

Exo 1:

$$a = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2a}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{2a+1}{2a}}} = \frac{1}{3 + \frac{2a}{2a+1}} = \frac{1}{\frac{3(2a+1) + 2a}{2a+1}} = \frac{2a+1}{9(2a+1) + 2a}$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 11a = 3 + a \Leftrightarrow 4a^2 + 10a - 3 = 0$$

$$\Delta = 100 + 48 = 148 = 4 \times 37$$

$$a = \frac{-10 \pm 2\sqrt{37}}{8} \quad \text{Comme } a > 0: \quad \boxed{a = \frac{2\sqrt{37} - 10}{8}} = \frac{\sqrt{37} - 5}{4}$$

Exo 2: $\frac{-6}{x-3} < x+1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$f(x) = x+1 + \frac{6}{x-3}$. On veut les x tels que $f(x) > 0$

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-3) + 6}{x-3} = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-3}$$

$$\Delta = 4 - 12 < 0 \quad x^2 - 2x + 3 > 0$$

f est du signe de $x-3$. Donc $\mathcal{P} =]3; +\infty[$

Exo 3 $\boxed{1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1}$

Initialisation: Pour $n=1$ $1 = \frac{1 \times 2}{2}$ ok

Hérédité: Je prends un $n > 1$. Je suppose que $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

On ajoute $n+1$:

$$1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{CQFD!}$$

Conclusion: D'après le principe de récurrence:

$$\boxed{\forall n \geq 1, 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Erot: $y'' - 2y' + 5y = 7\cos(2x) + 11\sin(2x)$ ① Eg Homogène

$P(X) = X^2 - 2X + 5$ $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$

les deux racines de P sont: $\frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

Donc $y_H = e^x (A\cos(2x) + B\sin(2x))$ où A et $B \in \mathbb{R}$

② Sol particulière: de la forme $y_P = a\cos(2x) + b\sin(2x)$

$y_P' = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)$; $y_P'' = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x)$

$y_P'' - 2y_P' + 5y_P = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x) + 4a\sin(2x) + 4b\cos(2x) + 5a\cos(2x) + 5b\sin(2x)$

$= (a - 4b)\cos(2x) + (4a + b)\sin(2x) = 7\cos(2x) + 11\sin(2x)$

Donc $\begin{cases} a - 4b = 7 \\ 4a + b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 16b = 28 \\ 4a + b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17b = -17 \\ 4a + b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ 4a = 12 \end{cases}$

$a = 3$ et $b = -1$ $y_P = e^x (3\cos(2x) - \sin(2x))$

③ Sols de l'eq complète: $y = e^x (A\cos(2x) + B\sin(2x) + 3\cos(2x) - \sin(2x))$

④ Concl

Exo 5: $\Delta(X) = X^2 + X - 1 - 3i$

$$\Delta = 1 + 4 + 12i = 5 + 12i = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i 2ab$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \end{cases}$$

$$L_1 + L_3: 2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$L_3 - L_1: 2b^2 = 8 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$|\Delta| \begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \end{cases}$$

$$L_2: a \text{ et } b \text{ ont le m\^eme signe}$$

donc $\Delta = (3+2i)^2$

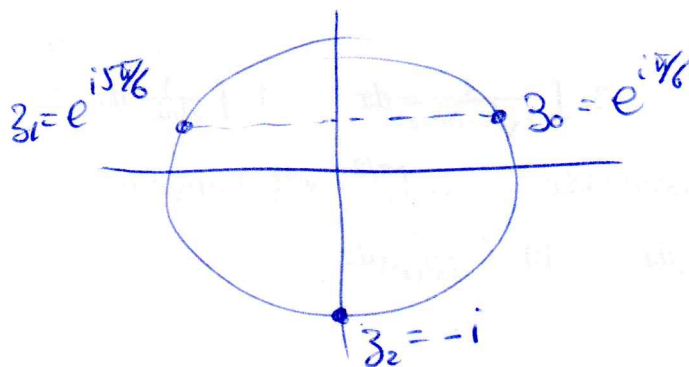
les deux racines de Δ sont $\frac{-1 \pm (3+2i)}{2} = \begin{cases} \frac{2+2i}{2} = 1+i \\ \frac{-4-2i}{2} = -2-i \end{cases}$

donc $\Delta(X) = (X - (1+i))(X - (-2-i)) = \underline{\underline{(X - 1 - i)(X + 2 + i)}}$

Exo 6: les racines cubiques de $i = 1e^{i\pi/2}$ sont les $z_k = \sqrt[3]{1} e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$ où $k=0, 1$ ou 2

$$z_0 = e^{i\pi/6} \quad z_1 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad z_2 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{9\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

On peut les représenter dans le plan complexe:



Exo 7 : $f(x) = (2x+3)e^{1/x}$. En $x \rightarrow 0$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, on peut faire le DL de e^x .

$$f(x) = (2x+3) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

$$= 2x + 2 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + 3 + \frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 5 + 2x + \frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

l'asymptote a pour eq $|y = 5 + 2x|$

la courbe est au dessus car $\frac{4}{x} > 0$

Exo 8 : $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 3y = 0 \}$

• $2 \times 0 - 3 \times 0 = 0 - 0 = 0$, donc $(0,0) \in E$

• Stabilité pour + : Je prends 2 vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y') \in E$

$$\vec{u} + \vec{v} = (x+x', y+y')$$

$$2(x+x') - 3(y+y') = 2x + 2x' - 3y - 3y' = (2x - 3y) + (2x' - 3y')$$

$$= 0 + 0$$

\uparrow car $\vec{u} \in E$ \uparrow car $\vec{v} \in E$

$$= 0 \text{ . Donc } \underline{\vec{u} + \vec{v} \in E}$$

donc $|E \text{ est stable pour +}|$

• Stabilité pour * : Je prends un vecteur $\vec{u}(x,y) \in E$ et $a \in \mathbb{R}$

$$\text{car } \vec{u} = (ax, ay) \quad 2ax - 3ay = a(2x - 3y) = a \times 0 \text{ car } \vec{u} \in E$$

$$= 0 \text{ donc } \underline{a\vec{u} \in E}$$

donc $|E \text{ est stable pour } *|$

E est un sev de \mathbb{R}^2

$$\text{Exo 8: } I = \int \frac{x}{(x^2+1)^3} dx \quad \text{chgt } X = x^2+1 \quad \frac{dX}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dX}{2x}$$

$$\text{Donc } I = \int \frac{x}{X^3} \frac{dX}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dX}{X^3} = \frac{1}{2} \int X^{-3} dX$$

$$I = \frac{1}{2} \frac{X^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4} X^{-2} = -\frac{1}{4X^2}$$

$$I = -\frac{1}{4(x^2+1)^2}$$