

Problème Partie I

(11) \mathcal{D} a pour équation $\boxed{2x + y = 0}$

(12) Un vecteur normal à \mathcal{D} est $\boxed{\vec{n} = (2, 1)}$

Un vecteur directeur de \mathcal{D} est donc $\boxed{\vec{d} = (1, -2)}$

(13) En A: $2 \cdot 2 + 1 = 5 \neq 3$ donc $\boxed{A \notin \mathcal{D}}$

(14) Δ a pour eq paramétrique $\begin{cases} x = 8t + 2 \\ y = t + 1 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

(15) On élimine t : $\boxed{\Delta: x - 2y = 0}$

(16) $B(x_B, y_B) \in \mathcal{D} \cap \Delta$ $\begin{cases} 2x_B + y_B = 3 \\ x_B - 2y_B = 0 \end{cases}$ $2L_1 + L_2: 5x_B = 6 \quad x_B = \frac{6}{5}$ $\boxed{B = (\frac{6}{5}, \frac{3}{5})}$

(17) $\vec{AB} = (\frac{6}{5} - 2, \frac{3}{5} - 1) = (-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$ $\Rightarrow 2y_B = \frac{6}{5} \quad y_B = \frac{3}{5}$ $\|\vec{AB}\| = \frac{1}{5} \sqrt{4^2 + 2^2} = \frac{1}{5} \sqrt{20} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

(18) $\frac{|2x_A + y_A - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|4 + 1 - 3|}{5} = \frac{2}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \|\vec{AB}\| = d(A, \mathcal{D})$

(21) \mathcal{D} a pour eq cartésienne $\boxed{ax + by = 0}$

(22) Un vecteur normal à \mathcal{D} est $\boxed{\vec{n} = (a, b)}$

Un vecteur directeur de \mathcal{D} est $\boxed{\vec{d} = (b, -a)}$

(23) Δ a pour eq paramétrique: $\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

(24) On élimine t : $\boxed{bx - ay = bx_A - ay_A}$

(25) $B(x_B, y_B) \in \mathcal{D} \cap \Delta$ $\begin{cases} ax_B + by_B + c = 0 \\ bx_B - ay_B = bx_A - ay_A \end{cases}$

$aL_1 + bL_2: (a^2 + b^2)x_B = -ac + b^2x_A - aby_A$

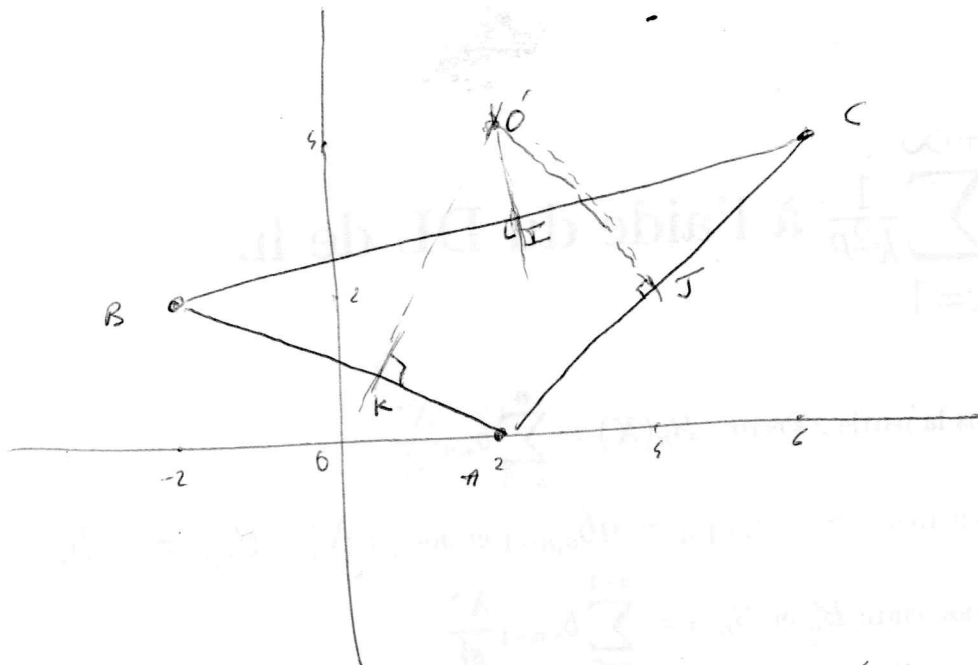
$bL_1 - aL_2: (b^2 + a^2)y_B = -bc + a^2y_A - abx_A$

$$\begin{cases} x_B = \frac{b^2x_A - aby_A - ac}{a^2 + b^2} \\ y_B = \frac{a^2y_A - abx_A - bc}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

(26) $\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} \frac{b^2x_A - aby_A - ac}{a^2 + b^2} - \frac{a^2x_A - b^2x_A}{a^2 + b^2} \\ \frac{a^2y_A - abx_A - bc}{a^2 + b^2} - \frac{a^2y_A - b^2y_A}{a^2 + b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a(ax_A + by_A + c)}{a^2 + b^2} \\ \frac{-b(ax_A + by_A + c)}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$

$$\vec{AB} = \frac{ax_A + by_A + c}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \quad \|\vec{AB}\| = \left| \frac{ax_A + by_A + c}{a^2 + b^2} \right| \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$d(A, \mathcal{D}) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ qd Δ a pour eq $ax + by + c = 0$ (car $\|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|$)



médiatrice de $[B, C]$: milieu de $[B, C]$: $I = \frac{B+C}{2} = \frac{(-2; 6)}{2} = (2, 3)$

$\vec{BC} = (8, 2)$ $\vec{u} \perp \vec{BC}$ est $(-2, 8)$ ou $(-1, 4)$ de pente -4

droite $\Delta(BC)$: $y = -4x + b$. Elle passe par $I(2, 3)$, donc $3 = -8 + b \Rightarrow b = 11$

$y = -4x + 11$ $4x + y = 11$ (M_1)

médiatrice de $[A, B]$: milieu de $[A, B]$: $K = \frac{A+B}{2} = \frac{(2; 2)}{2} = (0, 1)$

$\vec{AB} = (-4, 2)$ $\vec{u} \perp \vec{AB}$ est $(2, 4)$ ou $(1, 2)$ de pente 2

droite $\Delta(AB)$: $y = 2x + b$. Elle passe par $K(0, 1)$, donc $1 = b$

$y = 2x + 1$ $-2x + y = 1$ (M_2)

médiatrice de $[A, C]$: milieu de $[A, C]$: $J = \frac{(2; 4)}{2} = (1, 2)$

$\vec{AC} = (4, 4)$ $\vec{u} \perp \vec{AC}$ est $(-1, 1)$ de pente -1

droite $\Delta(AC)$: $y = -x + b$. Elle passe par $J(1, 2)$, donc $2 = -1 + b \Rightarrow b = 3$

$y = -x + 3$ $x + y = 3$ (M_3)

Intersection de (M_2) et (M_3) :

$$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} l_2 - l_1: 3x &= 5 & x &= \frac{5}{3} \\ \Rightarrow l_2: y &= 3 - \frac{5}{3} = \frac{9-5}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$O' = \left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}\right)$

droite (AB) : pente $-\frac{1}{2}$: $y = -\frac{1}{2}x + b$. Elle passe par A : $0 = -1 + b \Rightarrow b = 1$

(AB) : $y = -\frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + y - 1 = 0$ $x + 2y - 2 = 0$ (AB)

$d(O', (AB)) = \frac{|x_0 + 2y_0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\left|\frac{5}{3} + 2 \cdot \frac{13}{3} - 2\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{31-6}{3}}{\sqrt{5}} = \frac{25}{3\sqrt{5}} = \frac{25\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$

Vérif: $\vec{O'K} = \left(\frac{5}{3}; -\frac{10}{3}\right)$ $\|\vec{O'K}\| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{5}{3} \sqrt{1+2^2} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ OK!

Partie II (31) \mathcal{L} a pour eq cartésienne : $2x + y - z = 0$

(32) Un vecteur normal à \mathcal{L} est $\vec{n} = (2; 1; -1)$

Deux vecteurs directeurs de \mathcal{L} sont $\vec{u} = (1; -2; 0)$ et $\vec{v} = (0; 1; 1)$

(33) En A : $2x_A + y_A - z_A = 2 \cdot 2 + 1 - 4 = 1 \neq 2$, donc $A \notin \mathcal{L}$

(34) $\Delta \perp \mathcal{L}$ a pour vecteur directeur $\vec{w} \quad \Delta \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = -t + 4 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

(35) $B(x_B; y_B; z_B) \in \Delta \cap \mathcal{L}$: $\begin{cases} x_B = 2t + 2 \\ y_B = t + 1 \\ z_B = -t + 4 \end{cases}$
 $2x_B + y_B - z_B = 2 \Rightarrow 4t + 4 + t + 1 + t - 4 = 2 \Rightarrow 6t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{6}$

$$x_B = \frac{2}{6} + 2 = \frac{14}{6}; \quad y_B = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6}; \quad z_B = -\frac{1}{6} + 4 = \frac{23}{6} \quad \boxed{B = \left(\frac{14}{6}; \frac{7}{6}; \frac{23}{6}\right)}$$

(36) $\vec{AB} = \left(\frac{14}{6} - 2; \frac{7}{6} - 1; \frac{23}{6} - 4\right) = \left(\frac{2}{6}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{6}\right)$

$$\|\vec{AB}\| = \frac{1}{6} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

(37) $\frac{|2x_A + y_A - z_A - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|4 + 1 - 4 - 2|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} = \|\vec{AB}\| = d(A, \mathcal{L})$

(41) \mathcal{L} a pour eq cartésienne : $ax + by + cz = 0$

(42) Un vecteur normal à \mathcal{L} est $\vec{n} = (a; b; c)$

Deux vecteurs directeurs de \mathcal{L} sont $(-b; a; 0)$ et $(-c; 0; a)$ par exemple

(43) $\Delta \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

(44) $B(x_B; y_B; z_B) \in \mathcal{L} \cap \Delta$: $a(at + x_A) + b(bt + y_A) + c(ct + z_A) = 0$

$$(a^2 + b^2 + c^2)t + ax_A + by_A + cz_A = 0 \quad t_B = \frac{-d \cdot ax_A - by_A - cz_A}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$x_B = a \frac{-d \cdot ax_A - by_A - cz_A}{a^2 + b^2 + c^2} + x_A \quad y_B = b \frac{-d \cdot ax_A - by_A - cz_A}{a^2 + b^2 + c^2} + y_A \quad z_B = c \frac{-d \cdot ax_A - by_A - cz_A}{a^2 + b^2 + c^2} + z_A$$

(45) $\vec{AB} = \frac{-d \cdot ax_A - by_A - cz_A}{a^2 + b^2 + c^2} (a; b; c)$ et $\|\vec{AB}\| = \left| \frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

(46) qd \mathcal{L} a pour eq $ax + by + cz + d = 0$: $d(A, \mathcal{L}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$$(61) \vec{AH} = (1+2t-2; 3-t-3; 2+3t+1) = (2t-1; -t; 3t+3)$$

$$AH = \|\vec{AH}\| = \sqrt{(2t-1)^2 + (-t)^2 + (3t+3)^2} = \sqrt{4t^2 - 4t + 1 + t^2 + 9t^2 + 18t + 9} = \sqrt{14t^2 + 14t + 10} = f(t)$$

$$(62) f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{14t^2+14t+10}} (28t+14)$$

$\Delta < 0$ pas de problème
 $D_f = \mathbb{R}$

$$f' \text{ s'annule quand } t = -\frac{14}{28} = -\frac{1}{2}$$

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$		\searrow	\nearrow

$$AH = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{14\left(\frac{1}{4}\right) + 14\left(\frac{1}{2}\right) + 10} = \sqrt{\frac{7+14+20}{2}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$\boxed{AH = \sqrt{\frac{13}{2}}}$$

(71) Un vecteur normal à \mathcal{D} est $\vec{n} = (2; -1; 3)$. (c'est un vecteur directeur de \mathcal{D} car $\mathcal{D} \perp \mathcal{H}$)

Donc \mathcal{D} a pour eq cartésienne : $2x - y + 3z = d$

$$\text{En A : } 2 \cdot 2 - 3 - 3 = 4 - 6 = -2 = d$$

$$\boxed{\mathcal{D} : 2x - y + 3z + 2 = 0}$$

$$(72) H \in \mathcal{D} \cap \mathcal{H}$$

$$\begin{cases} x_H = 1 + 2t_H \\ y_H = 3 - t_H \\ z_H = 2 + 3t_H \\ 2x_H - y_H + 3z_H + 2 = 0 \end{cases}$$

$$2 + 4t_H - 3 + t_H + 6 + 9t_H + 2 = 0$$

$$14t_H + 7 = 0 \quad t_H = -\frac{7}{14} = -\frac{1}{2}$$

$$H = (1 + 2(-\frac{1}{2}); 3 - (-\frac{1}{2}); 2 + 3(-\frac{1}{2})) = \left(0; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right) = H$$

$$(73) d(A, \mathcal{D}) = AH \quad \vec{AH} = (-2; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}) \quad \|\vec{AH}\| = \sqrt{4 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$(82) \vec{u} = (2; -1; 3)$$

$$(81) \vec{AH} = (1 + 2t_H - 2; 3 - t_H - 3; 2 + 3t_H + 1) = (2t_H - 1; -t_H; 3t_H + 3)$$

$$(83) \vec{u} \cdot \vec{AH} = (2; -1; 3) \cdot (2t_H - 1; -t_H; 3t_H + 3) = 4t_H - 2 - t_H + 9t_H + 9 = 14t_H + 7$$

$$(84) \vec{u} \cdot \vec{AH} = 0 \text{ car } \mathcal{D} \perp (\mathcal{AH}).$$

$$\text{Donc } t_H = -\frac{7}{14} = -\frac{1}{2} \text{ et donc } H = \left(0; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{On retrouve alors } \|\vec{AH}\| = \sqrt{\frac{13}{2}}$$