end{array}$

3 inconnues et 2 équations. C'est une droite. on pose  $x = t$ .  $y = -t + 1$

$\mathcal{S} = \{ (t; -t+1; 0) \text{ où } t \in \mathbb{R} \}$  C'est la droite de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  passant par le point  $(0, 1, 0)$

3<sup>es</sup> cas:  $a \neq 1$  et  $a \neq -1$   $l_3: z = \frac{a-1}{a+1}$ ;  $l_2: y = \frac{(1+a)z + 1 - a}{a-1} = \frac{a-1+1-a}{a-1} = 0$

$l_1: x = a - az = a - \frac{a^2 - a}{a+1} = \frac{a^2 + a - (a^2 - a)}{a+1} = \frac{2a}{a+1}$

$\mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{2a}{a+1}; 0; \frac{a-1}{a+1} \right) \right\}$  ← une sol unique