

TD 2 : Étude de fonctions et itération

Antoine FRENOY

Pierre GRUET

13 et 20 octobre 2010

1 Rappels du TD 1

- Définissez et tracez la fonction $x \mapsto e^{\tan(x)}$ sur $[-\frac{2\pi}{5}; \frac{2\pi}{5}]$.
- Trouvez les solutions réelles et complexes (en coordonnées cartésiennes) de l'équation

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

- Donnez ces solutions en coordonnées polaires.

2 Fonctions définies par morceaux

1. Utilisez la fonction `piecewise` pour définir sur $[0; 3]$ la fonction suivante : $f : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$
2. Définissez la fonction valeur absolue sur \mathbb{R} .
3. Tracez cette fonction et la fonction partie entière sur le même graphe (utilisez `floor`).
4. Définissez et tracez sur \mathbb{R} la fonction $h : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ prolongée par continuité en 0.

3 Dérivées

1. Indiquez la différence entre les deux déclarations suivantes :
`f := x -> 3*x+1`
`f := 3*x+1`
2. Calculez la dérivée de $i : x \mapsto \sin(3 * x + \sqrt{x^2 + 1})$ de deux façons différentes (utilisez `D` et `diff`).
3. Calculez la dérivée de $j : x \mapsto \frac{x^2 - 2x}{x^2 + x + 1}$. En quel point est atteint le minimum global de j ?
4. Calculez la dérivée l de $k : x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}$. Tracez l et donnez sa limite à l'infini.
5. Calculez la dérivée cinquième de $m : x \mapsto \sin^5(x)$. Linéarisez. Calculez à nouveau la dérivée cinquième en commençant par linéariser.

4 Extrema, changements de signe, comportement à l'infini et symétries

Soit f définie sur \mathbb{R}^{+*} par $f : x \mapsto \frac{x * \sqrt{x^2 + 5}}{1 + x^2}$:

- Trouvez les zéros de f
- Trouvez les extrema de f

- Donnez le comportement à l'infini de f (limites? asymptotes?)
- Dressez le tableau de variations de f
- Étudiez la symétrie de f .

Mêmes questions pour les fonctions suivantes :

1. $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2 * x^2 + 4}$
2. $h : x \mapsto \ln(x) * x^{\frac{1}{x}}$ définie sur \mathbb{R}^{+*} .

5 Boucles itératives

1. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
 - $u_0 = 0$
 - $u_{n+1} = 2 * u_n + n - 1$
 Calculez le dixième, trentième et cent-millième terme de (U_n) de deux façons différentes (avec et sans Maple). N'utilisez pas `sum`, regardez plutôt du côté de `for`.

2. Soit $f : x \mapsto -x^2 + 5 * x - 3$. Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
 - $v_0 \in [0; 1]$
 - $v_{n+1} = f(v_n)$
 Étudiez le comportement de (V_n) à l'infini selon la valeur de v_0 . Utilisez deux méthodes différentes, avec et sans Maple.