

Problème

① $E(\sqrt{19}) = E(3,4) = 3$ $E(\sqrt{19}) = ?$
 $4^2 = 16 < 19 < 25 = 5^2$, donc $4 < \sqrt{19} < 5$, donc $E(\sqrt{19}) = 4$

②

44
44
176
176
1936

$44^2 = 1936$

45
45
225
180
2025

$45^2 = 2025$

$44^2 = 1936 < 2022 < 2025 = 45^2$, donc $44 < \sqrt{2022} < 45$

donc $E(\sqrt{2022}) = 44$

③. Si x est un entier, alors $x - \text{frac}(x) = 0$. Il ne faut pas diviser par 0.

• $f(3,7) = \frac{1}{3 \cdot 7 - 3} = \frac{1}{9 \cdot 7} = \frac{10}{7} \approx 1,42857$ $E(f(3,7)) = 1$

• $f(f(3,7)) = \frac{1}{\frac{10}{7} - 1} = \frac{1 \cdot 7}{(\frac{10}{7} - 1) \cdot 7} = \frac{7}{10 - 7} = \frac{7}{3} \approx 2,3333$

• $f(f(f(3,7))) = \frac{1}{\frac{7}{3} - 2} = \frac{3}{7 - 6} = 3$

• $f(f(f(f(3,7))))$ est un entier, donc on ne peut pas continuer

④ $f(\sqrt{2022}) = \frac{1}{\sqrt{2022} - 44} = \frac{\sqrt{2022} + 44}{(\sqrt{2022} - 44)(\sqrt{2022} + 44)} = \frac{\sqrt{2022} + 44}{2022 - 1936}$

$$\begin{array}{r} 2022 \\ -1936 \\ \hline 086 \end{array}$$

$f(\sqrt{2022}) = \frac{\sqrt{2022} + 44}{86}$

$44 < \sqrt{2022} < 45$, donc $\frac{44 + 44}{86} < f(\sqrt{2022}) < \frac{45 + 44}{86}$

$\Rightarrow \frac{88}{86} < f(\sqrt{2022}) < \frac{89}{86}$, donc $E(f(\sqrt{2022})) = 1$

$$⑤ a = f\left(f\left(\sqrt{2022}\right)\right) = f\left(\frac{\sqrt{2022+44}}{86}\right) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2022+44}}{86} - 1}$$

On multiplie par 86:
en haut et en bas

$$a = \frac{86}{\sqrt{2022+44} - 86} = \frac{86}{\sqrt{2022} - 42}$$

On multiplie par $\sqrt{2022} + 42$:
en haut et en bas

$$a = \frac{86(\sqrt{2022} + 42)}{2022 - 42^2} = \frac{86(\sqrt{2022} + 42)}{2022 - 1764}$$

$$\begin{array}{r} 2022 \\ 1764 \\ \hline 258 \end{array}$$

$$a = \frac{86(\sqrt{2022} + 42)}{258} = \frac{\cancel{86}(\sqrt{2022} + 42)}{3 \times \cancel{86}}$$

$$f\left(f\left(\sqrt{2022}\right)\right) = \frac{\sqrt{2022} + 42}{3} = a$$

$$⑥ b = f\left(f\left(f\left(\sqrt{2022}\right)\right)\right) = f(a) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2022} + 42}{3} - 28} = \frac{3}{\sqrt{2022} + 42 - 84}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2022} + 42}{3} \approx \frac{44 + 42}{3} = \frac{86}{3} \approx 28.67, \text{ donc } E(a) = 28\right)$$

$$b = \frac{3}{\sqrt{2022} - 42} = \frac{3(\sqrt{2022} + 42)}{2022 - 1764} = \frac{3(\sqrt{2022} + 42)}{258} = \frac{\sqrt{2022} + 42}{86}$$

$$⑦ c = f(b) = \frac{1}{b - E(b)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2022} + 42}{86} - 1} = \frac{86}{\sqrt{2022} + 42 - 86} = \frac{86}{\sqrt{2022} - 44}$$

$$c = \frac{86(\sqrt{2022} + 44)}{2022 - 44^2} = \frac{86(\sqrt{2022} + 44)}{2022 - 1936} = \frac{(\sqrt{2022} + 44) \cancel{86}}{\cancel{86}} = \sqrt{2022} + 44$$

$E(c) = 44 + 44 = 88$

$$⑧ d = f(c) = \frac{1}{c - E(c)} = \frac{1}{\sqrt{2022} + 44 - 88} = \frac{1}{\sqrt{2022} - 44}$$

$$d = \frac{\sqrt{2022} + 44}{2022 - 44^2} = \frac{\sqrt{2022} + 44}{86} = f\left(\sqrt{2022}\right)$$

⑨ Si x n'est pas un entier, alors $E(x) < x < E(x) + 1$

Donc $0 < x - E(x) < 1$. On divise par $x - E(x)$:

$$0 < 1 < \frac{1}{x - E(x)} = f(x). \quad \text{Donc } \boxed{f(x) > 1}$$

$$(10) \quad x_0 = \sqrt{2022} \quad x_1 = \frac{\sqrt{2022} + 44}{86} \quad x_2 = \frac{\sqrt{2022} + 42}{3}$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{2022} + 42}{86} \quad x_4 = \sqrt{2022} + 44 \quad x_5 = \frac{\sqrt{2022} + 44}{86} = x_1$$

Comme $x_5 = x_1$, $x_6 = x_2$, $x_7 = x_3$, ...

$$(11) \quad y_0 = 44 \quad y_1 = 1 \quad y_2 = 28 \quad y_3 = 1 \quad y_4 = 88$$

puis $y_5 = y_1$, $y_6 = y_2$, ...

$$(12) \quad x_2 = \frac{1}{x_1 - y_1} = \frac{1}{\frac{1}{x_0 - y_0} - y_1} = \frac{1}{\frac{1}{x_0 - y_0} - y_1} = \frac{x_0 - y_0}{1 - (x_0 - y_0)y_1} = \frac{x_0 - y_0}{1 - x_0 y_1 + x_0 y_0} = x_2$$

$$\text{et } x_1 = \frac{1}{x_0 - y_0}$$

$$\bullet \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n - y_n}$$

On multiplie par $x_n - y_n$: $x_{n+1}(x_n - y_n) = 1$

$$\Rightarrow x_{n+1} x_n - x_{n+1} y_n = 1 \Rightarrow x_{n+1} x_n = 1 + x_{n+1} y_n = x_{n+1} y_n + 1$$

On divise par x_{n+1} :

$$x_n = y_n + \frac{1}{x_{n+1}}$$

$$(13) \quad \text{pour } k \geq 1, \quad x_k = f(x_{k-1}) > 1 \quad (\text{Q9})$$

$$\text{donc } y_k \geq 1$$

$$\bullet \quad q_0 = 1 \quad q_1 = y_1 \geq 1, \text{ et pour } n \geq 2, \quad q_n = q_{n-1} y_n + q_{n-2} \geq q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1}$$

Donc la suite $(q_n)_{n \geq 0}$ est croissante, et comme $q_0 = 1$, q_n ne s'annule jamais

$$\Rightarrow q_n \geq q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1}, \text{ donc la suite } (q_n)_{n \geq 0} \text{ est strictement croissante}$$

(14) $q_0 = 1$; $q_1 = y_1 \geq 1$ (d.B) $q_2 = q_1 y_2 + q_0 \geq q_1 + 1$ car $y_2 \geq 1$ et $q_0 = 1$
 ≥ 2 car $q_1 \geq 1$

$q_3 = q_2 y_3 + q_1 \geq q_2 + q_1 \geq 2 + 1 = 3$

Initialisation: la forme $q_n \geq n$ est vraie pour $n = 0, 1, 2$ et 3

Hérédité: Je prend un $n \geq 3$. Si $q_n \geq n$.

Alors $q_{n+1} = q_n y_{n+1} + q_n \geq n \cdot 1 + n - 1 = 2n - 1 = (n+1) + (n-2) \geq n+1$ ok

Conclusion: D'après le principe de récurrence: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, q_n \geq n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty}$

(15) $\frac{p_1 x_2 + p_0}{q_1 x_2 + q_0} = \frac{p_1 \frac{x_0 - y_0}{1 - x_0 y_1 + y_0 y_1} + p_0}{q_1 \frac{x_0 - y_0}{1 - x_0 y_1 + y_0 y_1} + q_0}$ On multiplie en haut et en bas par $1 - x_0 y_1 + y_0 y_1$

$= \frac{p_1 (x_0 - y_0) + p_0 (1 - x_0 y_1 + y_0 y_1)}{q_1 (x_0 - y_0) + q_0 (1 - x_0 y_1 + y_0 y_1)}$ On remplace p_1 par $y_0 y_1 + 1$ et q_1 par y_1 p_0 par y_0 et q_0 par 1

$= \frac{(y_0 y_1 + 1)(x_0 - y_0) + y_0 (1 - x_0 y_1 + y_0 y_1)}{y_1 (x_0 - y_0) + (1 - x_0 y_1 + y_0 y_1)}$
 $= \frac{x_0 y_0 y_1 + x_0 - y_0^2 y_1 - y_0 + y_0 - x_0 y_0 y_1 + y_0^2 y_1}{x_0 y_1 - y_0 y_1 + 1 - x_0 y_1 + y_0 y_1} = \frac{x_0}{1} = x_0 = z$ CQFD

Initialisation: pour $n = 2$, c'est ce qu'on vient de faire

Hérédité: Je prend un $n \geq 2$. Je suppose que $x = \frac{p_{n-1} x_n + p_{n-2}}{q_{n-1} x_n + q_{n-2}}$

On calcule dans: $x = \frac{p_{n-1} (y_n + \frac{1}{x_{n+1}}) + p_{n-2}}{q_{n-1} (y_n + \frac{1}{x_{n+1}}) + q_{n-2}}$

$x = \frac{p_{n-1} y_n x_{n+1} + p_{n-1} + p_{n-2} x_{n+1}}{q_{n-1} y_n x_{n+1} + q_{n-1} + q_{n-2} x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} (p_{n-1} y_n + p_{n-2}) + p_{n-1}}{x_{n+1} (q_{n-1} y_n + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \frac{x_{n+1} p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} q_n + q_{n-1}}$ CQFD

Conclusion: D'après le principe de récurrence: $\boxed{\forall n \geq 2, x = \frac{p_{n-1} x_n + p_{n-2}}{q_{n-1} x_n + q_{n-2}}}$

(16) pour $n=2$: $p_1 q_0 - p_0 q_1 = (y_0 y_1 + 1) 1 - y_0 y_1 = 1 = (-1)^2$ ok

Hérédité: Je prends un $n \geq 2$. Je suppose que $p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1} = (-1)^n$

Calculons $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}$ (il faut montrer que ça vaut $(-1)^{n+1}$)

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} &= (p_{n-1} y_n + p_{n-2}) q_{n-1} - (q_{n-1} y_n + q_{n-2}) p_{n-1} \\ &= p_{n-1} q_{n-1} y_n + p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-1} y_n - p_{n-1} q_{n-2} = - (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) \\ &= - (-1)^n = (-1)^{n+1} \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Conclusion: $\forall n \geq 2 \quad p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1} = (-1)^n$

(17) Du coup $\boxed{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}}$

(18) $c_n - c_{n-1} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n-1}}$

(19) $x - c_n = \frac{p_{n-1} x_n + p_{n-2}}{q_{n-1} x_n + q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} x_n + p_{n-2}}{q_{n-1} x_n + q_{n-2}} - \frac{p_{n-1} y_n + p_{n-2}}{q_{n-1} y_n + q_{n-2}}$

$$= \frac{(p_{n-1} x_n + p_{n-2})(q_{n-1} y_n + q_{n-2}) - (p_{n-1} y_n + p_{n-2})(q_{n-1} x_n + q_{n-2})}{(q_{n-1} x_n + q_{n-2})(q_{n-1} y_n + q_{n-2})} \quad \leftarrow D$$

$$= \frac{p_{n-1} q_{n-1} x_n y_n + p_{n-1} q_{n-2} x_n + p_{n-2} q_{n-1} y_n + p_{n-2} q_{n-2}}{(q_{n-1} x_n + q_{n-2})(q_{n-1} y_n + q_{n-2})} - \frac{(p_{n-1} q_{n-1} x_n y_n + p_{n-2} q_{n-1} x_n + p_{n-1} q_{n-2} y_n + p_{n-2} q_{n-2})}{(q_{n-1} x_n + q_{n-2})(q_{n-1} y_n + q_{n-2})}$$

$$= \frac{x_n [p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}] + y_n [p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2}]}{D}$$

et $p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1} = (-1)^n = 1$ D'après la Q17 ou 16
le deuxième crochet vaut donc -1

Ainsi $\boxed{x - c_n = \frac{x_n - y_n}{D}}$

$y_n = E(x_n) < x_n$, donc

$x_n - y_n > 0$, de même que D

Donc $x - c_n > 0$

ce qui donne $\boxed{c_n < x}$

$$\textcircled{20} \quad |x - c_n| < |c_{n+1} - c_n| = \left| \frac{c_1^{n+1}}{q_{n+1} q_n} \right| = \frac{1}{q_{n+1} q_n}$$

De plus $q_{n+1} < q_n$, donc $\frac{1}{q_{n+1} q_n} < \frac{1}{q_n^2}$. donc, $\boxed{|x - c_n| < \frac{1}{q_n^2}}$

Comme $q_n \rightarrow +\infty$: $|x - c_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Donc la suite (c_n) CV vers x

$\textcircled{21}$ • $|pq_n - q_p n|$ est un entier positif car p, q, p_n et q_n sont des entiers.

Il est non nul, car sinon $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$.

Un entier > 0 est toujours ≥ 1

$$\cdot \left| \frac{p}{q} - c_n \right| = \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{|pq_n - q_p n|}{q q_n} \geq \frac{1}{q q_n}$$

Donc $\frac{1}{q q_n} \leq \left| \frac{p}{q} - c_n \right| < \frac{1}{q_n^2} \Rightarrow \frac{1}{q q_n} < \frac{1}{q_n^2} \Rightarrow q_n^2 < q q_n \quad \boxed{q_n \leq q}$

$\textcircled{22}$ $x_0 = \pi \Rightarrow \boxed{y_0 = 3}$ $x_1 = \frac{1}{\pi - 3} \approx \frac{1}{3.14 - 3} \approx \frac{1}{0.14} \approx 7^+$

$1 \overline{) 9^{14}}$ $\frac{100}{98} \overline{) \frac{14}{7}}$ donc $\boxed{y_1 = 7}$

$p_1 = y_0 y_1 + 1 = 21 + 1 = 22$ $q_1 = y_1 = 7$ $\boxed{C_1 = \frac{22}{7}}$

Autrement $y_2 = 15$ $p_2 = 333$ et $q_2 = 106$ donc $\boxed{C_2 = \frac{333}{106}}$

■