

Exercice 3 (A1) $y_H = A e^{-\int \frac{1}{x} dx} = A e^{-\ln x} = A e^{\ln(x^{-1})} = \frac{A}{x}$ où $A \in \mathbb{R}$

(A2) $y_E = \frac{d\alpha_1}{x}$ $y'_E = \frac{\alpha'_1 x - d\alpha_1}{x^2}$

$$y'_E + \frac{y_E}{x} = \frac{\alpha'_1 x - d\alpha_1}{x^2} + \frac{d\alpha_1}{x^2} = \frac{\alpha'_1 x}{x^2} = \frac{\alpha'_1}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow \alpha'_1 = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow d\alpha_1 = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

(A3) $y = \frac{A + \arctan x}{x}$ où $A \in \mathbb{R}$

(B1) $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \mathcal{O}(x^2)$ car $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \mathcal{O}(x)$

On intègre: $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5) + cste$

On prend la valeur en 0: $0 = 0 + cste \Rightarrow cste = 0$

donc $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$, donc $f(\alpha_1) = \frac{1}{x} - \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^3)$

(B2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(\alpha_1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^3) = 1$

Donc f est prolongeable par continuité en 0. On pose $f(0) = 1$

(B3) f possède un DL à l'ordre 1 en 0: $f(\alpha_1) = 1 + \mathcal{O}(x) + \mathcal{O}(x)$,
donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

(B4) $p(x) = x - (1+x^2)\arctan(x)$ $p(-x) = -p(x)$ p est impaire
 $p'(x) = 1 - 2x \arctan x - (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} = -2x \arctan x$

$p'(x) < 0$ sur \mathbb{R}^{++}

x	0	$+\infty$
p'	-	
p	0	$-\infty$

p est impaire, donc symétrique/O.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
p'	+	-	
p	$+\infty$	0	$-\infty$

donc $p(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^{-*}$
 $p(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\textcircled{5} f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot x - \arctan x}{x^2} = \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)} \text{ pour } x \neq 0$$

$$f'(0) = 0 \quad (\text{R.B.3})$$

f et donc C est dérivable et f' est continue

Pour $x \neq 0$, f' est continue comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas), produit et somme de fonctions continues.

Problème en 0: il faut montrer que $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$

On utilise le DL de $\arctan x$

$$f'(x) = \frac{x - (1+x^2)(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3))}{x^2(1+x^2)}$$

$$= \frac{x - [x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) + x^3]}{x^2(1+x^2)} = \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^2(1+x^2)} = \frac{-\frac{2}{3}x + o(x)}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{0}{1} = 0 = f'(0)$$

CQFD

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\nearrow 1$	$\searrow 0$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{-\infty} f(x) = \frac{-\infty}{-\infty} = 0$$

(C1) La fonction f est continue sur \mathbb{R} , donc on peut intégrer sur $[0, 1]$!

$$(C2) \quad |\Omega_n \alpha| = \left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} \right| dt = \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$$

$$\leq \int_0^x t^{2n} dt \quad \text{car } \frac{1}{1+t^2} \leq 1, \quad \forall t \in [0, 1].$$

$$L = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{CQFD}$$

(C3) $1-t^2+t^4 \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2}$ est une somme partielle géométrique de raison $R = -t^2$

$$\text{Donc } 1-t^2 \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} = \frac{1-(-t^2)^n}{1-(-t^2)} = \frac{1-(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}$$

$$x \Delta'_n \alpha = x \left(\sum_0^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} \right)' = x \sum_0^{n-1} (-1)^k \frac{(2k+1) x^{2k}}{(2k+1)^2}$$

$$= x \sum_0^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k+1} = \sum_0^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\text{On dérive: } \left(x \frac{1-t^{2n}}{1+t^2} \right)' = \sum_0^{n-1} (-1)^k x^{2k} = \frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$

$$\text{On intègre: } x \Delta'_n \alpha = \arctan x - \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} dt + c_1$$

$$\text{valeur en } 0: \quad 0 = 0 - 0 + c_1$$

$$\boxed{x \Delta'_n \alpha = \arctan x - \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} dt}$$

$$(C4) \quad \sum_n (1-I) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)^2} - \int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (-1)^k \frac{t^{2k}}{2k+1} dt - \int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^{2k}}{2k+1} - \frac{\arctan t}{t} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(\Delta'_n(t) - \frac{\arctan t}{t} \right) dt = \int_0^1 \frac{t \Delta'_n(t) - \arctan t}{t} dt = \int_0^1 \frac{-\Omega_n(t)}{t} dt$$

$$\textcircled{C4} \text{ suite } \left| \sum_n (1-I) \right| \leq \left| \int_0^1 \frac{1-f(t)}{t} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{1-f(t)}{t} \right| dt = \int_0^1 \frac{|1-f(t)|}{t} dt$$

Avec la Q.C2: $|f_n(t)| \leq \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$, donc

$$\left| \sum_n (1-I) \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1} dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2} \right]_0^1 = \frac{1}{(2n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_n (1-I) = 0$, donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = I}$

$\textcircled{C5}$ pour avoir $\epsilon = 10^{-4}$ par, il faut $\frac{1}{(2n+1)^2} \leq 10^{-4}$
 c-à-d $(2n+1)^2 \geq 10^4 \Leftrightarrow 2n+1 \geq 10^2 \Leftrightarrow 2n \geq 99 \Leftrightarrow n \geq 49,5$

on peut prendre $N = 50$

$\textcircled{C6}$ $S_n(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{1/k}}{(2k+1)^2}$

$\textcircled{C7}$

function $s = S(n)$
 $a = 1$
 for $k = 1 : n-1$ do
 $a = a + \frac{e^{1/k}}{(2k+1)^2}$
 end
 $s = a$
 endfunction

function trouve = f(ϵ)
 $N = 1$
 while $\frac{1}{(2N+1)^2} > \epsilon$ do $N = N+1$
 end
 trouve = N
 endfunction

$\textcircled{C8}$

$\epsilon = 10^{-10}$
 $N = f(\epsilon)$
 $s = S(N)$
 s

(50 000)