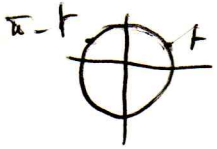
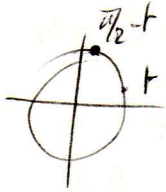


1) $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$



$$\begin{cases} \cos(\pi-t) = -\cos t & x(-t) = -x(t) \\ \sin(\pi-t) = \sin t & y(-t) = y(t) \end{cases}$$

Symétrie / Ox



$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}-t) = \sin t & x(\frac{\pi}{2}-t) = y(t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}-t) = \cos t & y(\frac{\pi}{2}-t) = x(t) \end{cases}$$

Symétrie / Oy

Symétrie / 1^{ère} bissectrice

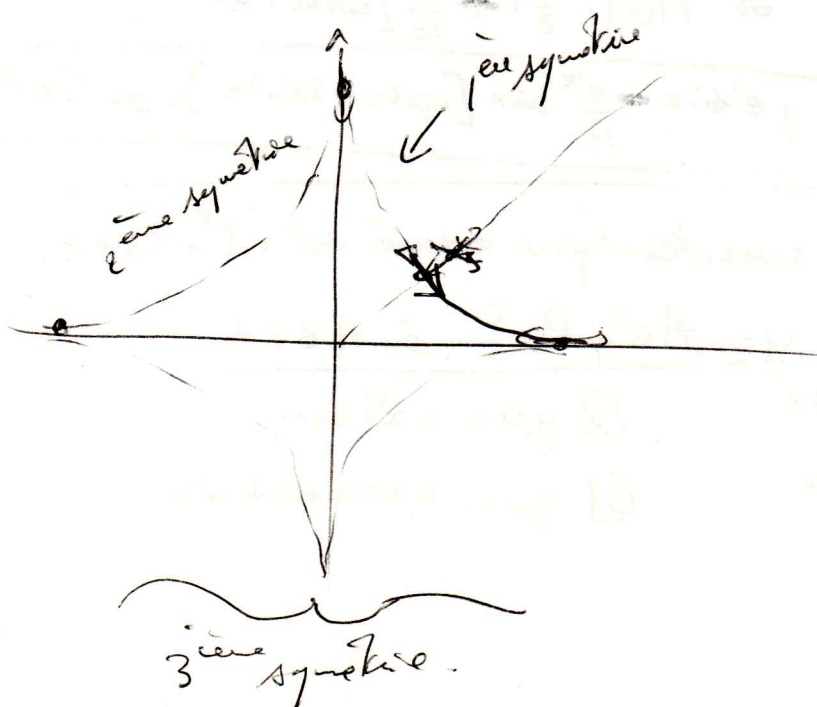
On étudiera sur $(0, \frac{\pi}{4}]$ puis avec la transformation $t \rightarrow \frac{\pi}{2} - t$, on récupère la courbe sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}]$ grâce à la symétrie / 1^{ère} bissectrice. On a donc la courbe sur $(0, \frac{\pi}{2}]$. Grâce à la transformation $t \rightarrow \pi - t$ (qui envoie $(0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$), on récupère la courbe sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ grâce à la symétrie / Oy. On a donc la courbe sur $(0, \pi]$. La dernière symétrie / Ox permet d'attraper le reste.

2) $x'(t) = -3 \cos^2 t \sin t$ s'annule sur $(0, \frac{\pi}{4}]$ en $t=0$
 $y'(t) = 3 \sin^2 t \cos t$ s'annule sur $(0, \frac{\pi}{4}]$ en $t=0$

t	0	$\frac{\pi}{4}$
x'	0	$-3\sqrt{2}/4$
x	1	$\sqrt{2}/4$
y'	0	$3\sqrt{2}/4$
y	0	$\sqrt{2}/4$

en 0 : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'}{x'} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\sin^2 t \cos t}{\cos^2 t \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\sin t}{\cos t} = 0$
 La pente est nulle. la tête est horizontale.

en $\frac{\pi}{4}$: $\frac{y'}{x'} = -1$ pente -1



$$(3) \vec{T}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cos^2 t \sin t \\ 3\sin^2 t \cos t \end{pmatrix} = 3\sin t \cos t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = 3\sin t \cos t \vec{E}$$

Donc \vec{E} est un vecteur tangent

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{car } \vec{n} \cdot \vec{E} = 0$$

La l'pte a donc pour eq $\sin t X + \cos t Y = c$

Elle passe par $M(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$ donc

$$\sin t \cos^3 t + \cos t \sin^3 t = c$$

$$\sin t \cos t (\cos^2 t + \sin^2 t) = c \Rightarrow c = \sin t \cos t \quad \text{Ocei!}$$

$$(4) \text{ sur l'axe des } x : Y=0 \Rightarrow x_A \sin t = \sin t \cos t \rightarrow x_A = \cos t$$

$$\text{sur l'axe des } y : X=0 \Rightarrow y_B \cos t = \sin t \cos t \rightarrow y_B = \sin t$$

$$A(t) = (\cos t, 0) \text{ et } B(t) = (0, \sin t)$$

$$\vec{AB} = B - A = (-\cos t, \sin t) \quad AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

$$(5) C = (\cos t, \sin t) \text{ . Met sur la droite } (AB) \text{ par construction.}$$

Vérifions que \vec{CA} et \vec{AB} sont \perp

$$\vec{CA} = (\cos^3 t - \cos t, \sin^3 t - \sin t) \quad \vec{AB} = (-\cos t, \sin t)$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{AB} = -\cos^4 t + \cos^2 t + \sin^4 t - \sin^2 t = -\frac{(1-\sin^2 t)^2}{\cos^2 t} + \cos^2 t \frac{1-\sin^2 t}{\cos^2 t} + \sin^4 t - \sin^2 t$$

$$= -1 + 2\sin^2 t - \sin^4 t + 1 - \sin^2 t + \sin^4 t - \sin^2 t = 0$$

(Q.F.D)

(6) De même, on calcule $\vec{OB} \cdot \vec{AB}$:

$$\vec{OB} \cdot \vec{AB} = -\cos^2 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^2 t = 0 \quad \text{C.Q.F.D}$$

$$\vec{I} = \frac{\vec{M} + \vec{P}}{2} = \frac{1}{2} (\cos^3 t + \cos t \sin^2 t, \sin^3 t + \cos^2 t \sin t) = \frac{1}{2} (\cos t (\cos^2 t + \sin^2 t), \sin t (\sin^2 t + \cos^2 t))$$

$$\vec{I} = \frac{1}{2} (\cos t, \sin t) \text{ . C'est bien le milieu de } OC$$

$$(7) \mathcal{R}(0) = (0, 0)$$

$$\textcircled{7} \begin{cases} X(t) = \cos t \sin^2 t \\ Y(t) = \cos^2 t \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} X'(t) = -\sin^3 t + 2 \sin t \cos^2 t \\ Y'(t) = -2 \cos t \sin^2 t + \cos^3 t \end{cases} \quad \vec{T}(t) = (X'(t), Y'(t))$$

$$P(0) = (0, 0)$$

$$\vec{T}(0) = (0, 1)$$

$$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3; \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\vec{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + 2 \frac{\sqrt{2}}{4}; -2 \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1; -1)$$

$$P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 0)$$

$$\vec{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1; 0)$$