

## TD 10 : Matrices et applications linéaires

Antoine FRÉNOY

Pierre GRUET

16 et 30 mars 2011

### Exercice 1 : Un projecteur dans un espace vectoriel de dimension 5

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension 5. Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  $f$  un endomorphisme de  $E$ , représenté dans  $e$  par :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -1 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Posons  $I = \text{Im}(f)$  et  $K = \text{Ker}(f)$ . Nous allons étudier  $f$  à l'aide des fonctions `&*`, `colspace`, `inverse`, `nullspace`, `rank`, `solve` et `transpose`.

1. Montrez que  $f$  est un projecteur de  $E$  sur  $I$  parallèlement à  $K$ .
2. Quel est son rang ?
3. Trouvez et exprimez dans  $e$  une base  $i$  de  $I$  et une base  $j$  de  $J$ .
4. En déduire une base  $e'$  de  $E$  dans laquelle  $f$  à une écriture canonique. Trouvez  $C$  la matrice de changement de base de  $e$  vers  $e'$ .
5. Trouvez alors  $C'$  la matrice de changement de base de  $e'$  vers  $e$ .
6. Vérifiez alors l'écriture de  $f$  dans cette base  $e'$ .

### Exercice 2 : Rang d'une matrice de taille 4

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Posons  $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & a & -a-2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

À l'aide de la commande `solve`, déterminez le rang de  $M$  selon la valeur de  $a$ . Donnez une base et la dimension de  $\ker(M)$  dans chaque cas. Dans quels cas  $M$  est-elle inversible ?

### Exercice 3 : Commutant d'une matrice de taille 3

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Posons  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Notons  $S$  l'ensemble des matrices qui commutent avec  $A$ . Montrez que  $S$  est un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$ . Discutez la dimension de  $S$  selon  $a$ . Donnez une base de  $S$  dans chacun des cas.

### Exercice 4 : Une suite récurrente linéaire d'ordre 3

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = 3$ ,  $u_1 = 10$ ,  $u_2 = 6$ , et  $u_{n+3} = -8 * u_n - 2 * u_{n+1} + 5 * u_{n+2}$ . On cherche dans la suite de cet exercice l'expression du terme général de  $(u_n)$  en fonction de  $n$ .

- Êtes vous capable d'exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  uniquement en vous aidant de vos connaissances en arithmétique ? Prenez quelques minutes et laissez libre cours à votre imagination !

- Posons la suite matricielle  $(U_n)$  définie par  $U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix}$ .

Donnez  $U_0$  et trouvez la matrice  $A$  telle que  $U_{n+1} = A * U_n$ .

- Déduisez en l'expression générale de  $U_n$  en fonction de  $A$  et de  $U_0$ .

On cherche alors à exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$  uniquement, ce qui suffit à terminer l'exercice. La difficulté est d'exprimer  $A^n$ .

Considérez pour cela la base  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  formée des vecteurs  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}$ , et  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Considérons  $A$  comme la matrice d'un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans la base canonique  $C$ .

- Écrivez la matrice  $P$  de changement de base depuis la base  $C$  vers la base  $B$ . Quelle est alors la matrice de changement de base depuis la base  $B$  vers la base  $C$  ?
- Écrivez  $D$  la matrice de  $f$  dans cette base  $B$ .
- Quelle est alors l'expression de  $A$  en fonction de  $D$ ,  $P$  et  $P^{-1}$  ?
- Déduisez en une expression de  $A^n$  en fonction de  $n$
- Tirez en l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .