

Master 1 de Physique Fondamentale
Magistère de Physique Fondamentale (Mag2)
2018-2019

Cours d'Optique (première partie)

J. LEYGNIER

LES BASES DE L'ETUDE DE LA DIFFRACTION

DIFFRACTION DE FRAUNHOFER

IMAGERIE EN LUMIERE COHERENTE

OPTIQUE DE FOURIER

HOLOGRAPHIE

Table des matières

1	LES BASES DE L'ETUDE DE LA DIFFRACTION	5
1.1	L'approximation de l'optique géométrique et ses limites	6
1.1.1	Rayons lumineux - Réflexion et réfraction	6
1.1.2	Image par un système optique	7
1.1.3	Exemple : image par une lentille	9
1.1.4	Exemples de limites de l'optique géométrique	11
1.2	Les bases du formalisme ondulatoire	12
1.2.1	Amplitude, amplitude complexe, intensité	12
1.2.2	Ondes cohérentes - ondes incohérentes	13
1.2.3	Ondes planes et ondes sphériques, approche qualitative	14
1.2.4	Lien entre formalisme ondulatoire et optique géométrique	15
1.3	Notion de chemin optique. Applications	16
1.3.1	Variation de la phase	16
1.3.2	Variation de l'amplitude complexe	18
1.3.3	Exemple : application à l'analyse d'un système optique	18
1.4	Le phénomène de diffraction	19
1.4.1	Problème des conditions aux limites : Facteur de transmission d'un système optique	20
1.4.2	Exemple : lame à faces parallèles ; généralisation	21
1.4.3	Problème de la propagation d'une onde lumineuse	23
1.4.4	Formules de Fresnel pour la diffraction	24
1.5	Exemples d'applications	26
1.5.1	Faisceaux gaussiens	26
1.5.2	Diffraction dans le plan de formation de l'image d'une source	28
1.5.3	Synthèse des résultats à retenir	31
1.6	Annexes	31
1.6.1	Onde sphérique	31
1.6.2	Onde plane homogène	32
1.6.3	Généralisation du lien entre formalisme ondulatoire et optique géométrique	33
1.6.4	Le phénomène de diffraction : modèle de Huygens-Fresnel	35
1.6.5	Démonstration de la formule de Fresnel	35
1.6.6	Facteur de transmission d'une lentille mince - géométrie de la lentille	38
1.6.7	Interprétation physique pour la diffraction par un trou	40
2	DIFFRACTION DE FRAUNHOFER	41
2.1	Diffraction de Fraunhofer par des diaphragmes simples	43
2.1.1	Diaphragme circulaire	43
2.1.2	Fente rectangulaire	45
2.1.3	Généralisation	47
2.2	Propriétés générales	48
2.2.1	Translation du diaphragme dans son plan	48
2.2.2	Source située hors de l'axe	48
2.2.3	Source à distance infinie	50
2.2.4	Décalage du diaphragme suivant l'axe de la lentille	52
2.2.5	Dilatation du diaphragme	52
2.2.6	Conservation de la puissance lumineuse	53
2.3	Diffraction par un réseau	53
2.3.1	Réseau par transmission	53
2.3.2	Montage - Amplitude diffractée	54
2.3.3	Intensité dans le plan de Fraunhofer	55
2.4	Limite de résolution d'un instrument d'optique	56
2.4.1	Critère de Rayleigh	56
2.4.2	Résolution pour un télescope	58
2.4.3	Résolution de l'oeil	59
2.4.4	Résolution d'un spectroscope à prisme	59
2.5	Commentaires physiques	60
2.5.1	Diffraction et interférences	60

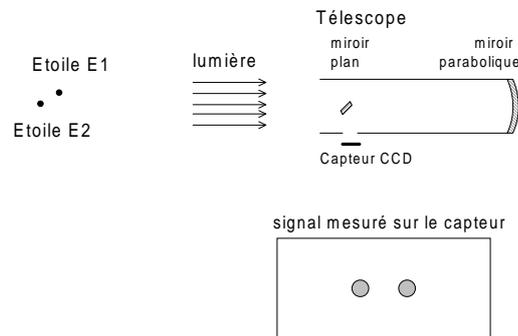
2.5.2	Système optique à plusieurs diaphragmes ou plusieurs lentilles	61
2.5.3	Divergence d'un faisceau parallèle transmis par un diaphragme	62
2.5.4	Diffraction à grande distance	62
2.5.5	Analogie physique avec l'incertitude de Heisenberg	63
2.6	Annexes	64
2.6.1	Calcul de l'amplitude diffracté pour un diaphragme décalé suivant l'axe de la lentille	64
2.6.2	Optique adaptative	65
2.6.3	Table de Transformées de Fourier	66
2.6.4	Séries de Fourier	68
3	IMAGERIE EN LUMIERE COHERENTE - OPTIQUE DE FOURIER - HOLOGRAPHIE	69
3.1	Notion de fréquence spatiale	70
3.1.1	Objet périodique	70
3.1.2	Fréquences spatiales d'un objet non périodique	71
3.2	Filtrage des fréquences spatiales	72
3.2.1	Principe	72
3.2.2	Exemples qualitatifs	74
3.2.3	Dispositifs expérimentaux pour le filtrage des fréquences spatiales - Illustrations expérimentales	78
3.2.4	Exemple quantitatif : filtrage des fréquences spatiales d'un réseau	80
3.2.5	Formule générale du filtrage	83
3.3	Exemples d'applications du filtrage des fréquences spatiales	83
3.3.1	Strioscopie	83
3.3.2	Filtrage passe-haut d'un bord d'écran	85
3.3.3	Généralisation de la notion à des images numérisées ou à un signal sonore	86
3.4	Principe de l'holographie	86
3.4.1	Enregistrement photographique	86
3.4.2	Observation en lumière cohérente	87
3.4.3	Enregistrement d'un hologramme	87
3.4.4	Lecture d'un hologramme	87
3.4.5	Conditions d'enregistrement	88
3.5	Annexes	89
3.5.1	Notion de fréquences spatiales définie par l'exemple d'un prisme	89
3.5.2	Calcul de la formation d'une image à partir du spectre de ses fréquences spatiales	90

Chapitre 1

LES BASES DE L'ETUDE DE LA DIFFRACTION

Introduction

Un télescope est pointé vers deux étoiles de directions voisines pour en former l'image sur un capteur CCD.

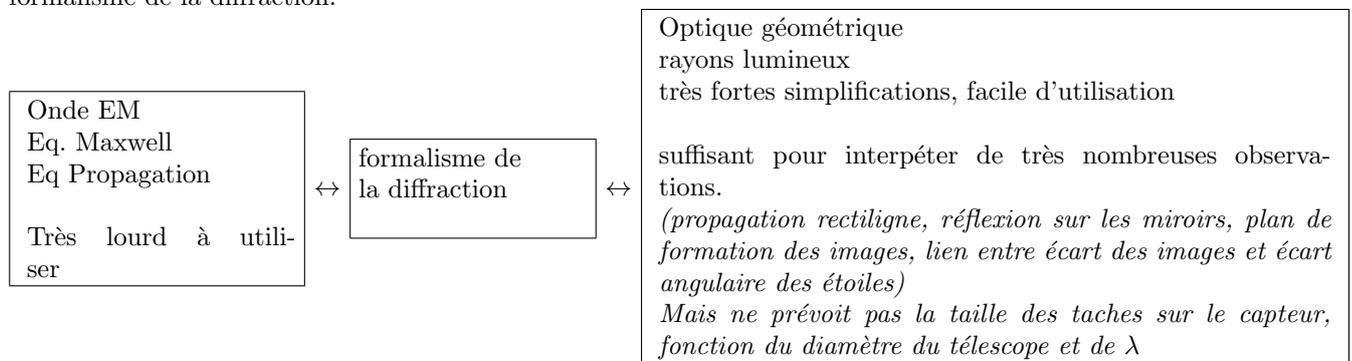


Comment, à partir de la lumière reçue sur le capteur peut-on déduire le maximum d'informations sur les étoiles elles-mêmes ?

La lumière est une onde électromagnétique, sa propagation est décrite par les équations de Maxwell. Il faudrait les résoudre en tout point de l'espace entre les étoiles, le télescope et le capteur.

On peut se contenter d'une description beaucoup plus simple de la propagation de la lumière en terme de rayons lumineux, c'est le modèle de l'optique géométrique. Il convient parfaitement pour décrire la propagation de la lumière dans le vide, dans l'air, au niveau des miroirs du télescope, permet de prévoir où se formeront des images des deux étoiles, et de relier la distance entre les points lumineux sur le capteur à l'écart angulaire des étoiles.

Par contre, l'optique géométrique ne permet pas d'interpréter la taille des taches lumineuses obtenues sur le capteur, l'expérience montre qu'elles sont fonction des caractéristiques géométriques du télescope et de la longueur d'onde du rayonnement¹. Cette observation peut s'interpréter en résolvant les équations de Maxwell dans un cadre simplifié qui donne à la fois une bonne description des phénomènes observés et un formalisme facile à utiliser, il s'agit du formalisme de la diffraction.



1.1 L'approximation de l'optique géométrique et ses limites

L'optique géométrique est une modélisation très simplifiée de la propagation de la lumière, suffisante pour interpréter une partie importante des observations. On en rappelle brièvement quelques points importants.

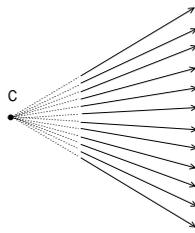
1.1.1 Rayons lumineux - Réflexion et réfraction

La lumière est décrite par des courbes de l'espace constituant le trajet de l'énergie et appelées 'rayons'. Les rayons sont orientés et proviennent des sources. Un ensemble continu de rayons est nommé 'faisceau'.

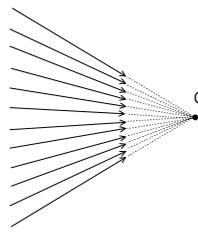
Une partie homogène et isotrope de l'espace est caractérisé par un nombre réel ≥ 1 , son indice optique. Les rayons sont rectilignes (principe de propagation rectiligne).

1. Exemple : on observe le ciel en direction de la planète Saturne, en supposant qu'à ce moment-là une étoile se trouve angulairement proche de la planète. A l'oeil, on voit deux points lumineux sans structure. Avec un télescope amateur, Saturne est nettement agrandie, son anneau se distingue parfaitement. Pour l'étoile, la taille apparente semble avoir diminué. Cet exemple illustre que le diamètre apparent de l'étoile est lié à des paramètres autres que sa seule dimension et fonctions de l'instrument d'observation. La formation de son image sur la rétine de l'observateur fait intervenir des phénomènes qui modifient la répartition de la lumière dans le plan de formation de l'image géométrique.

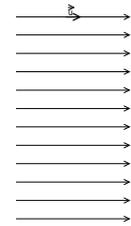
Exemples de faisceaux :



faisceau conique divergent
de sommet C

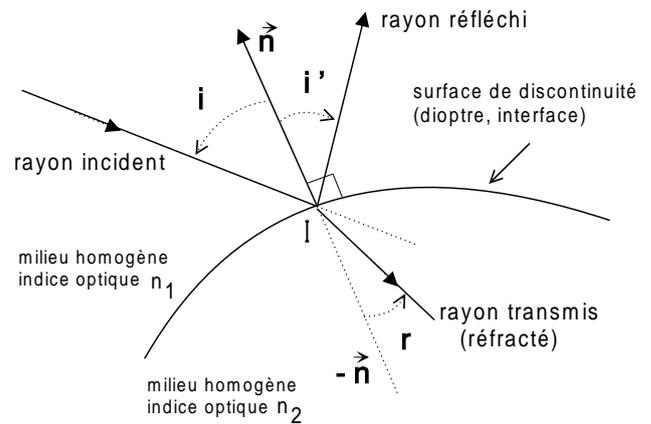


faisceau conique convergent
de sommet C



faisceau parallèle
(cône de sommet très éloigné)
C à l'infini

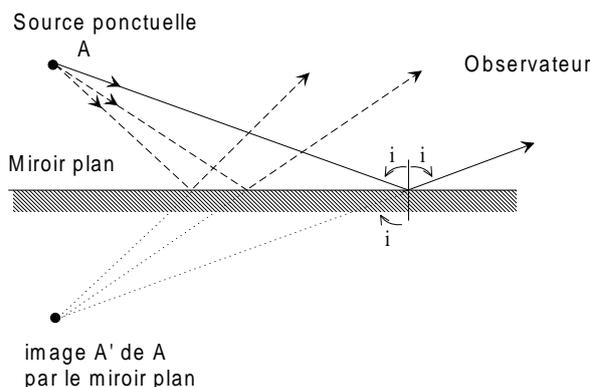
Quand un rayon rencontre une surface de discontinuité entre portions d'espace homogènes et isotropes, il est en général partiellement réfléchi et partiellement transmis (réfracté). On note I le point d'incidence et \vec{n} la normale en I à la surface. Pour les angles et les indices définis sur le graphe, les lois de Snell-Descartes s'énoncent alors :



- (i) le rayon incident et la normale \vec{n} définissent un plan appelé 'plan d'incidence' qui contient les rayons réfléchi et réfracté.
- (ii) $i' = i$ et $n_1 \sin i = n_2 \sin r$. Ces angles sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$
- (iii) les rayons réfléchi et réfracté traversent la normale.

1.1.2 Image par un système optique

Notion d'image : cas d'un miroir plan



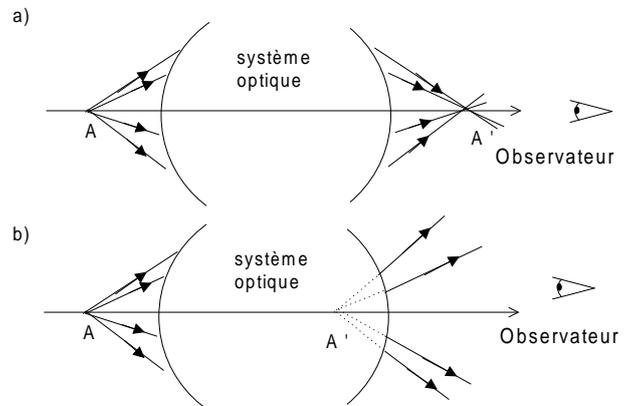
Un rayon émis par une source ponctuelle A se réfléchit sur un miroir plan. Les rayons incident et réfléchi forment le même angle i avec la normale.

Pour un observateur, le rayon réfléchi semble provenir d'une source sur le prolongement du réfléchi, qui correspond au symétrique de l'incident par rapport au miroir. On applique le même raisonnement pour d'autres rayons émis par A . Si l'observateur se déplace, tous les rayons lumineux semblent passer par un point unique A' , symétrique de A par rapport au miroir.

On dit dans ce cas que A' est l'image (ou l'image géométrique) de A par le miroir plan.

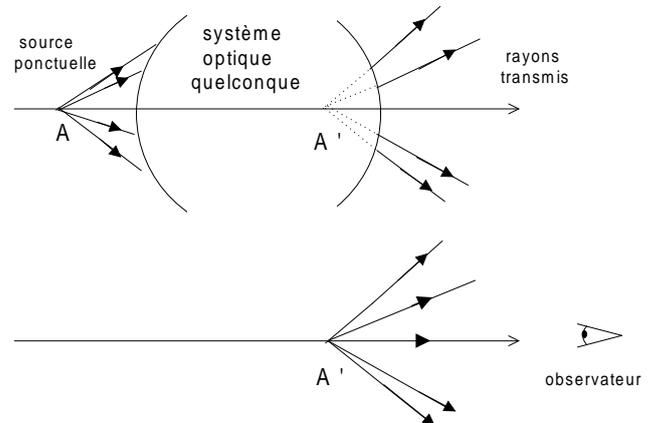
Généralisation : conjugaison objet-image

Soit une source ponctuelle A émettant un faisceau conique divergent de sommet A (ou un faisceau parallèle si A est à l'infini). Lorsque ce faisceau traverse un système optique, on observe à la sortie des rayons lumineux de directions en général quelconques. Mais si tous ces rayons sont dans la direction d'un même point A' , on dit que le système optique a formé une image A' du point A . Lorsque cette condition est vérifiée pour tous les rayons, le système optique est dit parfaitement stigmatique. On vient de démontrer que le miroir plan est dans ce cas.



Pour beaucoup des systèmes optiques, comme par exemple les lentilles, cette condition n'est vérifiée que pour les rayons proches de l'axe et formant de petits angles avec cet axe ('conditions de Gauss'). Dans ce cas, le stigmatisme est dit 'approché'.

Remarque : pour un observateur, la description du dispositif peut se simplifier en ne représentant pas ($A +$ système optique) mais seulement les rayons de direction passant par A' . Cette méthode est particulièrement utile quand la lumière émise par un point source traverse plusieurs systèmes optiques successifs.



Pour un objet A dont l'image est A' , on aura :

- tout rayon de direction passant par A et traversant le système optique ressort avec une direction passant par A' .
- le principe du retour inverse de la lumière fait que tout rayon de direction passant par A' et traversant le système optique dans l'autre sens ressort dans une direction passant par A . Les points A et A' sont dits **conjugués** par le système optique.

Sur le schéma (a), les rayons émergents passent effectivement par A' , l'image est dite réelle. Sur le graphe (b), seuls les prolongements des rayons passent par A' , l'image est dite virtuelle.

Dans les deux cas, un observateur situé au delà du système optique et de A' voit la lumière provenir de A' c'est à dire un point lumineux en A' .

1.1.3 Exemple : image par une lentille

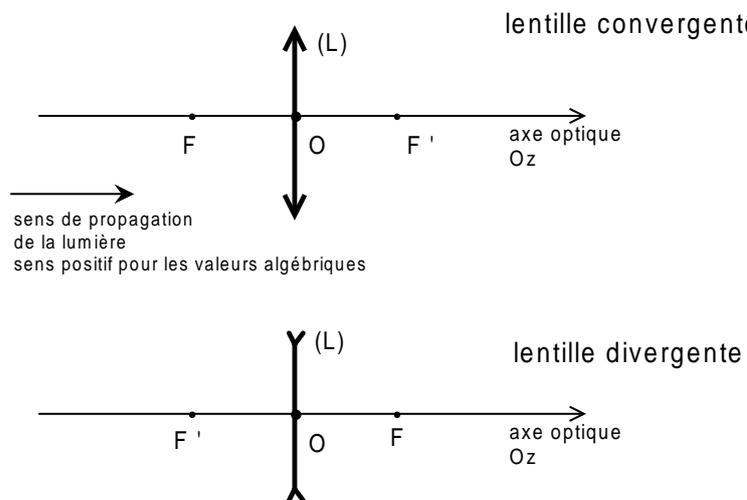
Caractérisation d'une lentille

Une lentille est caractérisée par :

- son axe de révolution Oz appelé axe optique
- son intersection O avec Oz appelée centre optique
- son point focal image F' sur Oz (foyer image)
- sa distance focale $f = \overline{OF'}$.

Le plan perpendiculaire à Oz en F' est le **plan focal image**.

La lentille est supposée placée dans l'air d'indice optique égal à 1. Son point focal objet F est sur Oz avec par définition $\overline{FO} = f$. Le plan perpendiculaire à Oz en F est le **plan focal objet**.

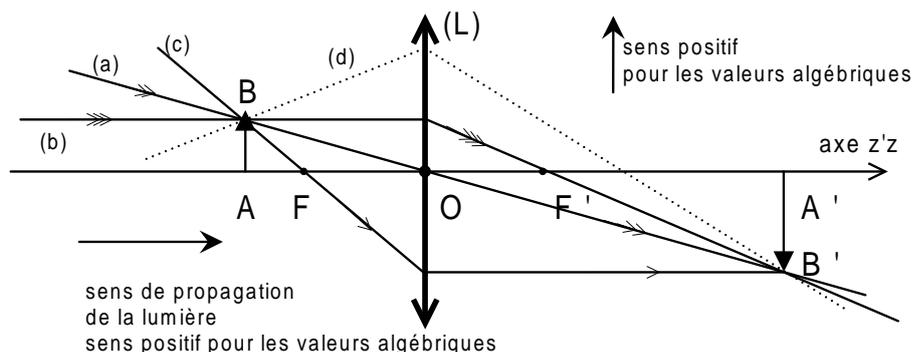


Par hypothèse, la lumière se propage vers les z croissants. Les valeurs algébriques sont comptées positivement dans ce sens. La distance focale $f = \overline{OF'}$ est positive pour une lentille convergente et négative pour une lentille divergente.

Action d'une lentille sur les rayons

Une lentille mince utilisée dans les conditions de Gauss a pour des rayons particuliers les actions suivantes :

- * un rayon passant par le centre optique de la lentille n'est pas dévié (rayon (a)).
- * un rayon incident parallèle à l'axe optique est transmis par la lentille avec une direction passant par le point focal image F' (rayon (b)).
- * un rayon incident de direction passant par le point focal objet F est transmis avec une direction parallèle à l'axe optique (rayon (c)).



Exercice : faire la même construction pour une lentille convergente avec $\overline{OA} = -f/2$, $\overline{OA'} = -2f/3$ puis pour une lentille divergente avec $\overline{OA} = 4f/3$ (négatif), puis $\overline{OA} = -f/2$ et $\overline{OA'} = -2f$

Si B' est l'intersection de deux des rayons (a), (b) ou (c) émis par B , alors B' est l'image de B : par conséquent, tout autre rayon émis par B et traversant la lentille passera ensuite par B' (rayon (d)). Cette notion est importante parce qu'elle permet d'utiliser les propriétés des rayons particuliers, en les combinant à la notion d'image par un système optique, pour déterminer la déviation par la lentille d'un rayon incident quelconque de direction passant par A .

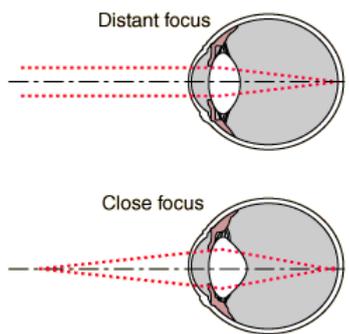
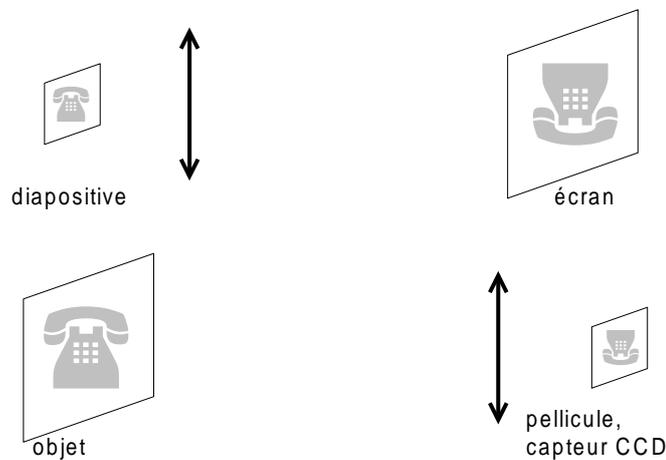
Un point objet B et son image B' par la lentille sont repérés par les valeurs algébriques de leurs projections A et A' sur l'axe optique, avec :

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f} \quad \text{relation de conjugaison de Gauss}$$

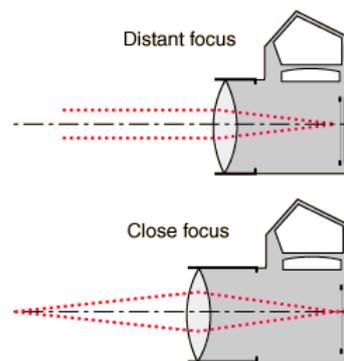
On dit que AB et $A'B'$ sont conjugués par la lentille.

On a raisonné pour un point objet émettant de la lumière. On peut faire de même pour l'ensemble des points constituant un objet étendu et renvoyant la lumière qui l'éclaire par ailleurs (exemples : un projecteur forme l'image d'une diapositive sur un écran ; un objectif forme l'image d'un objet sur un capteur photographique ; le cristallin de l'oeil forme l'image d'un objet sur la rétine).

Le **grandissement** du système est défini par $g = \frac{A'B'}{AB}$. Il est positif pour une image droite, négatif pour une image inversée. Les constructions géométriques montrent que $g = \frac{OA'}{OA}$ et permettent de justifier la formule de conjugaison de Gauss (cf TD 1).



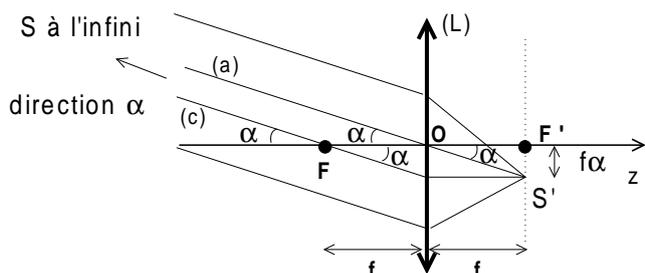
La courbure du cristallin (donc sa focale) s'ajuste pour former sur la rétine l'image d'un objet, que celui-ci soit lointain ou proche.



La distance objectif-pellicule s'ajuste pour former sur la pellicule l'image d'un objet, que celui-ci soit lointain ou proche.

La déviation des rayons va être utilisée pour déterminer la forme du faisceau transmis ou les caractéristiques de l'image dans trois cas particuliers importants.

* Source à l'infini - faisceau parallèle



Soit une source de lumière S située au point B avec $\alpha = \widehat{AOB}$ fixe et A s'éloignant à l'infini.

Tous les rayons provenant de S deviennent parallèles à (a). La lentille est éclairée par un faisceau parallèle de direction $\frac{\vec{SO}}{\|\vec{SO}\|}$, formant avec Oz l'angle α supposé petit pour être dans les conditions de Gauss.

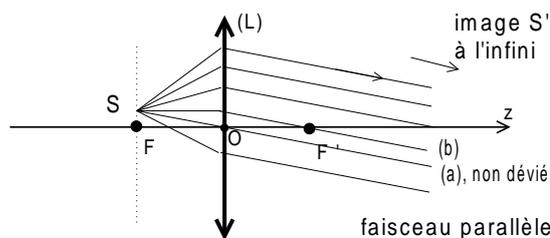
Les rayons (a) et (c) se coupent en S' dans le plan focal image de la lentille avec $F'S' = f \tan \alpha \simeq f\alpha$ pour α petit. S' est l'image géométrique de S par (L), tous les autres rayons émis par S convergent également en S' .

Justification plus détaillée de la construction du graphe :

- le rayon (a) forme l'angle α avec Oz , avant et après la lentille (L)
- avant (L), (c) devient parallèle à (a) puisque la source est renvoyée à l'infini. Après (L), ces rayons se coupent en S' dans le plan focal image avec $F'S' = f \tan \alpha \simeq f\alpha$. S' est l'image de S .
- tous les autres rayons arrivant de S sont aussi parallèle à (a) ; la lentille les fait tous converger au point image S' .
- formulation équivalente : le faisceau parallèle formant l'angle α avec Oz converge en S' dans le plan focal image de (L) avec $F'S' = f\alpha$.

* Source ponctuelle dans le plan focal objet

On considère une source ponctuelle au point S du plan focal objet. Le résultat précédent et le principe du retour inverse de la lumière justifient que le faisceau transmis est parallèle (point de convergence donc image S' à l'infini). Le rayon passant par O n'est pas dévié donc la direction du faisceau est celle du vecteur $\frac{\vec{SO}}{\|\vec{SO}\|}$. Cette formulation vectorielle reste valable que S soit dans le plan de la figure ou pas, ce qui n'est pas le cas des résultats obtenus en raisonnant sur des angles définis dans le plan du schéma.



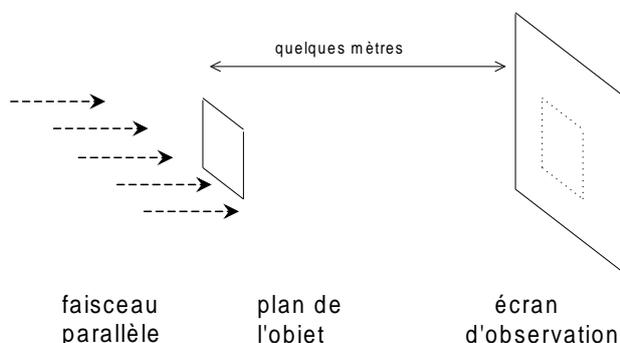
* Configuration 2f-2f

L'objet AB tel que $\overline{OA} = -2f$ donne une image $A'B'$ à la position vérifiant $\overline{OA'} = 2f$ avec un grandissement $g = -1$. Cette configuration appelée "2f-2f" est très fréquemment utilisée dans la pratique. On peut montrer (TD1) que c'est la configuration donnant la distance AA' la plus courte donc le montage le plus compact.

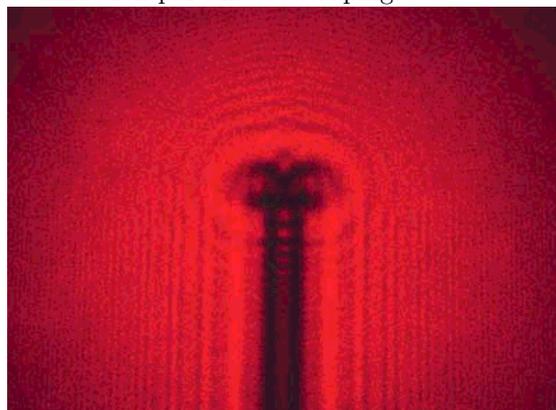
1.1.4 Exemples de limites de l'optique géométrique

* Exemples concernant la propagation

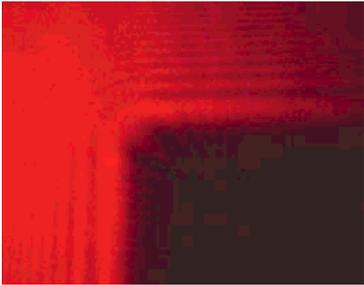
L'expérience montre qu'un objet de petite taille ou présentant des discontinuités brutales fait apparaître, quand il est éclairé par un faisceau parallèle, un peu de lumière à l'intérieur de l'ombre géométrique et des franges lumineuses à l'extérieur de cette ombre. Ces effets sont incompatibles avec la propagation rectiligne de la lumière et s'interprètent par une modélisation faisant intervenir son caractère ondulatoire.



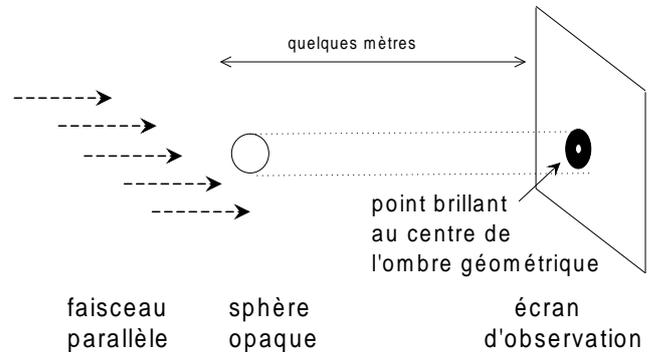
* diffraction par une tête d'épingle



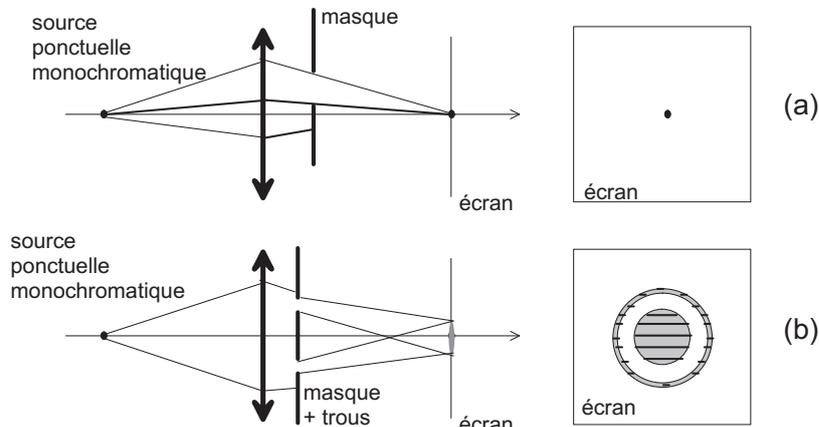
* diffraction par un coin d'écran.



* diffraction par une sphère.



* Exemples concernant la formation d'image



La formation de l'image de la source est bien décrite par l'optique géométrique. Avec le montage schématisé Fig. (a), l'expérience montre que la tache de lumière possède un rayon d'autant plus grand que le diamètre du trou circulaire dans le masque est petit. Il apparaît également un anneau peu lumineux centré sur l'image géométrique. Cette observation tout comme l'apparition de franges sombres avec le montage (b) ne sont pas interprétées par l'optique géométrique mais sont bien décrites par le formalisme de la diffraction.

1.2 Les bases du formalisme ondulatoire

1.2.1 Amplitude, amplitude complexe, intensité

La lumière est une onde électromagnétique dont les champs \vec{E} et \vec{B} vérifient les équations de Maxwell. Ces champs sont des vecteurs ; cependant, pour des rayons peu inclinés entre eux et avec de faibles angles d'incidence sur les divers systèmes rencontrés, l'expérience montre qu'un scalaire $s(x, y, z, t)$ appelé **vibration lumineuse** suffit pour décrire l'onde lumineuse et la plupart de ses propriétés. Ces conditions constituent l'approximation paraxiale et l'approximation scalaire.

Au point origine O , la vibration lumineuse d'une onde monochromatique de pulsation ω s'écrit :

$$s(0, 0, 0, t) = A_0 \cos(\omega t + \psi)$$

A_0 est l'**amplitude** de l'onde, ψ sa **phase à l'origine**.

Cette onde se propage dans l'espace libre pour atteindre un point $M(x, y, z)$ après une durée de propagation Δt_{OM} . La vibration lumineuse en M à l'instant t reproduit celle en O à l'instant $(t - \Delta t_{OM})$ avec éventuellement une atténuation de son amplitude d'un facteur α réel. Elle s'écrit :

$$s(x, y, z, t) = \alpha A_0 \cos[\omega(t - \Delta t_{OM}) + \psi]$$

La quantité $[\omega(t - \Delta t_{OM}) + \psi]$ représente **la phase de l'onde** à l'instant t au point M . L'ensemble des points M pour lesquels la phase est identique à un instant t donné s'appelle **une surface d'onde** ou une surface équiphase.

La vibration lumineuse en M peut s'écrire sous la forme :

$$s(x, y, z, t) = \frac{\alpha A_0 \exp i[\omega(t - \Delta t_{OM}) + \psi] + \alpha A_0 \exp -i[\omega(t - \Delta t_{OM}) + \psi]}{2}$$

Par définition², la quantité $\mathcal{A}(x, y, z) = \alpha A_0 \exp i(-\omega\Delta t_{OM} + \psi)$ est **l'amplitude complexe** de l'onde au point M et $\mathcal{A}(x, y, z) \exp i\omega t$ en constitue la **représentation complexe**.

Ceci correspond à l'écriture :

$$\begin{aligned} s(x, y, z, t) &= \frac{\mathcal{A}(x, y, z) \exp i\omega t + \mathcal{A}^*(x, y, z) \exp -i\omega t}{2} \\ &= \Re [\mathcal{A}(x, y, z) \exp i\omega t] \end{aligned}$$

Pour une longueur d'onde donnée, les détecteurs optiques sont sensibles à **l'intensité lumineuse** $I(x, y, z)$ reliée à l'amplitude complexe par

$$\begin{aligned} I(x, y, z) &= \mathcal{A}(x, y, z) \mathcal{A}^*(x, y, z) = |\mathcal{A}(x, y, z)|^2 \text{ en fonction de l'amplitude complexe} \\ &= [\mathcal{A}(x, y, z) \exp i\omega t][\mathcal{A}(x, y, z) \exp i\omega t]^* \text{ en fonction de la représentation complexe} \end{aligned}$$

Cette relation constitue la définition physique de la vibration lumineuse³.

Avec cette définition, l'énergie lumineuse traversant la surface S d'un détecteur pendant la durée Δt vaut $IS \Delta t$, quantité proportionnelle au nombre des photons.

La **puissance lumineuse** au niveau de la surface Σ définie sur une surface d'onde vaut $\mathcal{P} = \int_{\Sigma} I dS$. L'intensité lumineuse correspond alors à la puissance par unité de surface d'onde avec $I = \frac{d\mathcal{P}}{dS}$.

On rappelle quelques notations et relations concernant les grandeurs caractéristiques d'une onde : période T ; fréquence $\nu = \frac{1}{T}$; pulsation $\omega = 2\pi\nu$; vitesse de propagation dans le vide : c_0 ; vitesse de propagation dans un milieu d'indice optique n : $c = \frac{c_0}{n}$; longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = c_0 T = \frac{c_0}{\nu} = \frac{2\pi c_0}{\omega}$; longueur d'onde dans un milieu d'indice optique n : $\lambda = \frac{c_0}{n} T = \frac{c_0}{n\nu} = \frac{2\pi c_0}{n\omega}$. On utilisera souvent les égalités $\frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ et $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$.

1.2.2 Ondes cohérentes - ondes incohérentes

Les notions d'ondes cohérentes ou incohérentes sont discutées ici par leurs propriétés. L'origine physique de ces propriétés sera discutée en détail dans le chapitre 'interférences et cohérence temporelle'⁴.

Soient deux ondes d'amplitudes complexes \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 au point M . On note $I_1 = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_1^*$ et $I_2 = \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_2^*$. L'amplitude au point M est la somme des deux amplitudes

$$\begin{aligned} I &= (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)^* \\ &= I_1 + I_2 + \underbrace{\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_1^* \mathcal{A}_2}_{\text{"terme d'interférences"}} \end{aligned}$$

Pour deux ondes incohérentes, on justifiera ultérieurement qu'il est nul : l'intensité en M se réduit à la somme des intensités des deux ondes, $I = I_1 + I_2$.

Si les deux ondes sont cohérentes, ce terme est en général non nul et cause des variations spatiales d'intensité au voisinage de M (franges d'interférence).

On admet pour l'instant les propriétés suivantes :

- deux ondes issues d'une même source ponctuelle monochromatique ou d'un même laser sont cohérentes.
- deux ondes de pulsations différentes sont incohérentes.

2. Le choix de $\alpha A_0 \exp i(-\omega\Delta t_{OM} + \psi)$ plutôt que $\alpha A_0^* \exp -i(-\omega\Delta t_{OM} + \psi)$ est arbitraire, il conditionne le signe d'un certain nombre d'expressions concernant l'amplitude complexe qu'on étudiera ultérieurement. On trouve le choix contraire dans certains livres.

3. Cette relation sera commentée et reliée à la définition physique de l'intensité au chapitre 'Ondes quasi-monochromatiques'. Pour une onde monochromatique, l'intensité ne dépend pas du temps.

4. Physiquement, deux ondes sont incohérentes si la phase relative de leurs amplitudes fluctue aléatoirement au cours du temps. Pour une onde non strictement monochromatique, la notion d'intensité fait intervenir une intégration sur le temps qui en moyenne annule le terme d'interférences (Cf chapitre 'interférences et cohérence temporelle').

– deux ondes issues de deux points sources distincts sont incohérentes.

Par abus de langage on dira par la suite qu'une onde est cohérente si elle est produite par un laser ou émise par une source ponctuelle monochromatique. Dans la pratique, deux ondes formées à partir de cette même onde initiale par un dispositif optique quelconque seront cohérentes.

1.2.3 Ondes planes et ondes sphériques, approche qualitative

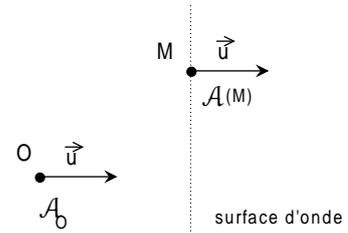
Par hypothèse, le milieu est homogène et isotrope d'indice optique n , l'onde s'y propage à la vitesse c .

Le but est d'introduire deux ondes particulières qui ne correspondent pas exactement à la réalité mais qui serviront de base mathématique pour la description d'une onde réelle quelconque. Une construction de ces ondes à partir de la notion de propagation est développée en annexes 1.6.1 et 1.6.2.

Une onde plane est définie par :

- son amplitude complexe \mathcal{A}_0 au point O ,
- sa direction de propagation, le vecteur unitaire $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, identique en tout point de l'espace.
- son vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$
- sa représentation complexe $\mathcal{A}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})$ au point $M(x, y, z)$
- son amplitude complexe

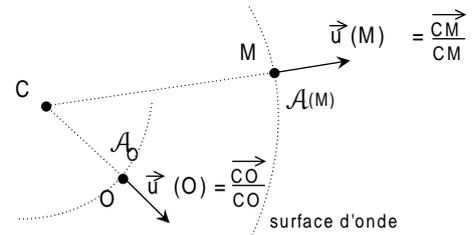
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(M) &= \mathcal{A}_0 \exp -i \vec{k} \cdot \vec{OM} \\ &= \mathcal{A}_0 \exp -i \frac{\omega}{c} (\alpha x + \beta y + \gamma z) \end{aligned}$$



La phase est constante pour $\vec{k} \cdot \vec{OM}$ constant donc les surfaces d'onde sont les plans perpendiculaires à \vec{u} .

On définit une onde sphérique par :

- le centre C
- l'amplitude complexe \mathcal{A}_0 au point O .
- la direction de propagation $\vec{u}(M) = \frac{\vec{CM}}{CM}$ au point M .
- le vecteur d'onde $\vec{k}(M) = \frac{\omega}{c} \vec{u}(M)$.

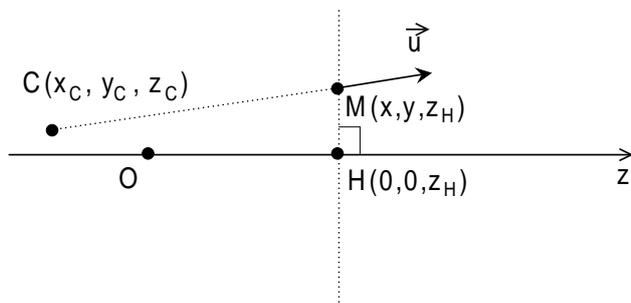


Son amplitude complexe en M s'écrit

$$\mathcal{A}(M) = \underbrace{\mathcal{A}_0 CO \exp i k CO}_{\text{préfacteur construit pour obtenir la valeur } \mathcal{A}_0 \text{ pour } M \text{ situé en } O} \times \underbrace{\frac{\exp -i k CM}{CM}}_{\text{onde sphérique de centre } C}$$

Les surfaces d'onde sont telles que $(-i k CM) = \text{cte}$, ce sont des sphères de centre C .

On va simplifier $\mathcal{A}(M)$ pour la situation suivante :



Hypothèses :

- M est dans le plan perpendiculaire en H à Oz .
- C et M sont près de Oz avec $|x_C|, |y_C|, |x|, |y| \ll |z_H - z_C|$

On a $CM = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z_H - z_C)^2}$. Un développement limité de CM à l'ordre 2 permet d'écrire $\mathcal{A}(M)$ sous la forme :

$$\mathcal{A}(x, y, z_H) = \mathcal{A}(x_C, y_C, z_H) \exp -ik \frac{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2}{2(z_H - z_C)}$$

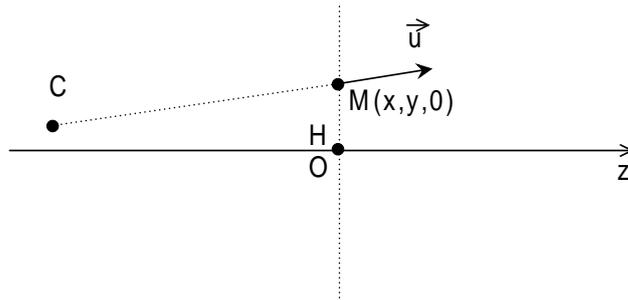
Cette forme est appelée 'amplitude complexe d'une onde sphérique écrite à l'approximation parabolique'.

* Elle est valable pour une onde divergente ($z_C < z_H$) ou convergente ($z_C > z_H$).

* Dans la pratique, elle est plus simple à utiliser que la forme générale tout en permettant une bonne description des propriétés physiques.

* L'approximation parabolique consiste à prendre le développement de CM à l'ordre 0 dans la fonction lentement variable $\frac{1}{|CM|}$ et CM à l'ordre 2 dans la fonction $\exp -i\frac{2\pi}{\lambda}|CM|$ rapidement variable donc beaucoup plus sensible aux approximations faites sur CM .

On poursuit pour H confondu avec O et $M(x, y, 0)$ proche de O . L'onde sphérique émise par la source ponctuelle $C(x_C, y_C, z_C)$ avec $z_C < 0$ possède dans le plan $z = 0$ l'amplitude complexe :



$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y, 0) &= \mathcal{A}(x_C, y_C, 0) \exp -ik \frac{x^2 + x_C^2 - 2x_Cx + y^2 + y_C^2 - 2y_Cy}{2(-z_C)} \\ &= \underbrace{\mathcal{A}(x_C, y_C, 0) \exp ik \frac{x_C^2 + y_C^2}{2z_C}}_{\mathcal{A}(O)} \exp ik \frac{x^2 + y^2}{2z_C} \exp -ik \left(\frac{x_C}{z_C}x + \frac{y_C}{z_C}y \right) \end{aligned}$$

On fait tendre z_C vers $-\infty$ avec $\alpha = \frac{x_C}{z_C}$ et $\beta = \frac{y_C}{z_C}$ fixés, supposés petit devant 1. Le terme $\exp ik \frac{x^2 + y^2}{2z_C}$ tend vers 1 (hypothèse M proche de O). Il reste

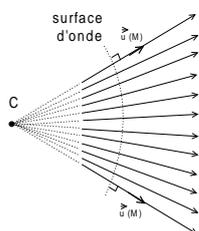
$$\mathcal{A}(x, y, 0) = \mathcal{A}(O) \exp -ik(\alpha x + \beta y) \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

C'est l'amplitude complexe dans le plan $z = 0$ d'une onde plane se propageant suivant le vecteur unitaire $\vec{u}(\alpha = \frac{x_C}{z_C}, \beta = \frac{y_C}{z_C}, 1)$, on peut vérifier que $\vec{u} = \frac{\vec{CO}}{\|\vec{CO}\|}$.

Conséquence pratique : un observateur situé en $z = 0$ et recevant une onde sphérique de centre C voit un point lumineux en C à distance finie. Pour une onde plane de direction de propagation \vec{u} , il voit donc un point lumineux en C à très grande distance avec $\vec{u} = \frac{\vec{CO}}{\|\vec{CO}\|}$.

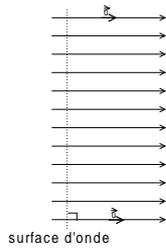
1.2.4 Lien entre formalisme ondulatoire et optique géométrique

On récapitule qualitativement les parallèles entre formalisme ondulatoire et optique géométrique. Une approche plus formelle est donnée en annexe 1.6.3.



Formalisme ondulatoire
Onde sphérique de centre C

Optique géométrique
Cône de lumière de sommet C



C
à l'infini

Formalisme ondulatoire
Onde plane de direction de
propagation \vec{u}

Optique géométrique
Faisceau parallèle
de direction \vec{u} et
d'extension latérale infinie

Sur ces deux exemples, les rayons lumineux correspondent à la direction de propagation de l'onde, perpendiculaire aux surfaces d'onde. On va généraliser ces propriétés pour des ondes quelconques.

Soit un système physique donné, l'onde établie est la solution des équations de Maxwell (en général ni sphérique ni plane). A t_0 fixé, sa phase en M est notée $\varphi(M)$.

Pour une onde monochromatique progressive, un rayon lumineux est défini par l'écoulement de l'énergie lumineuse (la trajectoire des photons). La résolution des équations de Maxwell dans un milieu homogène isotrope d'indice n montre que les rayons sont en M suivant le vecteur unitaire $\vec{u}(M)$ avec :

$$(1) \quad \vec{k}(M) = \frac{n \omega}{c_0} \vec{u}(M) \quad \text{et} \quad \vec{k}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi(M) \quad (2)$$

Propriétés :

– (2) signifie mathématiquement que le vecteur d'onde $\vec{k}(M)$ et les rayons sont perpendiculaires en M aux surfaces équi-phases (surfaces d'onde).

– (1) reste vrai si l'indice optique varie lentement au voisinage de M . On a alors $\vec{k}(M) = \frac{n(M) \omega}{c_0} \vec{u}(M)$.

Remarques : (1) est appelée relation de dispersion, elle possède cette forme pour une propagation dans un milieu où les dimensions caractéristiques sont toutes très grandes devant la longueur d'onde. La relation de dispersion serait différente dans un très petit guide d'onde comme par exemple une fibre optique.

1.3 Notion de chemin optique. Applications

De nombreux systèmes optiques produisent en un point M une intensité fonction des phases relatives des différentes ondes atteignant M (montages de diffraction, d'interférences, d'imagerie en lumière cohérente). L'intensité ne peut pas être prévue par l'optique géométrique qui ne modélise pas la notion de phase et elle est difficile à calculer avec uniquement le formalisme ondulatoire. On introduit la notion de chemin optique qui permet, en combinant les deux approches, de simplifier la description de beaucoup de systèmes.

1.3.1 Variation de la phase

* Définition du chemin optique

Soient deux points M_1 et M'_1 situés sur un même rayon lumineux orienté dans le sens de propagation de la lumière. A un instant donné, on a d'une manière générale la relation mathématique

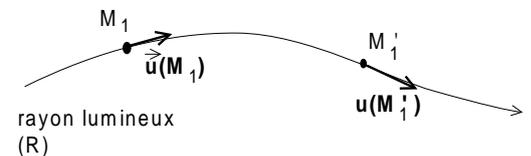
$$\varphi(M'_1) = \varphi(M_1) + \int_{M_1 \rightarrow M'_1} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(M) \cdot d\vec{r}$$

avec $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi(M) \cdot d\vec{r} = -\vec{k}(M) \cdot d\vec{r} = -n(M) \frac{\omega}{c_0} \vec{u}(M) \cdot d\vec{r}$. Pour une intégration suivant une courbe correspondant à un rayon lumineux, $\vec{u}(M) \cdot d\vec{r}$ correspond à ds , l'élément différentiel de l'abscisse curviligne mesurée sur le rayon lumineux. On obtient

$$\varphi(M'_1) = \varphi(M_1) - \frac{\omega}{c_0} \int_{M_1 \rightarrow M'_1} \text{rayon lumineux} \quad n(M) \, ds$$

Le **chemin optique** suivant l'arc de rayon lumineux⁵ (R) reliant M_1 à M'_1 est défini par

$$[M_1 M'_1]_{(R)} = \int_{M_1 \rightarrow M'_1} \text{rayon lumineux} \quad n(M) \, ds$$



5. Par la suite, on allégera la notation en n'écrivant plus 'rayon lumineux' dans l'intégrale et en écrivant $[M_1 M'_1]$ quand il n'y a pas d'ambiguïté

Par convention, l'abscisse curviligne est orientée positivement dans le sens de propagation de la lumière.

Propriétés :

- Par construction, $[M_1 M'_1]_{(R)} = -[M'_1 M_1]_{(R)}$.
- Sur un rayon rectiligne dans un milieu homogène d'indice n , $[M_1 M'_1]_{(R)} = n \overline{M_1 M'_1}$, quantité positive si la lumière se propage de M_1 vers M'_1 et négative dans le cas contraire.
- Pour trois points M_1 , M'_1 et M''_1 sur un même rayon lumineux, $[M_1 M''_1]_{(R)} = [M_1 M'_1]_{(R)} + [M'_1 M''_1]_{(R)}$ quelle que soit la position de M'_1 sur le rayon.

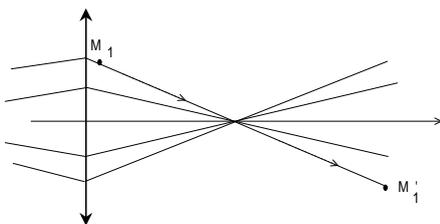
*** Relation entre chemin optique et variation de la phase**

A t_0 fixé, la variation de la phase de l'onde entre M_1 et M'_1 venant de la propagation est reliée au chemin optique par :

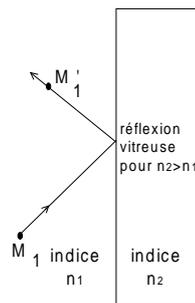
$$\varphi(M'_1) - \varphi(M_1) = -\frac{\omega}{c_0} [M_1 M'_1]_{(R)} = -\frac{2\pi}{\lambda_0} [M_1 M'_1]_{(R)}$$

Pour certains points particuliers de l'espace comme le point de réflexion sur une interface n_1/n_2 avec $n_2 > n_1$ (réflexion vitreuse), le point de réflexion sur un miroir⁶ ou le voisinage du point de convergence d'un faisceau⁷, la résolution des équations de Maxwell montre qu'il apparaît un déphasage localisé s'ajoutant au déphasage calculé pour la propagation suivant le rayon lumineux. Si le faisceau passe entre M_1 et M'_1 par p de ces points particuliers, on a la relation

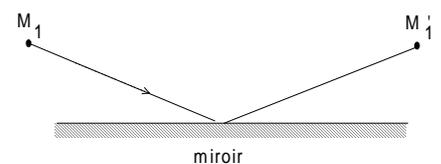
$$\varphi(M'_1) - \varphi(M_1) = -\frac{\omega}{c_0} [M_1 M'_1]_{(R)} + p \pi$$



Passage au voisinage d'un point de convergence



Réflexion vitreuse



Réflexion sur un miroir

*** Chemin optique et surfaces d'onde**

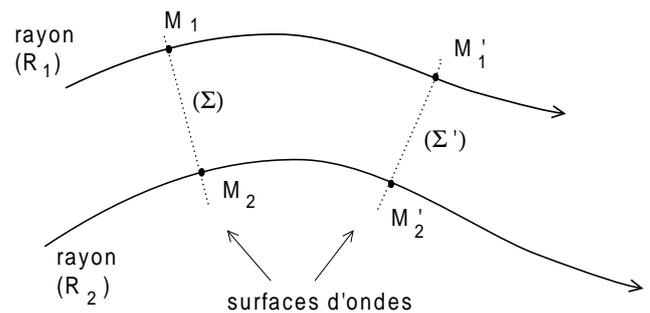
Soient deux surfaces d'onde Σ et Σ' et deux rayons lumineux (R_1) et (R_2) coupant Σ et Σ' en M_1, M'_1, M_2 et M'_2 . On a

$$\varphi(M'_1) - \varphi(M_1) = -\frac{\omega}{c_0} [M_1 M'_1]_{(R_1)}$$

$$\text{et } \varphi(M'_2) - \varphi(M_2) = -\frac{\omega}{c_0} [M_2 M'_2]_{(R_2)}$$

avec $\varphi(M'_1) = \varphi(M'_2)$ puisque M'_1 et M'_2 appartiennent à la surface d'onde Σ' , et $\varphi(M_2) = \varphi(M_1)$ puisque M_1 et M_2 appartiennent à la surface d'onde Σ . On en déduit la relation

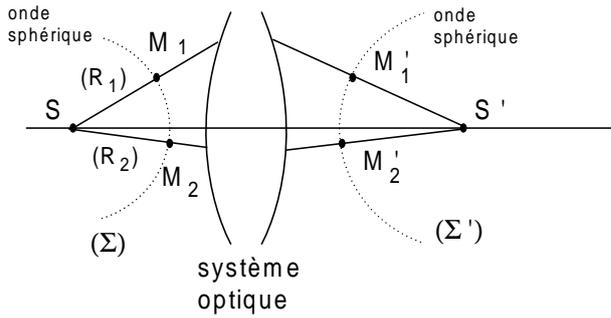
$$[M_1 M'_1]_{(R_1)} = [M_2 M'_2]_{(R_2)}$$



D'une manière générale, les chemins optiques associés aux arcs de rayons lumineux limités par deux mêmes surfaces d'onde sont tous égaux entre eux.

Ce résultat se généralise pour des rayons traversant plusieurs milieux d'indices différents, par exemple des lentilles, avec les conséquences utiles suivantes :

6. Un déphasage de π pour l'onde réfléchie permet d'obtenir que la composante tangentielle du champ électrique de l'onde résultante est nulle (relations de continuité à la surface d'un métal parfait).
 7. Ce résultat se calcule analytiquement assez facilement pour un faisceau gaussien, cf fin TD3



Exemple 1

Un système optique transforme une onde sphérique émise par la source ponctuelle S en une onde sphérique de centre S' . Tous les rayons issus de S et traversant le système optique convergent ensuite en S' , ce point est l'image géométrique de S . Soient deux surfaces d'onde Σ et Σ' et deux rayons lumineux (R_1) et (R_2) coupant Σ et Σ' en M_1, M_1', M_2 et M_2' . Les chemins optiques $[M_1M_1']_{(R_1)}$ et $[M_2M_2']_{(R_2)}$ sont égaux.

On peut faire tendre Σ et Σ' respectivement vers S et S' et justifier ainsi que les chemins optiques pris sur les rayons lumineux reliant un point S à son image géométrique S' par un système optique sont tous égaux entre eux.

Exemple 2

Soit une onde sphérique émise par un point S du plan focal objet d'une lentille de centre optique O . La lentille transmet une onde plane de direction de propagation $\vec{u} = \frac{S\vec{O}}{\|S\vec{O}\|}$. On veut évaluer la différence

$$\varphi(M_2') - \varphi(M_1') = -\frac{\omega}{c_0} ([SM_2']_{(R_2)} - [SM_1']_{(R_1)})$$

Le plan (Σ') perpendiculaire à \vec{u} est un plan d'onde donc la projection H de M_1' sur (R_2) vérifie $\varphi(M_1') = \varphi(H)$. Il vient

$$\begin{aligned} \varphi(M_2') - \varphi(M_1') &= \varphi(M_2') - \varphi(H) \\ &= -\frac{\omega}{c_0} [HM_2']_{(R_2)} \end{aligned}$$

1.3.2 Variation de l'amplitude complexe

On suppose que le rayon suit entre M_1 et M_1' une série de trajets rectilignes d_i dans des milieux d'indice n_i .

Le rapport $\frac{[M_1M_1']_{(R)}}{c_0} = \sum_i \frac{d_i}{c_0/n_i}$ correspond au temps de propagation de la lumière de M_1 à M_1' , positif si la lumière atteint M_1' après être passée par M_1 ou négatif dans le cas inverse.

En utilisant la notion de propagation, on écrit que la représentation complexe de l'onde en M_1' correspond à celle en M_1 avec un retard $\frac{[M_1M_1']_{(R_1)}}{c_0}$, une atténuation α de l'amplitude et éventuellement p déphasages localisés de π

$$\mathcal{A}(M_1') \exp i\omega t = \alpha \exp i p \pi \mathcal{A}(M_1) \exp i\omega \left(t - \frac{[M_1M_1']_{(R_1)}}{c_0} \right)$$

d'où pour les amplitudes complexes :

$$\mathcal{A}(M_1') = \alpha \exp i p \pi \mathcal{A}(M_1) \exp -i2\pi \frac{[M_1M_1']_{(R_1)}}{\lambda_0} \quad \text{avec } \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

Utilisation pratique : en choisissant M_1 au point source S , on peut ainsi connaître la phase relative en tout point M de l'espace atteint par un rayon, sans avoir à résoudre les équations de Maxwell.

Cet outil permet de conserver la simplicité de l'optique géométrique tout en y réintégrant la notion de phase issue de l'optique ondulatoire. Cette combinaison permet d'interpréter la plus grande partie des expériences ne pouvant pas être comprises seulement par l'optique géométrique.

1.3.3 Exemple : application à l'analyse d'un système optique

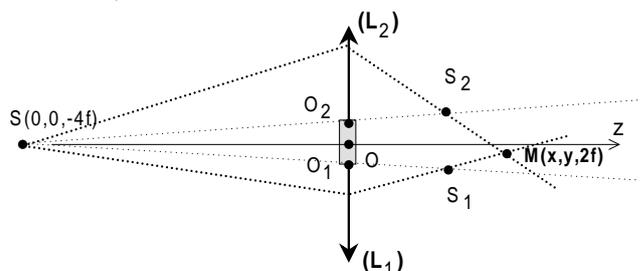
Un interféromètre à deux ondes éclairé par une source monochromatique ponctuelle S superpose en un point M deux rayons (1) et (2), déphasés de $\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda_0} ([SM]_2 - [SM]_1)$. L'intensité en M est fonction de ce déphasage, de

la forme

$$\begin{aligned}
 I(M) &= |\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2|^2 \quad \text{avec } \mathcal{A}_2 = \alpha \mathcal{A}_1 \exp i\Delta\varphi \\
 &= |\mathcal{A}_1|^2 + |\mathcal{A}_2|^2 + \alpha \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_1^* \exp -i\Delta\varphi + \alpha \mathcal{A}_1^* \mathcal{A}_1 \exp i\Delta\varphi \\
 &= I_1 + I_2 + 2|\alpha \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_1^*| \cos \Delta\varphi \quad \text{avec } I_1 = |\mathcal{A}_1|^2 \text{ et } I_2 = |\mathcal{A}_2|^2 = |\alpha \mathcal{A}_1|^2 \text{ donc } |\alpha \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_1^*| = \sqrt{I_1 I_2} \\
 &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi
 \end{aligned}$$

Pour le calcul de $\Delta\varphi$, il est souvent pratique d'utiliser les images S_1 et S_2 du point source S par chacune des deux voies de l'interféromètre, comme illustré ci-dessous pour le dispositif *bilentille de Billet* constitué par les deux moitiés (L_1) et (L_2) d'une même lentille décalées latéralement de manière symétrique par rapport à Sz .

Soit un point M dans la zone de recouvrement géométrique des deux faisceaux. Tout rayon émis par S et passant par (L_1) (resp. (L_2)) passe ensuite par l'image S_1 (resp. (S_2)) de S par (L_1) (resp. (L_2)). On utilise cette propriété pour construire les rayons transmis par les demi-lentilles pour atteindre M (droites S_1M et S_2M) et les rayons incidents correspondants.



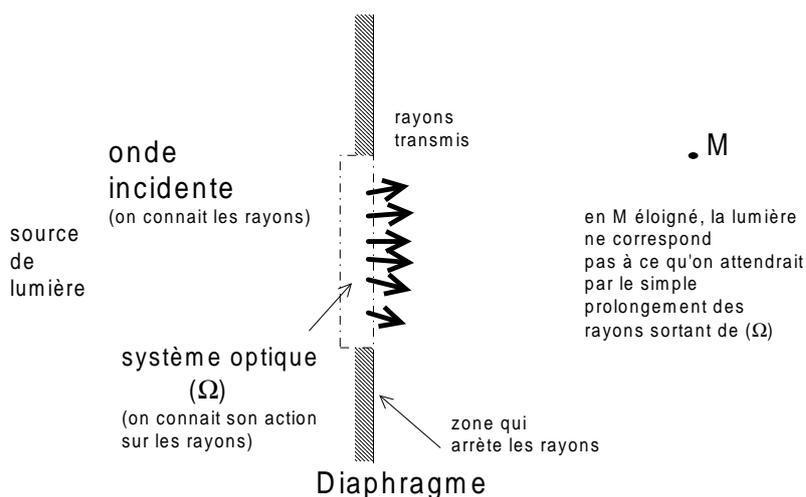
On a $[SM]_2 - [SM]_1 = [SS_2] + S_2M - ([SS_1] + S_1M)$.

$[SS_2]$ possède la même valeur pour tous les rayons joignant S et son image S_2 , c'est par exemple la valeur calculée sur le rayon SO_2S_2 . On a la même propriété qui entraîne $[SS_1]=SO_1S_1$, terme qui par symétrie est égal à SO_2S_2 . On a donc $[SS_2] = [SS_1]$ et le calcul de $[SM]_2 - [SM]_1$ se réduit à celui de $S_2M - S_1M$, géométriquement très simple, d'où la simplification

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda_0} (S_2M - S_1M).$$

1.4 Le phénomène de diffraction

Introduction



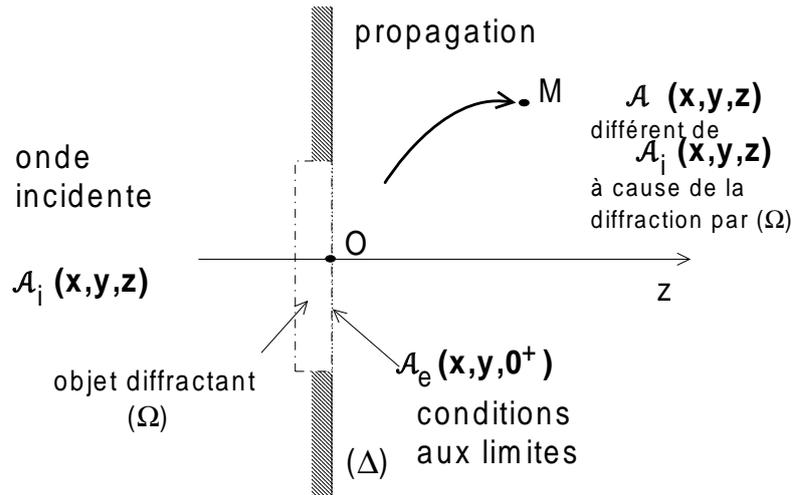
En M suffisamment éloigné du diaphragme, la lumière obtenue ne correspond pas à ce qu'on attendrait par un simple prolongement des rayons lumineux sortant de (Ω). Ce phénomène, appelé diffraction, va être modélisé en considérant la lumière comme une onde électromagnétique se propageant dans l'espace. Lorsqu'une onde incidente éclaire un système de géométrie donnée, il faudrait pour connaître l'expression de l'onde en tout point de l'espace résoudre les équations de propagation d'une onde électromagnétique, déduite des équations de Maxwell, en tenant compte des conditions aux limites fixées par l'onde incidente et la géométrie du système. Ceci est en général extrêmement difficile⁸.

8. exemple où le problème est soluble analytiquement : faisceau gaussien dans une cavité laser, Cf 'Optical electronics in modern

Le problème de la diffraction d'une onde incidente par un objet (Ω) devient plus facile à résoudre en se plaçant dans le cadre présenté ici, qui convient pour la plupart des situations expérimentales rencontrées.

Première étape : l'objet diffractant (Ω) possède un plan de sortie $z = 0$ porté par un plan (Δ) opaque sur le reste de sa surface. Les sources de lumière sont situées avant (Δ). À partir des caractéristiques de l'onde incidente et des propriétés physiques de (Ω), il faut déterminer l'amplitude émergente $\mathcal{A}_e(x, y, 0^+)$ en tout point du plan $z = 0^+$.

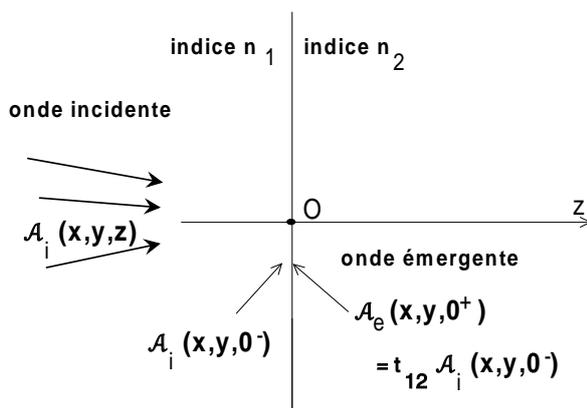
Deuxième étape : la distribution d'amplitude $\mathcal{A}_e(x, y, 0^+)$ dans le plan de sortie de (Δ) définit les conditions initiales qui, combinées aux équations de propagation d'une onde électromagnétique, déterminent l'amplitude de l'onde observée dans tout l'espace $z > 0$.⁹



Les calculs de diffraction donnent des résultats généralement en très bon accord avec l'expérience tant que les objets diffractants restent grands devant la longueur d'onde (pour les réseaux diffractants, les résultats restent corrects s'il y a moins de 600 traits par millimètre, soit des dimensions caractéristiques supérieures à $1,5 \mu\text{m}$).

1.4.1 Problème des conditions aux limites : Facteur de transmission d'un système optique

Cas particulier : plan de séparation entre deux milieux ('dioptré plan').



Une onde d'amplitude complexe $\mathcal{A}_i(x, y, z)$ traverse dans le plan $z = 0$ l'interface entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 . Les équations de Maxwell permettent de calculer l'amplitude complexe $\mathcal{A}_e(x, y, 0^+)$ en $z = 0^+$ pour l'onde transmise dans le milieu n_2 . On note $\mathcal{A}_e(x, y, 0^+) = t_{12} \mathcal{A}_i(x, y, 0^-)$. Ce coefficient t_{12} est fonction des indices, de l'angle d'incidence et de la polarisation mais on pourra le supposer uniforme dans les conditions de Gauss et l'approximation scalaire. t_{12} est le facteur de transmission de l'interface pour l'amplitude (ou coefficient de transmission pour l'amplitude).

Cas général : système optique d'épaisseur non nulle

Soit une onde incidente $\mathcal{A}_i(x, y, z)$ éclairant le plan $z = 0$.

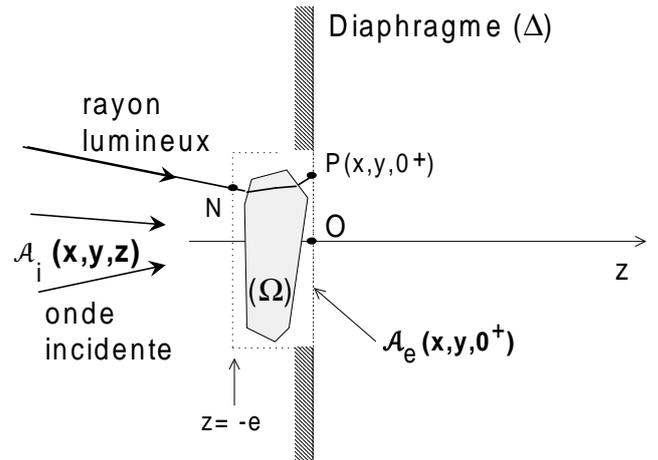
Soit un objet (Ω) disposé entre les plans $z = -e$ et $z = 0$ (exemple : lentille, prisme, lame déformée, etc.). On suppose qu'on sait évaluer la trajectoire des rayons lumineux qui le traversent. Le reste du plan $z = 0$ est opaque. Le système objet+ plan opaque sera appelé 'diaphragme' et généralement noté Δ .

communication', A. Yariv, 5 ième édition, p 48-51

9. Ce problème est conceptuellement analogue à la détermination de la forme d'une corde vibrante en tout point et à tout instant, connaissant l'équation de propagation à une dimension et les conditions initiales de la corde (position et vitesse de chaque point à l'instant origine), ce qu'on appelle parfois le problème de Cauchy.

On connaît l'onde incidente $\mathcal{A}_i(x, y, z)$ donc les rayons lumineux associés. Soit celui coupant le plan $z = -e$ en N , traversant (Ω) puis coupant le plan $z = 0$ en $P(x, y, 0)$. L'amplitude complexe émergeant en P est de la forme

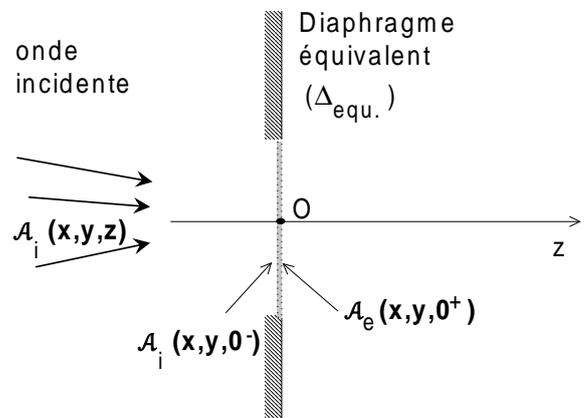
$$\mathcal{A}_e(x, y, 0) = \alpha \mathcal{A}_i(N) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} [NP]_{\text{rayon}}$$



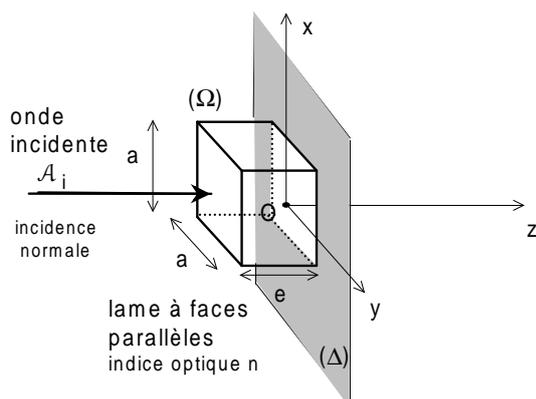
Pour simplifier la description du système, on définit un diaphragme sans épaisseur dans le plan $z = 0$, équivalent au diaphragme réel, et caractérisé par son **facteur de transmission** $t_{\Delta}(x, y)$ tel que

$$\underbrace{\mathcal{A}_e(x, y, 0^+)}_{\text{connu par le calcul précédent}} = t_{\Delta}(x, y) \underbrace{\mathcal{A}_i(x, y, 0^-)}_{\text{amplitude complexe de l'onde incidente en } z=0}$$

L'intérêt de cette démarche est de pouvoir exprimer l'amplitude obtenue dans le plan $z = 0^+$ du fait des propriétés physiques du diaphragme réel, en fonction de l'amplitude complexe de l'onde incidente **dans le plan** $z = 0^-$, sans avoir à préciser l'épaisseur réelle de l'objet diffractant ni le trajet des rayons lumineux qui le traversent. De plus $t_{\Delta}(x, y)$ prend une forme simple pour de nombreux systèmes optiques comme on va le justifier maintenant.



1.4.2 Exemple : lame à faces parallèles ; généralisation



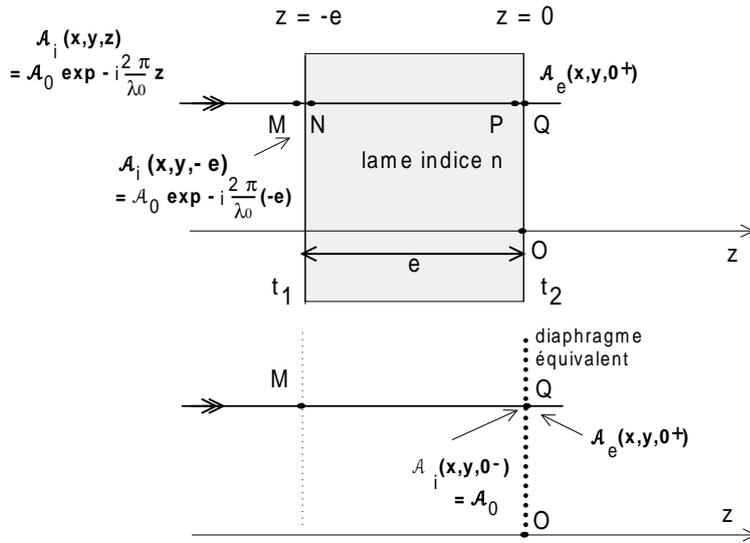
L'objet (Ω) est une lame transparente à faces parallèles d'épaisseur e , de hauteur et de largeur a , d'indice optique n , insérée dans un plan opaque. Sa face de sortie est centrée en O dans le plan $z = 0$.

Ce dispositif est éclairé par une onde plane monochromatique d'amplitude complexe $\mathcal{A}_i(x, y, z) = \mathcal{A}_0 \exp -i\vec{k}\cdot\vec{r}$. On suppose l'incidence normale dans le vide d'où $\vec{k}(0, 0, \frac{2\pi}{\lambda_0})$ et $\mathcal{A}_i(x, y, z) = \mathcal{A}_0 \exp -i\frac{2\pi}{\lambda_0}z$. On rappelle la relation $\frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c_0}$.

t_1 et t_2 désignent les facteurs de transmission des faces d'entrée et de sortie.

Les rayons en incidence normale ne sont pas déviés par les interfaces.

* Propagation de l'onde dans le diaphragme réel



Soit un rayon traversant la lame et coupant le plan $z = 0$ en $Q(x, y, 0)$. On a les relations

$$\begin{cases} \mathcal{A}(M) = \mathcal{A}_0 \exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} (-e) \\ \mathcal{A}(N) = t_1 \mathcal{A}(M) \\ \mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(N) \exp -i 2\pi \frac{[NP]}{\lambda_0} \\ \text{(déphasage pour la propagation} \\ \text{de } N \text{ à } P \text{ suivant un rayon} \\ \text{avec } [NP] = ne \\ \mathcal{A}(Q) = t_2 \mathcal{A}(P) \end{cases}$$

On peut montrer que la conservation de l'énergie pour ce problème à symétrie de translation fait qu'il n'y a pas d'atténuation de l'amplitude entre $z = -e$ et $z = 0$.

On a $[NP] = ne$ d'où l'amplitude complexe de l'onde émergeant dans le plan $z = 0^+$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_e(Q) &= t_1 t_2 \exp -i 2\pi \frac{ne}{\lambda_0} \mathcal{A}_0 \exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} (-e) \\ &= t_1 t_2 \mathcal{A}_0 \exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} (n-1)e \end{aligned}$$

* Propagation de l'onde en présence du diaphragme équivalent

L'onde incidente en $z = 0^-$ sur le diaphragme équivalent sans épaisseur possède l'amplitude complexe $\mathcal{A}_i(x, y, 0^-) = \mathcal{A}_0$.

L'amplitude transmise en $z = 0^+$ vaut $\mathcal{A}_e(x, y, 0^+) = t_1 t_2 \mathcal{A}_0 \exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} (n-1)e$ au niveau de la lame et 0 au niveau de sa monture opaque.

* Facteur de transmission du diaphragme équivalent

Par définition,

$$t_{\Delta}(x, y) = \frac{\mathcal{A}_e(x, y, 0^+)}{\mathcal{A}_i(x, y, 0^-)} = \begin{cases} t_1 t_2 \exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} (n-1)e & \text{pour } |x|, |y| < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On introduit la fonction $\text{rect}_a(x)$ qui vaut 1 pour $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$ et 0 ailleurs. On écrit alors

$$t_{\Delta}(x, y) = t_1 t_2 \exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} (n-1)e \text{rect}_a(x) \text{rect}_a(y)$$

Par abus de langage, on dira que $t_{\Delta}(x, y)$ est le facteur de transmission du diaphragme réel.

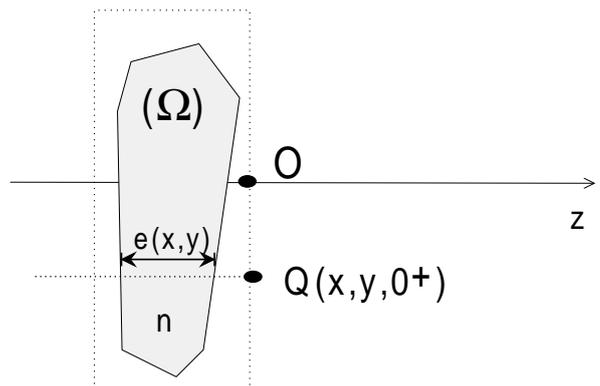
* Généralisations importantes :

- l'expression établie ici pour une onde plane en incidence normale reste valable pour une onde incidente quelconque dans les conditions de Gauss (rayons formant des angles petits avec Oz), avec le même niveau d'approximation que celui fait en traitant des ondes sphériques à l'approximation parabolique.

- lorsque les faces de la lame ont des formes quelconques avec des normales formant des angles petits avec Oz , on peut montrer que le facteur de transmission reste de la forme

$$\exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} (n-1) e(x, y)$$

où $e(x, y)$ est l'épaisseur de la lame parallèlement à Oz au niveau du point $Q(x, y, 0)$. Applications : prismes de petit angle, lentilles, lames à faces non planes, etc.



La démarche suivie ici revient à analyser la propagation de la lumière par l'approche simple que constitue l'optique géométrique, pour ensuite y rétablir la notion de phase. On pourra ainsi décrire correctement la plupart des observations sans avoir eu besoin de résoudre les équations de Maxwell.

1.4.3 Problème de la propagation d'une onde lumineuse

Notation : dans la suite, λ désignera la longueur d'onde dans le vide, sauf indication contraire.

La mise en place d'un diaphragme dans le plan $z = 0$ modifie la propagation de l'onde. On ne connaît plus la forme des rayons lumineux dans l'espace $z > 0$ donc on ne peut plus utiliser la méthode précédente pour déterminer l'amplitude complexe en un point $M(x, y, z > 0)$. Il faut alors revenir aux équations de Maxwell.

Ces équations imposent à l'onde de représentation complexe $\mathcal{S}(x, y, z, t) = \mathcal{A}(x, y, z) \exp i\omega t$ l'équation de propagation $\nabla^2 \mathcal{S} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial t^2} = 0$ dans l'espace libre.

On cherche une solution d'amplitude complexe $\mathcal{A}(x, y, z)$ valable en tout point de l'espace $z > 0$ et respectant les conditions aux limites $\mathcal{A}(x, y, 0) = \mathcal{A}_e(x, y, 0)$ dans le plan $z = 0$.

Ce problème mathématique a été résolu en utilisant différentes méthodes et approximations, en particulier par Kirchhoff (1882) ou Rayleigh associé à Sommerfeld (1896). Ces derniers ont obtenu :

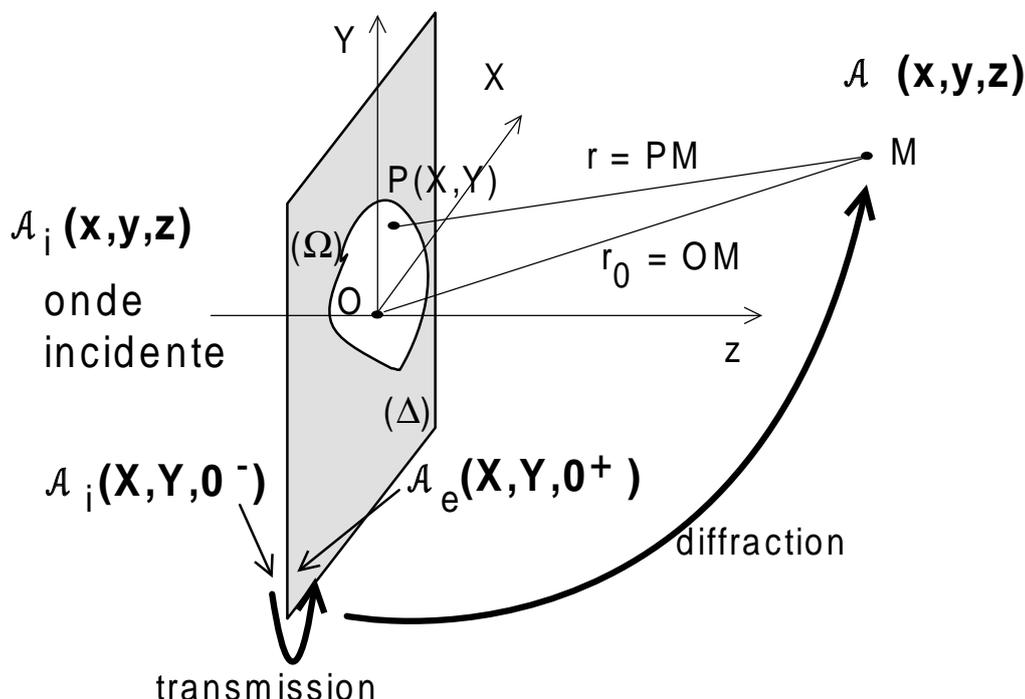
$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_e(X, Y, 0) dX dY \frac{z}{r} \frac{\exp -i2\pi \frac{r}{\lambda}}$$

avec $r = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + z^2}$.

L'une des formes de la démonstration de cette expression est donnée en annexe 1.6.5

Remarque : la démarche suivie ici est conceptuellement analogue à un problème classique de mécanique (appelé problème de Cauchy). Connaissant la géométrie d'une corde à l'instant initial et l'équation de propagation d'une onde mécanique sur ce support, il est possible de déduire la géométrie de la corde à n'importe quel instant ultérieur.

Interprétation Physique.



$M(x, y, z)$ est le point où l'on calcule l'amplitude diffractée, avec $r = PM$. $P(X, Y)$ s'interprète comme le point courant du plan $z = 0$ et l'intégrale représente la sommation pour tous les points P ; dans la suite, on restera cohérent avec les notations apparaissant dans ces intégrales en notant $(X, Y, 0)$ ou (X, Y) les coordonnées du point courant du plan $z = 0$, et (x, y, z) les coordonnées du point où est évaluée la diffraction.

Le terme $\frac{z}{r}$ correspond au cosinus de l'angle θ que forme la direction PM avec l'axe Oz , on pourra le considérer égal à 1 dans les conditions de l'approximation paraxiale. On retrouve une formule analogue à celle déduite par Fresnel du principe de Huygens (cf 1.6.4), où l'élément de surface $dX dY$ centré sur le point P rayonnerait en M l'ondelette sphérique d'amplitude complexe $\frac{i}{\lambda} \mathcal{A}_e(X, Y, 0) dX dY \frac{\exp -i2\pi \frac{r}{\lambda}}$

1.4.4 Formules de Fresnel pour la diffraction

On rassemble les résultats précédents avant de préciser quelques hypothèses et simplifications permettant des calculs analytiques plus simples mais en bon accord avec l'expérience :

- on suppose que Ω possède des dimensions latérales inférieures à une longueur caractéristique a et que son plan de sortie contient le point origine O . Les calculs précédents sont valables aux points $M(x, y, z)$ éloignés de O mais près de l'axe ($OM \gg a$; $|\frac{x}{z}|, |\frac{y}{z}| \ll 1$) avec donc $\frac{z}{r} \simeq 1$.
- l'amplitude émergente du diaphragme vaut $\mathcal{A}_e(X, Y, 0) = \mathcal{A}_i(X, Y, 0) t_\Delta(X, Y)$.
- pour un point $P(X, Y)$ du plan $z = 0$, la longueur $r = PM$ se développe en :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + z^2} = z \left[1 + \left(\frac{X-x}{z} \right)^2 + \left(\frac{Y-y}{z} \right)^2 \right]^{1/2} \\ r^{(2)} &= z + \frac{1}{2} \frac{(X-x)^2}{z} + \frac{1}{2} \frac{(Y-y)^2}{z}, \text{ somme des termes d'ordre 0, 1 et 2 en } \left(\frac{x}{z} \right), \left(\frac{y}{z} \right), \left(\frac{X}{z} \right), \left(\frac{Y}{z} \right) \\ r^{(2)} &= z + \frac{x^2 + y^2}{2z} + \frac{X^2 + Y^2}{2z} - \frac{xX + yY}{z} \\ r^{(2)} &= r_0 + \frac{X^2 + Y^2}{2z} - \frac{xX + yY}{z} \quad \text{en notant } r_0 = z + \frac{x^2 + y^2}{2z} = OM \end{aligned}$$

Si on remplace r par sa valeur approchée $r^{(2)} = r - \delta r$, la fonction $\exp -i2\pi \frac{r}{\lambda} = \exp -i2\pi \frac{r^{(2)}}{\lambda} \exp -i2\pi \frac{\delta r}{\lambda}$ est approximativement égale à $\exp -i2\pi \frac{r^{(2)}}{\lambda}$ si $\delta r \ll \lambda$. La comparaison à l'expérience pour l'intensité diffractée montre que dans les conditions usuelles, δr est assez petit pour justifier le remplacement de r par son développement limité à l'ordre 2.

La fonction $\frac{1}{r}$ varie beaucoup plus lentement avec r . On peut remplacer $\frac{1}{r}$ par $\frac{1}{z}$ sans en changer significativement la valeur numérique.

Les simplifications proposées conduisent à deux formes équivalentes pour l'amplitude complexe de l'onde diffractée au point M par le diaphragme Δ (Formules de Fresnel pour la diffraction) :

Forme I

En utilisant $r = r_0 + \frac{X^2 + Y^2}{2z} - \frac{xX + yY}{z}$, avec $r_0 = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$ indépendant de X, Y donc pouvant sortir de l'intégrale :

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \int \int_{-\infty}^{+\infty} dX dY \mathcal{A}_i(X, Y, 0) t_\Delta(X, Y) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2z} \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xX + yY}{z}$$

Forme II

En utilisant $r = z + \frac{1}{2} \frac{(X-x)^2}{z} + \frac{1}{2} \frac{(Y-y)^2}{z}$:

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} z \int \int_{-\infty}^{+\infty} dX dY \mathcal{A}_i(X, Y, 0) t_\Delta(X, Y) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{(X-x)^2 + (Y-y)^2}{2z} \right]$$

Remarques : les formes I et II correspondent à deux formulations mathématiques différentes, l'une ou l'autre étant la plus facile à utiliser suivant les cas :

Pour deux fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$, le produit de convolution s'écrit

$$f * g(x, y) = \int \int f(X, Y) g(x - X, y - Y) dX dY$$

la forme II s'identifie à un facteur près à la convolution de la fonction $[\mathcal{A}_i(X, Y, 0) t_\Delta(X, Y)]$ par la fonction $\exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{X^2 + Y^2}{2z} \right]$, convolution prise au point (x, y) .

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} z \left\{ [\mathcal{A}_i(X, Y, 0) t_\Delta(X, Y)] * \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{X^2 + Y^2}{2z} \right) \right\} (x, y)$$

Pour la forme I, l'intégrale pourra s'écrire sous une forme mathématique facile à calculer. On commence par la réécrire :

$$\int \int_{-\infty}^{+\infty} dX dY \left[\mathcal{A}_e(X, Y, 0) \times \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2z} \right] \exp i2\pi \left(X \left\{ \frac{x}{\lambda z} \right\} + Y \left\{ \frac{y}{\lambda z} \right\} \right)$$

Pour une fonction $F(u, v)$, la transformée de Fourier inverse écrite pour les variables (r, s) sera notée :

$$\bar{\mathcal{F}}_{[F(u, v)]}(r, s) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} du dv [F(u, v)] \exp i2\pi(u\{r\} + v\{s\})$$

identification des variables d'intégration : $u \leftrightarrow X, v \leftrightarrow Y$

identification de leurs facteurs dans $\exp i2\pi(u\{r\} + v\{s\})$ et $\exp i2\pi(X\{\frac{x}{\lambda z}\} + Y\{\frac{y}{\lambda z}\})$: $r \leftrightarrow \frac{x}{\lambda z}, s \leftrightarrow \frac{y}{\lambda z}$.

identification du restant : $F(u, v) \leftrightarrow \mathcal{A}_e(X, Y, 0) \times \exp -i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2+Y^2}{2z}$ d'où l'identification de l'intégrale à :

$$\overline{\mathcal{F}} \left[\mathcal{A}_e(X, Y, 0) \exp -i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2z} \right] \left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z} \right)$$

L'intégrale est la **transformée de Fourier inverse** de la fonction $\left[\mathcal{A}_e(X, Y, 0) \exp -i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2+Y^2}{2z} \right]$ écrite pour les variables $(r = \frac{x}{\lambda z}, s = \frac{y}{\lambda z})$.

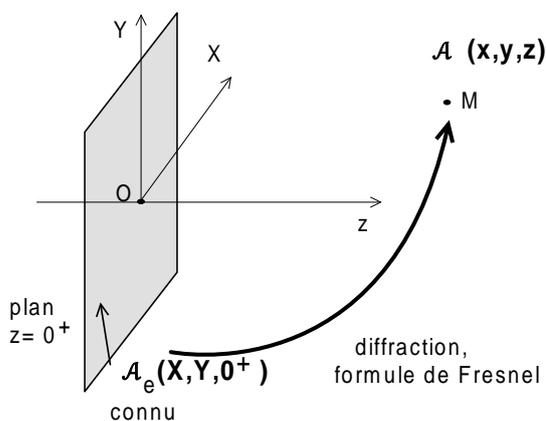
L'amplitude complexe diffractée en $M(x, y, z)$ peut donc aussi s'écrire sous la forme :

Forme I

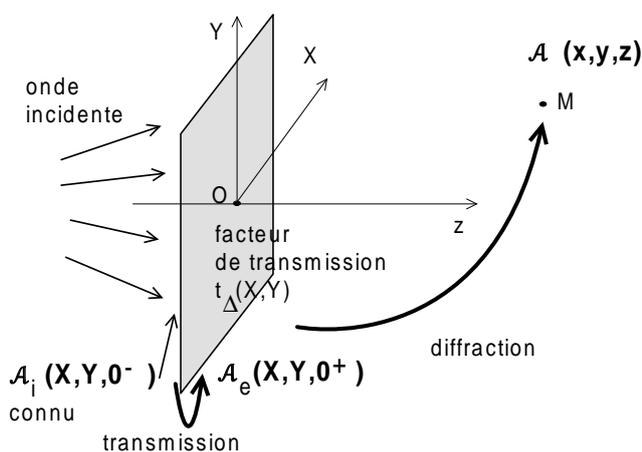
$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp -i\frac{2\pi}{\lambda} r_0 \overline{\mathcal{F}} \left[\mathcal{A}_e(X, Y, 0) \exp -i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2z} \right] \left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z} \right)$$

Les transformées de Fourier de très nombreuses fonctions à une ou deux dimensions sont disponibles dans des tables où on trouvera directement la forme analytique de l'intégrale donc celle de $\mathcal{A}(x, y, z)$.

Commentaires physique : dans la pratique, on aura à faire ce calcul pour les deux situations équivalentes suivantes :



Connaissant l'amplitude complexe $\mathcal{A}_e(X, Y, 0)$ sur tout le plan $z = 0^+$, on en déduit $\mathcal{A}(M)$, l'amplitude complexe de l'onde rayonnée en M par les conditions initiales $\mathcal{A}_e(X, Y, 0)$. Cette interprétation est celle justifiant pourquoi les conditions aux limites reconstituées par un hologramme font qu'un observateur voit un objet restitué comme s'il était effectivement présent donc à 3 dimensions (Détail des calculs dans le Problème 2). Autre exemple : propagation d'un faisceau laser gaussien, développée à la page suivante.



On connaît l'onde incidente et on déduit $\mathcal{A}_e(X, Y, 0) = \mathcal{A}_i(X, Y, 0) t_\Delta(X, Y)$ pour retrouver la situation précédente.

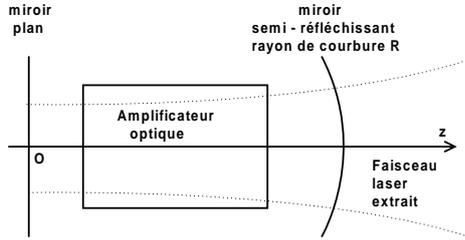
On interprète $\mathcal{A}(M)$ comme l'amplitude complexe produite en M par la diffraction de l'onde incidente au niveau du diaphragme. Applications développées au chapitre II et III du cours : déformation de l'image d'une étoile par un télescope, diffraction par un réseau pour réaliser un spectroscopie, modélisation de la dimension finie du réseau pour évaluer le pouvoir de résolution du spectroscopie.

Le lien qualitatif entre limitation de l'extension latérale d'une onde et déformation par diffraction dans la suite de l'espace est discuté en 1.6.7.

1.5 Exemples d'applications

1.5.1 Faisceaux gaussiens

Calcul de l'amplitude complexe diffractée



Un laser est constitué principalement d'un amplificateur de lumière et d'une cavité optique. Le rôle de la cavité est de renvoyer les photons de la sortie de l'amplificateur vers son entrée, de manière à obtenir en régime stationnaire dans la cavité une onde intense, dont une petite fraction est extraite à travers un miroir de transmission non nulle. L'ensemble est dans l'air d'indice supposé égal à 1.

Une forme d'onde souvent présente dans les cavités à symétrie de révolution d'axe Oz est appelée 'Faisceau Gaussien'¹⁰. Pour la cavité schématisée ci-dessus, l'amplitude complexe dans le plan $z = 0$ s'écrit :

$$\mathcal{A}(X, Y, 0) = \mathcal{A}_0 \exp -k \frac{X^2 + Y^2}{2 z_R}$$

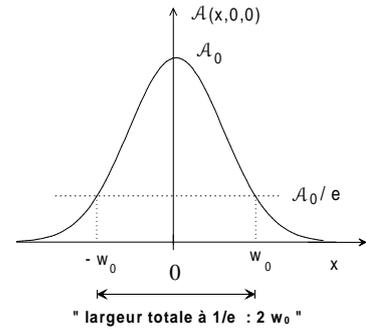
avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ le module du vecteur d'onde et z_R une longueur caractéristique appelée 'paramètre de Rayleigh'.

L'amplitude de cette onde tend exponentiellement vers 0 quand on s'éloigne de l'axe. Elle est réduite d'un facteur e à une distance de l'axe notée w_0 et vérifiant

$$\exp -k \frac{w_0^2}{2z_R} = \exp(-1) \Leftrightarrow w_0 = \sqrt{\frac{2z_R}{k}} = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}}$$

d'où l'écriture équivalente

$$\mathcal{A}(X, Y, 0) = \mathcal{A}_0 \exp -\frac{X^2 + Y^2}{w_0^2}$$



L'objectif est de déterminer à partir de $\mathcal{A}(X, Y, 0)$ l'amplitude de cette onde en tout point de l'espace $z \geq 0$ afin d'en étudier quelques caractéristiques importantes. Le problème est analogue à celui de la diffraction par un objet de facteur de transmission $t_{\Delta}(X, Y) = \exp -k \frac{X^2 + Y^2}{2z_R}$ éclairé par une onde plane en incidence normale et d'amplitude a_0 . On utilise la formule de Fresnel (forme -I)¹¹ et on calcule l'amplitude diffractée en des points proches de l'axe (approximation paraxiale).

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp -ikr_0 \overline{\mathcal{F}} \left[\mathcal{A}_0 \exp -k \frac{x^2 + y^2}{2z_R} \exp -ik \frac{x^2 + y^2}{2z} \right] \left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z} \right)$$

Il faut donc évaluer la transformée de Fourier inverse de la fonction

$$\mathcal{A}_0 \exp -k \frac{X^2 + Y^2}{2z_R} \exp -ik \frac{X^2 + Y^2}{2z} = \mathcal{A}_0 \exp -k \frac{X^2 + Y^2}{2} \left(\frac{1}{z_R} + \frac{i}{z} \right)$$

Les tables de transformées de Fourier donnent

$$\overline{\mathcal{F}}_{\left[\exp -\frac{\pi}{b^2}(u^2 + v^2) \right]}(r, s) = b^2 \exp -\pi b^2(r^2 + s^2)$$

et on utilise cette formule pour $r = \frac{x}{\lambda z}$, $s = \frac{y}{\lambda z}$ et $\frac{\pi}{b^2} = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{z_R} + \frac{i}{z} \right) \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{\frac{k}{2\pi} \left(\frac{1}{z_R} + \frac{i}{z} \right)}$ pour déduire :

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp -ik \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \right) \frac{1}{\frac{k}{2\pi} \left(\frac{1}{z_R} + \frac{i}{z} \right)} \mathcal{A}_0 \exp -\pi \frac{1}{\frac{k}{2\pi} \left(\frac{1}{z_R} + \frac{i}{z} \right)} \frac{x^2 + y^2}{\lambda^2 z^2}$$

10. La résolution des équations de Maxwell dans la cavité d'un laser pour évaluer son amplitude complexe est faite dans Yariv, Optical Electronics in Modern Communications 5ième édition p 48-53

11. en supposant que l'amplificateur ne modifie pas la diffraction et en négligeant les effets d'interférence entre l'onde aller et l'onde retour dans la cavité

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{A}_0 \frac{i}{\lambda z} \frac{2\pi}{k} \frac{z z_R}{z + i z_R} \exp -ikz \exp -ik \frac{x^2 + y^2}{2z} \exp -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{2\pi}{k\lambda} \frac{z_R}{z + i z_R} \frac{x^2 + y^2}{2z} \\
&= \mathcal{A}_0 \frac{i z_R}{z + i z_R} \exp -ikz \exp -k \frac{x^2 + y^2}{2z} \left(i + \frac{z_R}{z + i z_R} \right)
\end{aligned}$$

avec $\frac{i z_R}{z + i z_R} = \frac{z_R}{z_R - iz}$ et $i + \frac{z_R}{z + i z_R} = \frac{iz - z_R + z_R}{z + i z_R} = \frac{z}{z_R - iz}$ donc

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \mathcal{A}_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp -ikz \exp -\frac{k}{z_R - iz} \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Propriétés du faisceau gaussien

On discute la forme de l'onde selon la position z .

- pour $z \ll z_R$, $\frac{z_R}{z_R - iz} \simeq 1$ et $z_R - iz \simeq z_R$. L'amplitude se simplifie en

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \mathcal{A}_0 \underbrace{\exp -ikz}_{\text{contribue à la phase}} \underbrace{\exp -k \frac{x^2 + y^2}{2z_R}}_{\text{contribue à l'amplitude}}$$

La phase est uniforme à z fixé, la relation $\vec{k} = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ indique que les rayons lumineux correspondant à cette onde sont parallèle à Oz au niveau de $z = 0$ et le restent ensuite. La structure latérale de l'onde n'est pas modifiée par la diffraction, tout se passe comme prévu par l'optique géométrique.

- pour $z \gg z_R$, $\frac{1}{z_R - iz} \simeq \frac{i}{z}$. L'amplitude devient

$$\mathcal{A}(x, y, z) = i \frac{z_R}{z} \mathcal{A}_0 \exp -ikz \exp -ik \frac{x^2 + y^2}{2z}$$

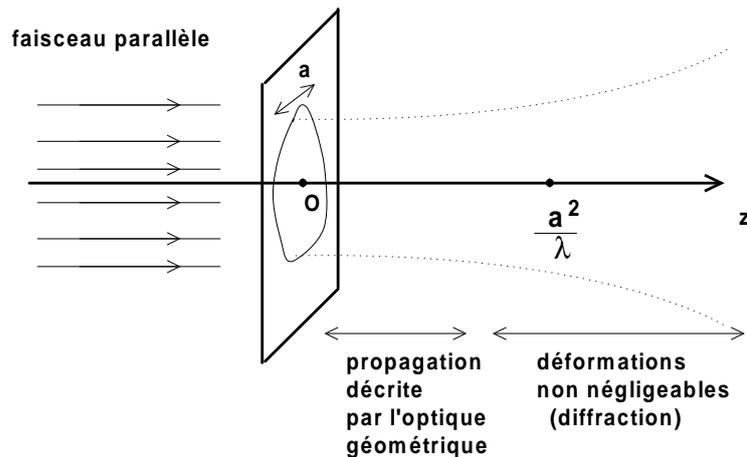
On retrouve l'amplitude complexe d'une onde sphérique de centre O écrite à l'approximation parabolique. Dans un plan de position z , l'éclairement du plan $z = 0$ produit le même effet qu'une source ponctuelle en O . L'onde diffractée est très différente de l'onde initiale.

Généralisation

On vient de voir que le faisceau gaussien présente dans le plan $z = 0$ une extension latérale $w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}}$, et que sa structure latérale est fortement déformée par la diffraction pour z de l'ordre de $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ ou plus. On peut montrer que cette propriété de la diffraction est très générale. Si l'extension latérale d'un faisceau lumineux est de l'ordre d'une dimension caractéristique a dans le plan $z = 0$, cette extension est peu modifiée si on observe la lumière à une distance du plan petite devant la valeur caractéristique $\frac{a^2}{\lambda}$. Dans cette zone, l'éclairement observé est celui prévu par l'optique géométrique. Pour $a = 1 \text{ mm}$ et $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, cela correspond à $\frac{a^2}{\lambda} = 2 \text{ m}$ et cette distance est d'autant plus courte que a est petit.

Au delà, la diffraction joue un rôle se traduisant par une déformation de l'extension latérale de l'onde qui se calcule par la formule de Fresnel ou ses formes simplifiées qu'on verra au chapitre suivant.¹²

12. Quand on observe la lumière produite par un émetteur, par exemple par fluorescence d'une molécule unique déposée sur une surface, en captant la lumière émise par une fibre optique, on retrouve ces deux cas de figure : si l'onde n'a pas le temps de se déformer entre l'émetteur et la fibre, on parle d'observation en champ proche. Si pour une fibre plus éloignée l'onde a eu le temps de se déformer par la propagation (la diffraction), il s'agit d'observation en champ lointain.



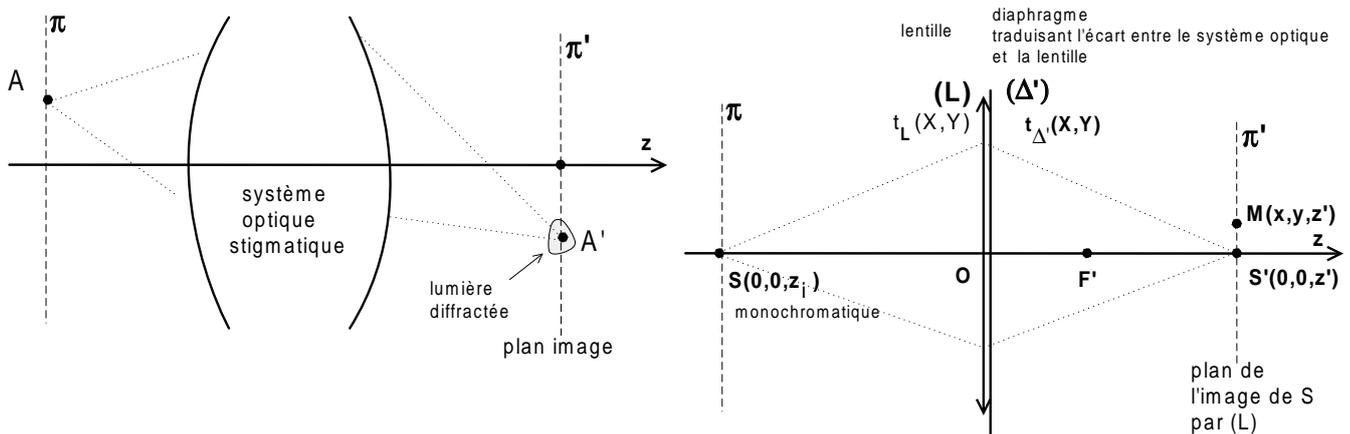
1.5.2 Diffraction dans le plan de formation de l'image d'une source

Le phénomène de diffraction entraîne des modifications de la propagation de la lumière par rapport à ce qui est prévu dans le cadre de l'optique géométrique. La diffraction intervient en particulier lorsque des diaphragmes situés sur le trajet de l'onde viennent limiter son extension latérale, où lorsque des inhomogénéités du milieu (défauts dans une lentille, poussières) viennent perturber la propagation. Une situation de grand intérêt pratique est celle où l'on observe l'image d'un objet par un système optique en étudiant les effets sur cette image de la diffraction introduite par l'instrument d'optique¹³.

Soit un objet quelconque émettant ou réfléchissant de la lumière, on le décompose en points élémentaires. Lorsqu'un de ces points a pour image 'quelque chose' qui n'est pas un simple point, l'image est déformée. Pour décomposer le problème, on s'intéressera donc d'abord à un système optique constitué d'une unique lentille convergente¹⁴ et à l'image d'un simple point source S situé sur l'axe de la lentille. Puisque la déformation par la diffraction dépend de la longueur d'onde, on supposera cette source monochromatique.

Problème réel :

Décomposition du problème :

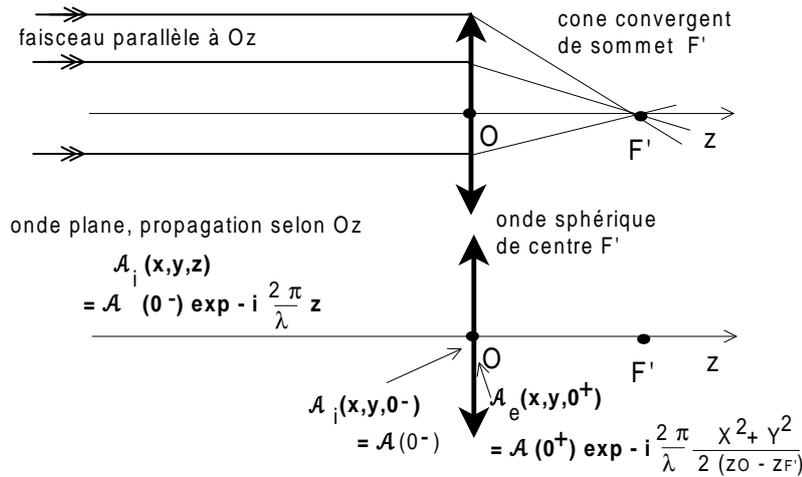


La source ponctuelle monochromatique rayonne une onde sphérique écrite à l'approximation parabolique. Elle est transmise par la lentille, pour laquelle on évalue le facteur de transmission et l'amplitude complexe dans le plan de sortie. On déterminera ensuite l'amplitude diffractée à partir de ce plan dans le reste de l'espace puis dans un plan particulier, celui de la formation de l'image de la source S par la lentille.

13. Exemple : on observe le ciel en direction de la planète Saturne, en supposant qu'à ce moment-là une étoile se trouve angulairement proche de la planète. A l'oeil, on voit deux points lumineux sans structure. Avec un télescope amateur, Saturne est nettement agrandie, son anneau se distingue parfaitement. Pour l'étoile, la taille apparente semble avoir diminué. Cet exemple illustre que le diamètre apparent de l'étoile est lié à des paramètres autres que sa seule dimension. La formation de son image sur la rétine de l'observateur fait intervenir des phénomènes de diffraction qui modifient la répartition de la lumière dans le plan de formation de l'image géométrique. C'est ce qu'on va préciser dans ce paragraphe.

14. dans les conditions de Gauss pour que ce système optique soit stigmatique, c'est à dire produise pour un objet ponctuel une image ponctuelle

Facteur de transmission d'une lentille (approche qualitative)



Un faisceau parallèle à Oz converge au foyer image F' de la lentille. En terme d'onde, ce système correspond à une onde plane de direction de propagation Oz et d'amplitude complexe $\mathcal{A}(O^-) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} z$ dans l'espace $z < 0$ que la lentille transforme en une onde sphérique de centre $F'(0, 0, f)$. Pour cette dernière, l'amplitude complexe dans le plan $z = 0^+$ s'écrit à l'approximation parabolique (cf 1.2.3) :

$$\mathcal{A}_e(X, Y, 0) = \mathcal{A}(O^+) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2(z_O - z_{F'})}$$

Le plan sans épaisseur équivalent à la lentille possède par définition le facteur de transmission :

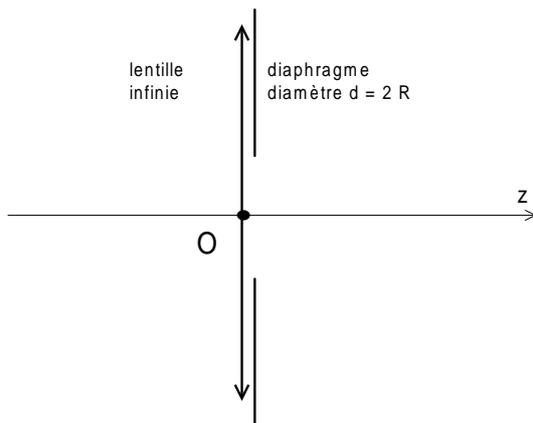
$$t_L(X, Y) = \frac{\mathcal{A}_e(X, Y, 0^+)}{\mathcal{A}(X, Y, 0^-)} \text{ qui vaut ici } \frac{\mathcal{A}(O^+)}{\mathcal{A}(O^-)} \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2f}$$

Dans la formule de Fresnel, les coefficients constants de $t_L(X, Y)$ sortent de l'intégrale. Ils se retrouvent en simples facteurs multiplicatifs de $\mathcal{A}(x, y, z)$ ce qui signifie qu'ils n'ont pas d'influence sur la répartition de la lumière diffractée dans l'espace.

Pour une lentille ne limitant pas l'extension latérale du faisceau, on utilisera :

$$t_L(X, Y) = \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2f} \text{ quels que soient } X, Y$$

et on dira qu'elle est infinie. Un calcul complet prenant en compte la géométrie de la lentille est développé en annexe 1.6.6.



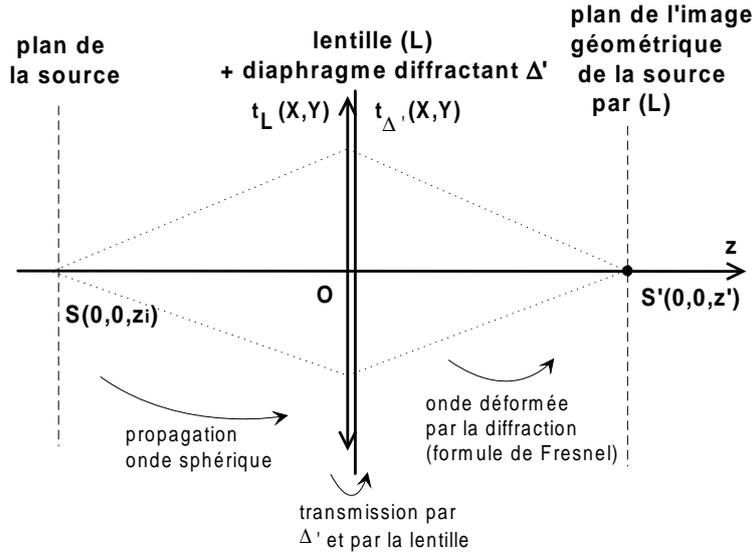
Une lentille de diamètre $2R$ disposée sur un faisceau incident plus large est décrite en accolant un diaphragme de diamètre $2R$ à une lentille infinie.

$$t_L(X, Y) = \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2f} \text{ circ}_R(X, Y)$$

avec $\text{circ}_R(X, Y) = 1$ pour $\sqrt{X^2 + Y^2} < R$ et 0 sinon. Remarque : c'est parce qu'un système limite l'extension latérale de l'onde que l'image géométrique de la source de lumière par la lentille va se trouver déformée.

Éclairement du plan image de la source

Une lentille infinie de distance focale f et d'axe Oz est placée en O . Son extension latérale est limitée par un diaphragme Δ' situé lui aussi dans le plan $z = 0$, et de facteur de transmission $t_{\Delta'}(X, Y)$. Il peut représenter par exemple la monture de la lentille. Le dispositif est dans l'air d'indice supposé égal à 1, ce qui permet de noter $k = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$.



Une source ponctuelle monochromatique $S(0,0,z_i < 0)$ émet une onde sphérique dont l'expression dans le plan $z = 0^-$ s'écrit :

$$\mathcal{A}_i(X, Y, 0^-) = \mathcal{A}_i(O) \exp ik \frac{X^2 + Y^2}{2 z_i}$$

L'amplitude transmise en $z = 0^+$ par la lentille s'obtient en multipliant l'amplitude incidente par les facteurs de transmission de la lentille et du diaphragme accolé :

$$\mathcal{A}_e(X, Y, 0^+) = \mathcal{A}_i(O) \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2z_i} \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2f} t_{\Delta'}(X, Y)$$

La formule de Fresnel permet d'en déduire l'amplitude au point $M(x, y, z)$ du demi-espace $z > 0$.

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \int \int_{-\infty}^{+\infty} dX dY \overbrace{\mathcal{A}_i(O) \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2z_i} \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2f} t_{\Delta'}(X, Y)}^{\mathcal{A}_e(X, Y, 0^+)} \times \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2z} \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xX + yY}{z}$$

On choisit d'évaluer l'amplitude diffractée dans le plan de formation de l'image géométrique S' de la source S par (L) , c'est-à-dire dans le plan $z = z'$ avec :

$$-\frac{1}{z_i} + \frac{1}{z'} = \frac{1}{f} \quad (\text{formule de conjugaison de Gauss})$$

Les termes en $X^2 + Y^2$ sous l'intégrale se rassemblent en :

$$\exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2} \left[\frac{1}{z_i} + \frac{1}{f} - \frac{1}{z'} \right] = 1$$

L'amplitude diffractée dans le plan $z = z'$ s'écrit alors :

$$\mathcal{A}(x, y, z') = \frac{i}{\lambda z'} \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \int \int_{-\infty}^{+\infty} dX dY \mathcal{A}_i(O) t_{\Delta'}(X, Y) \exp i 2\pi \left(X \frac{x}{\lambda z'} + Y \frac{y}{\lambda z'} \right)$$

avec l'écriture équivalente :

$$\mathcal{A}(x, y, z') = \frac{i}{\lambda z'} \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \mathcal{A}_i(O) \overline{\mathcal{F}}_{[t_{\Delta'}(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'} \right) \quad (\text{Formule de Fraunhofer})$$

Le phénomène de diffraction décrivant la déformation de l'image géométrique de la source de lumière est appelé 'diffraction de Fraunhofer'.

Remarques :

- La formule établie ici est valable pour une source ponctuelle sur l'axe
- Le plan de formation de l'image géométrique de la source est appelé plan de Fraunhofer.
- $t_{\Delta}(X, Y)$ est le **facteur de transmission du diaphragme accolé à la lentille infinie**. Celui de la lentille infinie s'est simplifié dans le calcul.

Par comparaison, le formalisme de la diffraction utilisé pour déterminer l'amplitude complexe en un point ailleurs que sur le plan de Fraunhofer est appelé 'diffraction de Fresnel'.

Les deux chapitres suivants développent les propriétés et les applications de la diffraction dans les conditions de Fraunhofer.

1.5.3 Synthèse des résultats à retenir

Les résultats à retenir et surtout leurs conditions d'utilisation sont résumés ci-dessous.

transmission

Formule de Fresnel

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \times \overline{\mathcal{F}}_{[\mathcal{A}_e(X, Y, 0) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2z}]} \left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z} \right)$$

avec $r_0 = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$
 et $\mathcal{A}_e(X, Y, 0) = \mathcal{A}_i(X, Y, 0) t_{\Delta}(X, Y)$.

plan de l'image de S par (L)
(plan de Fraunhofer)

Formule de Fraunhofer
(cas particulier de la formule de Fresnel)

Pour une source $S(0, 0, z_i)$ et z' vérifiant $-\frac{1}{z_i} + \frac{1}{z'} = \frac{1}{f}$.

$$\mathcal{A}(x, y, z') = \frac{i}{\lambda z'} \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \times \mathcal{A}_i(O) \overline{\mathcal{F}}_{[t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'} \right)$$

avec $r_0 = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$.
 Le plan de Fraunhofer est le plan d'équation $z = z'$.
 $t_{\Delta}(X, Y)$ est le facteur de transmission du diaphragme accolé à la lentille.

1.6 Annexes

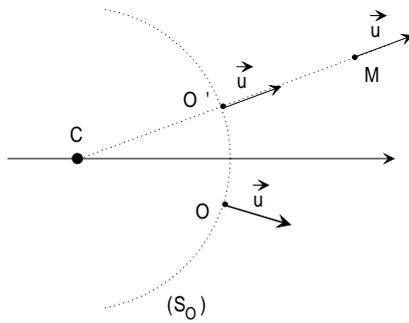
1.6.1 Onde sphérique

Soit un milieu transparent et homogène où la lumière se propage à la vitesse c . Soit une onde monochromatique possédant les deux caractéristiques suivantes :

- en tout point $M(x, y, z)$ de l'espace le vecteur unitaire \vec{u} déterminant la direction de la propagation est colinéaire au vecteur \overrightarrow{CM} , où C est un point fixé.
- il existe une sphère (S_0) de centre C et passant par l'origine O sur laquelle la vibration lumineuse à un instant donné est uniforme.

La vibration lumineuse en O est notée

$$s(0, 0, 0, t) = B_0 \cos(\omega t + \psi_0)$$



Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace choisi à l'extérieur de (S_0) et O' l'intersection de CM avec (S_0) . La vibration lumineuse en M reproduit avec une atténuation α et un retard $\Delta t_{O'M}$ celle en O' donc celle en O .

On peut montrer^a que α est proportionnel à $\frac{1}{CM}$, d'où en M la vibration lumineuse

$$s(x, y, z, t) = B_0 \frac{CO}{CM} \cos(\omega(t - \Delta t_{O'M}) + \psi_0)$$

^a. par l'égalité de la puissance lumineuse au niveau des sphères de centre C et passant par O et M respectivement

Le temps de propagation entre O' et M vaut $\Delta t_{O'M} = \frac{O'M}{c} = \frac{CM - CO'}{c} = \frac{CM}{c} - \frac{CO}{c}$. On note $\psi = \psi_0 + \frac{\omega CO}{c}$ et $\mathcal{B} = B_0 CO$ pour obtenir

$$s(x, y, z, t) = \frac{\mathcal{B}}{CM} \cos\left(\omega t - \frac{\omega CM}{c} + \psi\right)$$

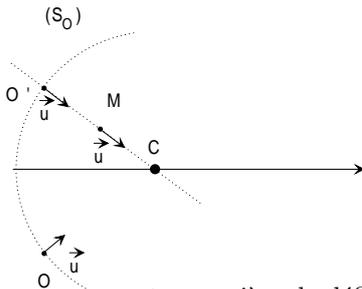
À t fixé; la phase de l'onde est uniforme sur des sphères de centre C qui constituent les surfaces d'onde, cette onde est dite sphérique. La représentation complexe associée s'écrit

$$\frac{\mathcal{B}}{CM} \exp i\left(\omega t - \frac{\omega CM}{c} + \psi\right)$$

d'où l'amplitude complexe

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{\mathcal{B}}{CM} \exp i\left(-\frac{\omega}{c} CM + \psi\right)$$

Remarque 1 : le raisonnement tenu pour M situé après O' est en fait valable pour tout M situé après C . L'onde décrite ci-dessus est appelée onde sphérique divergente de centre C .



Remarque 2 : l'onde schématisée ci-contre passe en M et O' avant C , elle est sphérique convergente de centre C . Un raisonnement analogue au précédent conduit à l'amplitude complexe

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{\mathcal{B}}{CM} \exp i\left(\frac{\omega}{c} CM + \psi\right)$$

valable pour tout point M situé avant le point de convergence C .

Remarque : une autre manière de définir une onde sphérique de centre C serait de dire que les grandeurs physiques associées en M ne dépendent que de la distance CM .

1.6.2 Onde plane homogène

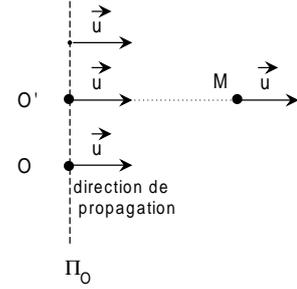
Soit un milieu transparent et homogène. Soit une onde monochromatique possédant les deux caractéristiques suivantes :

- en tout point $M(x, y, z)$ de l'espace la direction de la propagation est colinéaire à un **vecteur unitaire fixe** $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

- il existe un plan π_0 perpendiculaire à \vec{u} et passant par l'origine O sur lequel la vibration lumineuse à un instant donné est uniforme.

On note $A_0 \cos(\omega t + \psi)$ la vibration lumineuse de l'onde en O . Soit un point $M(x, y, z)$ de l'espace et O' sa projection sur π_0 parallèlement à \vec{u} . La vibration lumineuse de l'onde en M reproduit celle en O' avec un retard

$$\Delta t_{O'M} = \frac{\overline{O'M}}{c} = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}}{c} = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}$$



La vibration lumineuse est identique en O' et en O . On peut montrer¹⁵ que la propagation entre O' et M se fait sans atténuation de l'amplitude (conservation de l'énergie). La vibration lumineuse en M s'écrit alors :

$$\begin{aligned} s(x, y, z, t) &= A_0 \cos [\omega(t - \Delta t_{O'M}) + \psi] \\ &= A_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}}{c} \right) + \psi \right] \end{aligned}$$

La phase de l'onde est uniforme à t fixé pour les points tels que $\frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}}{c}$ est constant donc sur les plans perpendiculaires à \vec{u} . Les surfaces d'onde sont des plans, cette onde est appelée onde plane homogène.

En introduisant le **vecteur d'onde** $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$, on retrouve l'expression générale de la vibration lumineuse d'une onde plane :

$$s(x, y, z, t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \psi)$$

associée à l'amplitude complexe

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y, z) &= A_0 \exp i(-\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \psi) \\ &= \mathcal{A}(0, 0, 0) \exp i(-\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}) \\ &= \mathcal{A}(0, 0, 0) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \gamma z) \end{aligned}$$

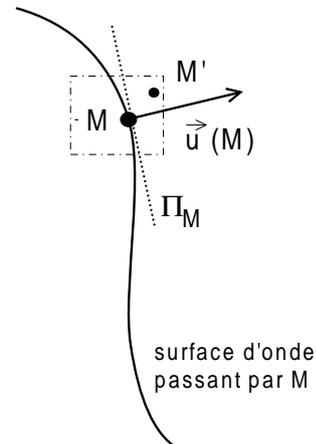
Par construction, $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ est unitaire donc α, β, γ sont réels tels que $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$. Le vecteur \vec{u} sera appelé 'direction de propagation'.

Remarque : l'introduction de la valeur algébrique $\overline{O'M}$ dans l'expression de $\Delta t_{O'M}$ permet de traiter le cas où M est soit avant, soit après le plan π_0 . Le sens positif pour la valeur algébrique est choisi comme celui de la direction de la propagation de l'onde.

1.6.3 Généralisation du lien entre formalisme ondulatoire et optique géométrique

On s'intéresse à un milieu où l'indice optique $n(M)$ est lentement variable dans l'espace. Soit une onde monochromatique d'amplitude A_0 et pulsation ω , dont la phase $\varphi(M)$ est connue en tout point à un instant t_0 donné. Sa vibration lumineuse s'écrit $s(M, t_0) = A_0 \cos \varphi(M)$ à t_0 et $s(M, t) = A_0 \cos [\omega(t - t_0) + \varphi(M)]$ à t quelconque.

La surface d'onde passant par M contient les points de phase égale à $\varphi(M)$. A un niveau suffisamment local, cette surface se confond avec son plan tangent en M noté Π_M et la vitesse de propagation $c = \frac{c_0}{n(M)}$ est uniforme. L'onde correspond au voisinage de M à une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}(M) = \frac{\omega}{c} \vec{u}(M) = n(M) \frac{\omega}{c_0} \vec{u}(M)$, où $\vec{u}(M)$ est le vecteur unitaire normal en M à Π_M .



On a les écritures :

15. par l'égalité de la puissance lumineuse au niveau de π_0 et du plan π_M perpendiculaire en M à \vec{u}

	onde localement plane	forme générale
en M	$s(M, t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k}(M) \cdot \overrightarrow{OM} + \psi)$	$s(M, t) = A_0 \cos(\omega(t - t_0) + \varphi(M))$
en M' voisin de M	$s(M', t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k}(M) \cdot \overrightarrow{OM'} + \psi)$	$s(M', t) = A_0 \cos(\omega(t - t_0) + \varphi(M'))$

d'où par différence des phases :

$$\varphi(M') - \varphi(M) = -\vec{k}(M) \cdot \overrightarrow{MM'}$$

Pour M' voisin de M , la fonction de l'espace $\varphi(M)$ vérifie mathématiquement

$$\varphi(M') = \varphi(M) + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(M) \cdot \overrightarrow{MM'}$$

Les deux écritures précédentes s'identifient pour tout M' voisin de M d'où

$$\vec{k}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi(M)$$

Ce résultat généralise la notion de vecteur d'onde aux ondes monochromatiques de formes quelconques et aux milieux d'indice lentement variable dans l'espace. On a les propriétés suivantes :

– La relation $\vec{k}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi(M)$ signifie mathématiquement que $\vec{k}(M)$ est normal en M aux surfaces équiphase (surface d'onde).

On le justifie physiquement de la manière suivante : $\varphi(M') - \varphi(M) + \vec{k}(M) \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$ pour tout M' voisin de M . En choisissant M' sur la surface d'onde passant par M , $\varphi(M') = \varphi(M) = 0$ donc $\vec{k}(M) \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$ pour tout M' voisin de M ce qui implique que $\vec{k}(M)$ est normal en M à la surface d'onde.

– Pour une onde progressive, un rayon lumineux de direction le vecteur unitaire $\vec{u}(M)$ correspond à la trajectoire des photons donc à l'écoulement de l'énergie lumineuse. La résolution des équations de Maxwell dans un milieu isotrope montre que les rayons lumineux sont normaux aux surface d'onde avec la relation $\vec{k}(M) = \frac{\omega}{c} \vec{u}(M)$.¹⁶

– Ce résultat reste valable même si l'indice optique du milieu varie dans l'espace avec au voisinage de M l'indice optique $n(M)$. On a alors $\vec{k}(M) = \frac{n(M)\omega}{c} \vec{u}(M)$.

Partant de la phase, on utilise la relation $\vec{k}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi(M)$ pour retrouver l'expression du vecteur d'onde des ondes planes ou sphérique dans un milieu d'indice homogène^a :

	onde plane	onde sphérique divergente	onde sphérique convergente
phase $\varphi(M)$	$-\frac{\omega}{c}(\alpha x + \beta y + \gamma z) + \psi$	$-\frac{\omega}{c} CM + \psi$	$\frac{\omega}{c} CM + \psi$
$-\overrightarrow{\text{grad}} \varphi(M)$	$\vec{k}(M) = \frac{\omega}{c} \vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$	$\vec{k}(M) = \frac{\omega}{c} \frac{\overrightarrow{CM}}{ \overrightarrow{CM} }$	$\vec{k}(M) = -\frac{\omega}{c} \frac{\overrightarrow{CM}}{ \overrightarrow{CM} }$

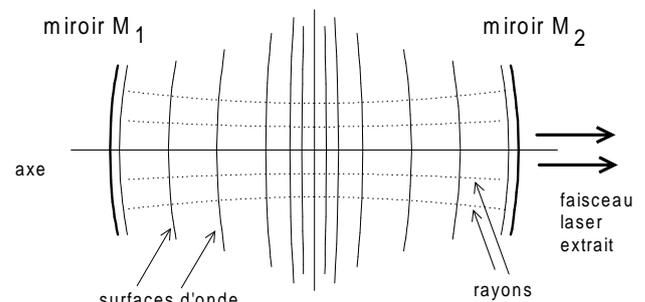
^a. Le calcul est immédiat pour une onde plane. Il est simple pour une onde sphérique en utilisant l'expression du gradient en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi(M) = \frac{\partial \varphi(M)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(M)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi(M)}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

Remarque : ce paragraphe généralise la relation entre la phase, caractéristique de l'approche ondulatoire, et celle de rayon lumineux, base de la modélisation de la lumière par l'optique géométrique.

Exemple : le schéma ci-contre représente les surfaces d'onde et les rayons lumineux pour une onde de type 'faisceau gaussien' établie dans une cavité laser limitée par deux miroirs concaves. Pour ce système, on peut résoudre analytiquement les équations de propagation d'une onde électromagnétique dans la cavité^a et en déduire $\varphi(M)$ puis la forme des surfaces d'ondes et des rayons lumineux.

^a. Yarriv, Optical Electronics in Modern Communications 5th p 48-53



onde de type 'faisceau gaussien' établie dans une cavité laser

16. cette relation entre $\vec{k}(M)$ et $\vec{u}(M)$ est appelée relation de dispersion, elle possède cette forme pour une propagation dans un milieu où les dimensions caractéristiques sont toutes très grandes devant la longueur d'onde. La relation de dispersion serait différente dans un très petit guide d'onde comme par exemple une fibre optique.

La relation $\vec{k}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi(M)$ reste valable dans les milieux anisotropes, mais on montrera que les rayons lumineux n'y sont colinéaires à $\vec{k}(M)$ que dans des cas particuliers. (Cf cours d'optique des milieux anisotropes)

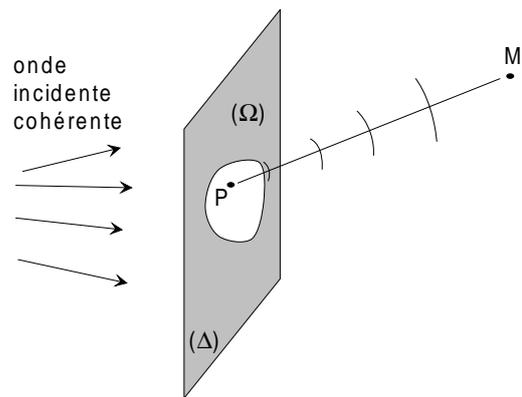
Physiquement, pour une onde établie de manière stationnaire dans la cavité, les rayons lumineux doivent arriver en incidence normale sur les miroirs et se réfléchir sur eux même. Cela signifie que chaque miroir correspond à une surface d'onde. La forme de cette onde est particulièrement compliquée parce que les conditions aux limites imposées par les miroirs de la cavité sont plus exigeantes que dans les systèmes physiques habituels.

Les surfaces d'onde se déforment progressivement ; les rayons ne sont pas rectilignes et n'ont pas de sens si on veut les considérer indépendamment les uns des autres.

1.6.4 Le phénomène de diffraction : modèle de Huygens-Fresnel

La présence d'un obstacle modifie la propagation d'une onde incidente, c'est le phénomène de diffraction, identifié expérimentalement en 1665 (diffraction par un bord d'écran). Fresnel a proposé en 1817 un modèle qui donne une description satisfaisante de la plupart des expériences de diffraction. On décompose le problème en le traitant pour un objet diffractant éclairé par une source de lumière ponctuelle et monochromatique, sachant que toute source réelle peut se décrire comme une juxtaposition de telles sources.

Soit un plan opaque (Δ) percé d'un trou (Ω) et éclairé par l'onde issue d'une source ponctuelle monochromatique. Le modèle de Huygens considère que chaque point P de (Ω) émet une ondelette sphérique d'amplitude complexe proportionnelle à l'amplitude complexe $\mathcal{A}(P)$ produite en P par l'onde incidente, ces ondelettes étant toutes cohérentes entre elles.



L'ondelette émise par l'élément de surface dS centré sur P possède en M une amplitude complexe de la forme

$$B\mathcal{A}(P) \frac{\exp -i k PM}{PM} dS \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

En un point M de l'espace situé après le diaphragme, l'amplitude complexe est la somme des amplitudes complexes reçues de chacun des points P du trou avec :

$$\mathcal{A}(M) = B \int_{(\Omega)} \mathcal{A}(P) \frac{\exp -i k PM}{PM} dS$$

Pour une onde incidente sphérique et un trou (Ω) très grand, la nécessité de retrouver en M la même onde sphérique détermine $B = \frac{i}{\lambda}$ et

$$\mathcal{A}(M) = \frac{i}{\lambda} \int_{(\Omega)} \mathcal{A}(P) \frac{\exp -i k PM}{PM} dS$$

Cette expression constitue la formule de Huygens-Fresnel.

Le modèle qualitatif présenté ici aboutit à une expression permettant d'interpréter la plupart des expériences de diffraction. Il a cependant une faiblesse : il ne repose pas sur un mécanisme physique microscopique pour justifier l'émission des ondelettes, mais sur un raisonnement par analogie du type 'tout se passe comme si chaque point du diaphragme émettait une onde sphérique'. Voici pourquoi le cours a choisi de plutôt mettre en avant un raisonnement beaucoup plus général basé sur la résolution des équations de Maxwell, et vérifiant *a posteriori* que l'équation obtenue a la même forme mathématique qu'une superposition d'onde sphériques.

1.6.5 Démonstration de la formule de Fresnel

L'espace est repéré par le référentiel $Oxyz$. Soit une onde monochromatique de longueur d'onde λ et de représentation complexe $\mathcal{S}(x, y, z, t) = \mathcal{A}(x, y, z) \exp i\omega t$. On veut déterminer l'amplitude complexe $\mathcal{A}(x, y, z)$ en tout point du demi-espace $z > 0$ connaissant :

- les conditions aux limites dans le plan $z = 0^+$, $\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{A}(x, y, 0)$.
- l'équation de propagation $\nabla^2 \mathcal{S} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial t^2} = 0$ dans l'espace libre, qui pour l'onde monochromatique $\mathcal{S}(x, y, z, t) = \mathcal{A}(x, y, z) \exp i\omega t$ se transforme en l'équation de Helmholtz

$$\nabla^2 \mathcal{A} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{A} = 0 \quad \text{avec } \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$$

Cas particulier

On étudie le cas particulier $\mathcal{G}(x, y) = C \exp -i2\pi(\frac{\alpha x + \beta y}{\lambda})$ avec α et β réels.

Pour une onde plane progressive de direction de propagation $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, avec α , β et γ réels vérifiant $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, l'amplitude complexe s'écrit $C \exp -i\vec{k} \cdot \vec{r} = C \exp -i2\pi \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda}$ et correspond dans le plan $z = 0$ à la répartition $\mathcal{G}(x, y)$.

En inversant le raisonnement, on déduit que les conditions aux limite $\mathcal{G}(x, y) = C \exp -i2\pi(\frac{\alpha x + \beta y}{\lambda})$ dans le plan $z = 0$ diffractent dans l'espace $z > 0$ une onde plane de direction de propagation $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et d'amplitude

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y, z) &= C \exp -i2\pi \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda} \quad \text{avec } \gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \\ &= \mathcal{G}(x, y) \exp -i2\pi \frac{\gamma z}{\lambda} \end{aligned}$$

Cependant, ce raisonnement physique n'est possible que si γ est réel c'est à dire si $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$.

On cherche maintenant une solution au même problème dans le cas $\alpha^2 + \beta^2 > 1$. Par analogie avec le résultat précédent, l'amplitude est recherchée sous la forme

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \mathcal{G}(x, y) f(z)$$

avec $f(0) = 1$ pour respecter les conditions aux limites en $z = 0$. On reprend l'équation de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial z^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \mathcal{A} = 0$$

pour déduire

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \alpha^2 \mathcal{G}(x, y) f(z) - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \beta^2 \mathcal{G}(x, y) f(z) + \mathcal{G}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \mathcal{G}(x, y) f(z) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} f(z) (1 - \alpha^2 - \beta^2) &= 0 \end{aligned}$$

avec ici $\frac{4\pi^2}{\lambda^2} (1 - \alpha^2 - \beta^2) \leq 0$ puisqu'on discute le cas $\alpha^2 + \beta^2 > 1$, donc la solution $f(z)$ est une combinaison linéaire d'exponentielles réelles.

Une solution $f(z)$ dont un terme serait exponentiellement croissant pour $z \geq 0$ n'aurait pas de sens physique. La solution qui vérifie $f(0) = 1$ est $f(z) = \exp -\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1} z$ d'où l'amplitude

$$\mathcal{A}(x, y, z) = C \exp -i2\pi(\frac{\alpha x + \beta y}{\lambda}) \exp -\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1} z$$

Il ne s'agit pas d'une onde progressive mais d'une onde plane évanescente, dont l'amplitude décroît exponentiellement au delà du plan $z = 0$.

Pour faire la synthèse des deux cas abordés, l'amplitude complexe de l'onde diffractée en $M(x, y, z > 0)$ par la distribution d'amplitude $\mathcal{G}(x, y)$ sur le plan $z = 0$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y, z) &= C \exp -i2\pi \frac{\alpha x + \beta y + \gamma(\alpha, \beta) z}{\lambda} \\ &= \mathcal{G}(x, y) \exp -i2\pi \frac{\gamma(\alpha, \beta) z}{\lambda} \end{aligned}$$

en définissant la fonction $\gamma(\alpha, \beta)$ telle que

$$\begin{cases} \gamma(\alpha, \beta) = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} & \text{pour } \alpha^2 + \beta^2 \leq 1 \\ \gamma(\alpha, \beta) = -i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1} & \text{pour } \alpha^2 + \beta^2 > 1 \end{cases}$$

Diffraction dans le cas général

L'amplitude complexe en un point $P(x, y)$ du plan $z = 0$ est notée $\mathcal{G}(x, y)$. On cherche d'abord à établir un lien avec le cas précédent. Calculons la transformée de Fourier inverse

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(u, v) &= \iint \mathcal{G}(x, y) \exp i2\pi(ux + vy) \, dx \, dy \\ &= \overline{\mathcal{F}}_{[\mathcal{G}(x, y)]}(u, v)\end{aligned}$$

pour prendre ensuite la transformée de Fourier directe des deux membres. La propriété $\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} = 1$ entraîne

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x, y) &= \mathcal{F}_{[\mathcal{C}(u, v)]}(x, y) \\ &= \iint \mathcal{C}(u, v) \exp -i2\pi(ux + vy) \, du \, dv\end{aligned}$$

Ecrite ainsi, l'amplitude dans le plan $z = 0$ apparaît comme la somme continue d'ondes de la forme $C \exp -i2\pi(\frac{\alpha x + \beta y}{\lambda})$ avec $\alpha = \lambda u$ et $\beta = \lambda v$ réels, ondes pour lesquelles l'amplitude diffractée en $M(x, y, z > 0)$ a été calculée au paragraphe précédent.

Les équations de propagation étant linéaires, l'amplitude diffractée par $\mathcal{G}(x, y)$ est la somme des amplitudes diffractées par les fonctions $C \exp -i2\pi(\frac{\alpha x + \beta y}{\lambda})$ ainsi calculées soit :

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \iint \mathcal{C}(u, v) \exp -2i\pi(ux + vy) \, du \, dv \exp -i2\pi \frac{\gamma(\lambda u, \lambda v)z}{\lambda}$$

en définissant la fonction $\gamma(\lambda u, \lambda v)$ telle que

$$\begin{cases} \gamma(\lambda u, \lambda v) = \sqrt{1 - \lambda^2 u^2 - \lambda^2 v^2} & \text{pour } \lambda^2 u^2 + \lambda^2 v^2 \leq 1 \\ \gamma(\lambda u, \lambda v) = -i\sqrt{\lambda^2 u^2 + \lambda^2 v^2 - 1} & \text{pour } \lambda^2 u^2 + \lambda^2 v^2 > 1 \end{cases}$$

Il reste à transformer cette expression pour retrouver une forme identifiable à la formule de Huygens-Fresnel. L'intégrale précédente est la transformée de Fourier de la fonction $\mathcal{C}(u, v) \exp -i2\pi \frac{\gamma(\lambda u, \lambda v)z}{\lambda}$ prise pour les variables (x, y) . On utilise la propriété des transformées de Fourier

$$\mathcal{F}_{[gh]} = \mathcal{F}_{[g]} * \mathcal{F}_{[h]}$$

où $*$ représente le produit de convolution, et où g et h sont deux fonctions pour lesquelles on prendra ici :

$$\begin{cases} g(u, v) = \mathcal{C}(u, v) \\ h(u, v) = \exp -i2\pi \frac{\gamma(\lambda u, \lambda v)z}{\lambda} \end{cases}$$

Par construction, $\mathcal{F}_{[\mathcal{C}(u, v)]}(x, y) = \mathcal{G}(x, y)$ puisqu'on a défini \mathcal{C} comme la transformée de Fourier inverse de \mathcal{G} .

Les tables de transformées de Fourier indiquent

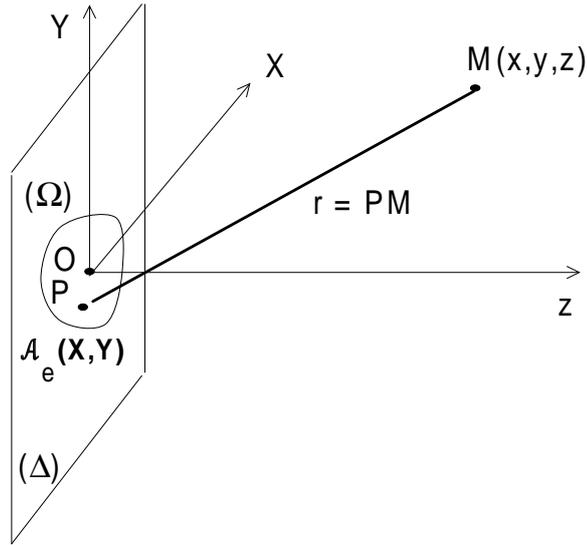
$$\mathcal{F}_{[h(u, v)]}(x, y) = \left(\frac{i}{\lambda} + \frac{1}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \exp -i2\pi \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\lambda}$$

Il reste à développer le produit de convolution $\mathcal{F}_{[g]} * \mathcal{F}_{[h]}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(X, Y) \, dX \, dY \left(\frac{i}{\lambda} + \frac{1}{2\pi\sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + z^2}} \right) \\ &\quad \frac{z}{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + z^2} \exp -i2\pi \frac{\sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + z^2}}{\lambda}\end{aligned}$$

On s'intéresse au cas $\sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + z^2} \gg \lambda$ pour lequel $\frac{i}{\lambda} \gg \frac{1}{2\pi\sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + z^2}}$, et on note $r = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + z^2}$.

On rappelle que $\mathcal{G}(X, Y)$ correspond à l'amplitude complexe au point $P(X, Y)$ du plan de sortie $z = 0^+$ de l'objet diffractant en notant $\mathcal{G}(X, Y) = \mathcal{A}_e(X, Y, 0)$ (amplitude émergente) pour écrire finalement :



$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_e(X, Y, 0) dX dY \frac{z}{r} \frac{\exp -i2\pi \frac{r}{\lambda}}{r}$$

C'est la formule de diffraction de Fresnel.

1.6.6 Facteur de transmission d'une lentille mince - géométrie de la lentille

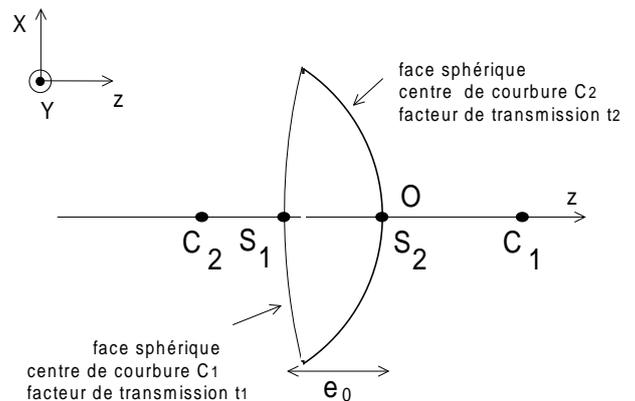
Soit une lentille dont la face de sortie, sphérique, possède le sommet S_2 situé en O et le centre de courbure $C_2(0,0,-R_2)$, avec $R_2 = C_2S_2 > 0$. Pour des rayons dans les conditions de Gauss, le facteur de transmission t_2 de cette interface est uniforme.

Pour un point $M(X, Y, z)$ sur cette face, l'équation d'une sphère entraîne

$$C_2M^2 = R_2^2 \Leftrightarrow X^2 + Y^2 + (z - (-R_2))^2 = R_2^2$$

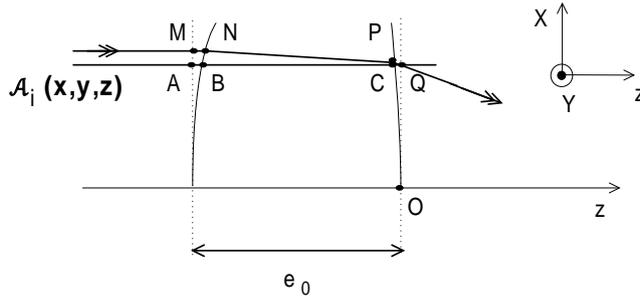
qui au voisinage de O se développe à l'ordre 2 en

$$\begin{aligned} z + R_2 &= +\sqrt{R_2^2 - (X^2 + Y^2)} \\ &\simeq R_2 - \frac{X^2 + Y^2}{2R_2} \\ \Leftrightarrow z &= -\frac{X^2 + Y^2}{2R_2} \end{aligned}$$



On généralise ce résultat au cas où la face de sortie est convexe ($\overline{S_2C_2} < 0$, cas du schéma) ou concave ($\overline{S_2C_2} > 0$) en notant $z = \frac{X^2 + Y^2}{2 S_2C_2}$

La face d'entrée est caractérisée par son sommet $S_1(0, 0, -e_0)$, son centre de courbure C_1 , et son facteur de transmission t_1 . En ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 2, son équation au voisinage de S_1 s'écrit $z = -e_0 + \frac{X^2 + Y^2}{2S_1C_1}$.



Le facteur de transmission $t_L(X, Y)$ de cette lentille est évalué au niveau du point $Q(X, Y)$ situé dans le plan $z = 0$. La lentille est éclairée par un faisceau parallèle à l'axe Oz d'amplitude complexe \mathcal{A}_i dans le plan $z = -e_0$. L'amplitude complexe se propageant jusqu'en $z = 0^-$ sur le diaphragme équivalent serait

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_i(Q) &= \mathcal{A}(A) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} [AQ] \\ \mathcal{A}_i(X, Y, 0^-) &= \mathcal{A}_i \exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} e_0\end{aligned}$$

On revient au raisonnement sur la lentille réelle. Le rayon émergent en Q a été légèrement dévié. Il a coupé le plan $z = -e_0$ en M et on a

$$\mathcal{A}_e(Q) = \mathcal{A}(M) t_1 t_2 \exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} [MQ] \text{ avec } \mathcal{A}(M) = \mathcal{A}_i$$

Dans les conditions de Gauss ($S_1 C_1, S_2 C_2 \gg |X|, |Y|$), les points M, N et P sont très proches de A, B et C . On peut montrer¹⁷ la relation

$$[MNPQ] = AB + nBC + CQ + \delta$$

où δ représente un terme d'ordre 3 en $\frac{X}{S_1 C_1}, \frac{Y}{S_1 C_1}, \frac{X}{S_2 C_2}, \frac{Y}{S_2 C_2}$. Pour être cohérent avec la description des ondes à l'approximation parabolique (développements limités à l'ordre 2), ce terme d'ordre 3 doit être considéré comme nul. En utilisant les équations des faces d'entrée et de sortie de la lentille, on a

$$\begin{aligned}BC &= \frac{X^2 + Y^2}{2S_2 C_2} - \left(-e_0 + \frac{X^2 + Y^2}{2S_1 C_1} \right) \\ &= e_0 - \frac{X^2 + Y^2}{2} \left(\frac{1}{S_1 C_1} - \frac{1}{S_2 C_2} \right) \\ AB + CQ &= e_0 - BC \\ &= \frac{X^2 + Y^2}{2} \left(\frac{1}{S_1 C_1} - \frac{1}{S_2 C_2} \right) \\ AB + nBC + CQ &= ne_0 - (n-1) \frac{X^2 + Y^2}{2} \left(\frac{1}{S_1 C_1} - \frac{1}{S_2 C_2} \right)\end{aligned}$$

On en déduit le facteur de transmission au niveau de $Q(X, Y)$:

$$\begin{aligned}t_L(X, Y) &= \frac{\mathcal{A}_e(Q)}{\mathcal{A}_i(Q)} \\ &= \frac{\mathcal{A}_i t_1 t_2 \exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} [MNPQ]}{\mathcal{A}_i \exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} e_0} \\ &\text{d'où en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 2 :} \\ t_L(X, Y) &\simeq \frac{t_1 t_2 \exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} [ABCQ]}{\exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} e_0} \\ t_L(X, Y) &= t_1 t_2 \exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} (n-1) e_0 \exp i \frac{2\pi}{\lambda_0} (n-1) \left(\frac{X^2 + Y^2}{2} \left(\frac{1}{S_1 C_1} - \frac{1}{S_2 C_2} \right) \right)\end{aligned}$$

La lentille transforme l'onde plane incidente en une onde sphérique de point de convergence le point focal image F' donc d'amplitude complexe proportionnelle à $\mathcal{A}_i \exp i \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{X^2 + Y^2}{2f}$ dans le plan $z = 0^+$. On identifie la dépendance en X, Y à celle de $\mathcal{A}_i(Q) t_L(X, Y)$ pour déduire

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{S_1 C_1} - \frac{1}{S_2 C_2} \right)$$

On a ainsi l'expression de la distance focale f en fonction des caractéristiques de la lentille.

17. c'est relativement simple dans le cas d'une lentille plan-convexe (R_1 infini)

Les coefficients constants des termes exponentiels n'ont pas d'influence sur la diffraction de la lumière, on ne les considère plus¹⁸. Une lentille beaucoup plus large que les autres éléments limitant l'extension latérale du faisceau peut être supposée infinie, avec sur tout son plan le facteur de transmission

$$t_L(X, Y) = \exp i \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{X^2 + Y^2}{2f}$$

Remarque 1 : une lentille plan-convexe correspond à C_1 renvoyé à l'infini, d'où $f = -\frac{S_2 C_2}{n-1} > 0$, cette lentille est bien convergente comme prévu par les lois de Descartes ; une lentille convexe-plan correspond à C_2 renvoyé à l'infini, d'où $f = \frac{S_1 C_1}{n-1} > 0$; Pour C_1 et C_2 renvoyés à l'infini, on retrouve le facteur de transmission d'une lame à faces parallèles.
Remarque 2 : dans la démonstration précédente, la propriété

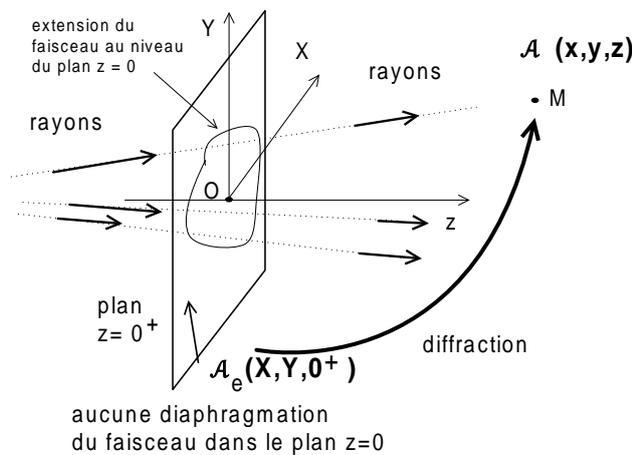
$$[MNPQ] = AB + nBC + CQ + \delta$$

avec δ d'ordre 3 reste valable pour des surfaces quelconques dont les normales forment des angles petits avec Oz (conditions de Gauss). Ceci justifie pourquoi l'expression $t_L(X, Y) = t_1 t_2 \exp -i \frac{2\pi}{\lambda_0} (n-1) e(X, Y)$ convient pour le facteur de transmission pour des systèmes d'indice ou d'épaisseur lentement variables ou des systèmes éclairés autrement qu'en incidence normale (lames à faces non planes, prismes de petit angle, etc).

1.6.7 Interprétation physique pour la diffraction par un trou

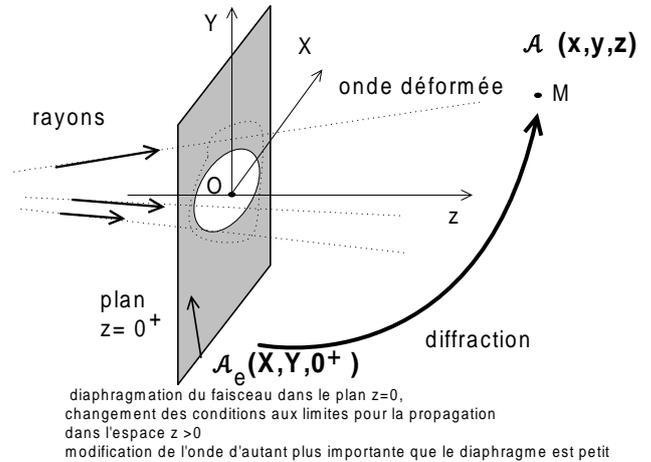
Soit un trou percé dans un écran opaque. A son niveau, $\mathcal{A}_e(X, Y, 0) = \mathcal{A}_i(X, Y, 0)$.

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \int \int_{-\infty}^{+\infty} dX dY \mathcal{A}_i(X, Y, 0) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2z} \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xX + yY}{z}$$



La répartition de la lumière dans le plan $z = 0$ s'interprète comme les conditions aux limites à respecter pour la propagation dans l'espace $z > 0$. S'il n'y a aucune diaphragction, ces conditions aux limites correspondent à la propagation de l'onde sans déformation, avec des rayons lumineux dans le prolongement des rayons de l'espace $z < 0$.

Un observateur placé très loin voit un diaphragme très petit et donc une onde ressemblant à une onde sphérique. La diffraction modifie significativement l'onde obtenue en M par rapport à ce que décrirait l'optique géométrique si un diaphragme dans le plan $z = 0$ change suffisamment les conditions initiales pour sa propagation dans l'espace jusqu'à M .



La diaphragction au niveau du plan $z = 0$ modifie les conditions initiales pour la propagation dans l'espace $z > 0$. L'onde n'est donc pas la même que précédemment. Analytiquement dans l'expression de la formule de Fresnel, cela revient à modifier la surface d'intégration et donc l'amplitude obtenue en M . La surface d'intégration est d'autant plus modifiée que le diaphragme est petit, l'onde transmise en est d'autant plus déformée. A la limite d'un diaphragme tendant vers un point, l'onde transmise tend vers une onde sphérique.

18. mathématiquement, ils sortent de l'intégrale dans la formule de Fresnel et se retrouvent en simples facteurs multiplicatifs dans l'amplitude diffractée.

Chapitre 2

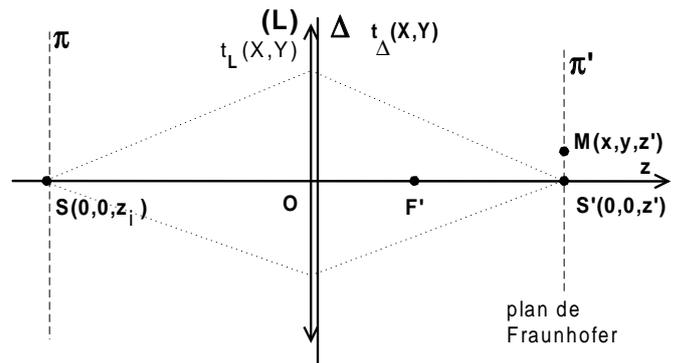
DIFFRACTION DE FRAUNHOFER

Introduction

Le phénomène de diffraction entraîne des modifications de la propagation de la lumière par rapport à ce qui est prévu par le modèle de l'optique géométrique. La diffraction intervient en particulier lorsque des diaphragmes situés sur le trajet de l'onde viennent limiter son extension latérale, où lorsque des inhomogénéités de l'indice du milieu (défauts dans une lentille, poussières, gradients de température ou de pression, turbulences gazeuses) viennent agir sur la propagation. Une situation de grand intérêt pratique est celle où l'on observe l'image d'un objet par un système optique, en évaluant les effets de la diffraction sur la qualité de cette image.

Lorsqu'un point de l'objet a pour image 'quelque chose' qui n'est pas un simple point, l'image est déformée. Il faut donc analyser en détail les conséquences de la diffraction sur la reconstruction de l'image pour en déduire l'information la plus complète possible sur l'objet. Pour décomposer le problème, on s'intéressera d'abord à un système optique constitué d'une unique lentille convergente et à l'image d'un simple point source S sur l'axe de la lentille. Puisque la déformation par la diffraction dépend de la longueur d'onde, on supposera cette source monochromatique.

Ce montage est schématisé ci-contre, avec une lentille infinie de facteur de transmission $t_L(X, Y)$ dans le plan $z = 0$. La source est en $S(0, 0, z_i)$, son image géométrique par la lentille est le point $S'(0, 0, z')$. Le plan passant par S' et perpendiculaire à Oz est appelé 'plan de Fraunhofer'.



L'objet diffractant est modélisé par un diaphragme (Δ) de facteur de transmission $t_\Delta(X, Y)$ placé juste avant ou juste après la lentille. Son action modifie la répartition de la lumière dans l'espace, c'est le phénomène de diffraction, avec au point $M(x, y, z')$ du plan de Fraunhofer $z = z'$ l'amplitude complexe :

$$\mathcal{A}(x, y, z') = \mathcal{C}(x, y) \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{A}(O) t_\Delta(X, Y)]\left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'}\right)$$

C'est la formule de Fraunhofer, écrite ici pour une source de lumière ponctuelle et monochromatique située sur l'axe de la lentille, avec les notations et les relations :

$$\begin{cases} -\frac{1}{z_i} + \frac{1}{z'} &= \frac{1}{f} \quad \text{Formule de conjugaison de Gauss} \\ \mathcal{C}(x, y) &= \frac{i}{\lambda z'} \exp -ikr_0 \\ r_0 &= z' + \frac{x^2 + y^2}{2z'} \end{cases}$$

On rappelle que le facteur de transmission $t_L(X, Y)$ de la lentille infinie s'est simplifié dans le calcul et n'apparaît plus dans l'expression finale de $\mathcal{A}(x, y, z')$.

On établira dans ce chapitre comment étendre le calcul de l'amplitude complexe diffractée à des montages allant bien au delà du cas particulier présenté ici.

2.1 Diffraction de Fraunhofer par des diaphragmes simples

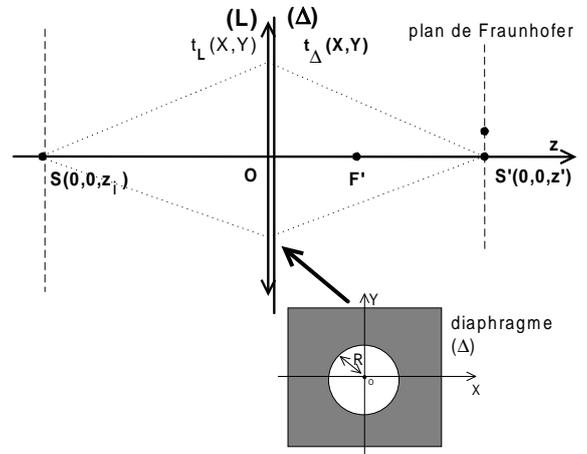
2.1.1 Diaphragme circulaire

On considère un diaphragme circulaire de rayon R et de centre O , percé dans un écran opaque. Le système est à symétrie de révolution autour de Oz , son facteur de transmission s'écrit :

$$\begin{aligned} t_{\Delta}(X, Y) &= 1 \text{ pour } \rho = \sqrt{X^2 + Y^2} < R \\ &= 0 \text{ sinon} \\ &\equiv \text{circ}_R(X, Y) \end{aligned}$$

L'amplitude obtenue dans le plan de Fraunhofer π' vaut

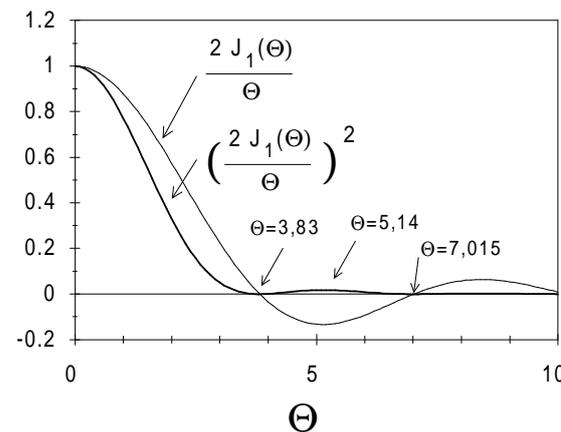
$$\mathcal{A}(x, y, z') = \mathcal{C}(x, y) \overline{\mathcal{F}}_{[A(O) t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'} \right)$$



Les tables de transformées de Fourier à deux dimensions donnent (Cf 2.6.3) :

$$\overline{\mathcal{F}}_{[\text{circ}_R(u, v)]}(r, s) = \pi R^2 \frac{2J_1(2\pi R\sqrt{r^2 + s^2})}{2\pi R\sqrt{r^2 + s^2}}$$

où J_1 représente la fonction de Bessel d'ordre 1. La fonction $\frac{2J_1(\theta)}{\theta}$ et son carré sont illustrées ci-contre en fonction de θ . Elles sont à symétrie de révolution avec un maximum égal à 1 pour $\theta = 0$ et des minima nuls pour $\theta = 3,83; 7,015; 10,17; \text{etc.}$ Le premier maximum secondaire du carré est observé pour $\theta = 5,14$.



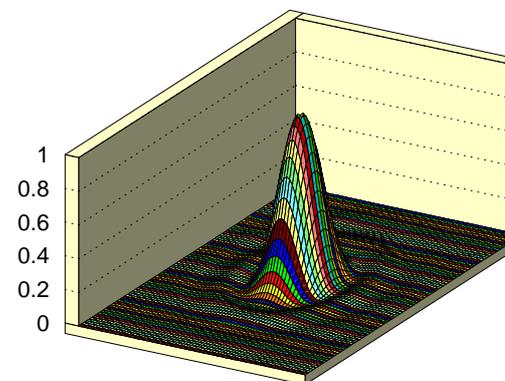
On reprend l'expression précédente pour $u = \frac{x}{\lambda z'}$ et $v = \frac{y}{\lambda z'}$. L'amplitude diffractée dans le plan de Fraunhofer est donnée par la formule de Fraunhofer :

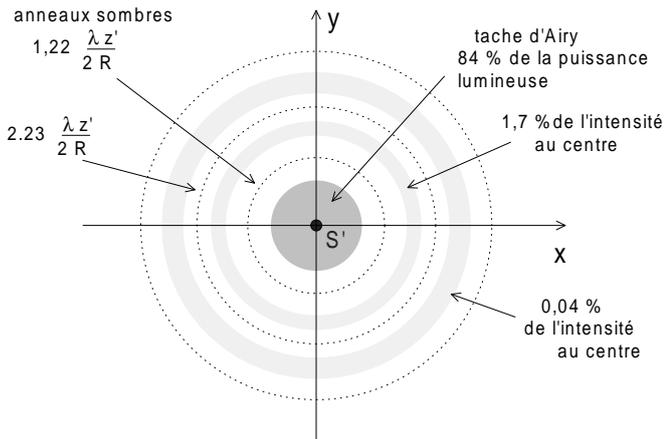
$$\mathcal{A}(x, y, z') = \mathcal{C}(x, y) A(O) \pi R^2 \frac{2J_1(2\pi R\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z'})}{2\pi R\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z'}}$$

d'où l'intensité

$$\begin{aligned} I(x, y, z') &= |\mathcal{C} A(O)|^2 (\pi R^2)^2 \left(\frac{2J_1(2\pi R\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z'})}{2\pi R\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z'}} \right)^2 \\ I(x, y, z') &= I(0, 0, z') \left(\frac{2J_1(2\pi R\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z'})}{2\pi R\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z'}} \right)^2 \end{aligned}$$

L'image géométrique du point source S est le point image S' . Comme pour un diaphragme carré, la diffraction a pour effet de transformer cette image géométrique en une tache de lumière. Cette tache est ici circulaire, centrée sur S' et entourée d'anneaux concentriques beaucoup moins lumineux.





Les anneaux sombres sont obtenus pour :

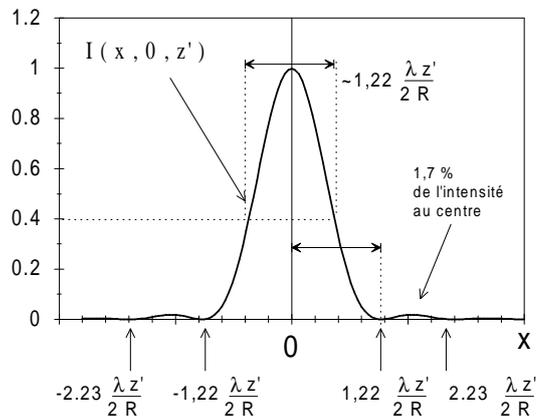
$$\frac{2J_1(2\pi R \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z'})}{2\pi R \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z'}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi R \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z'} = 3,83; 7,015; 10,17; \dots$$

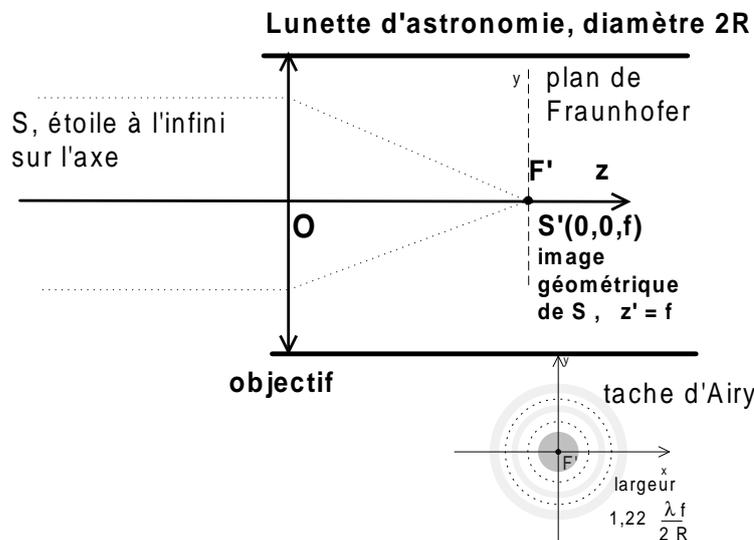
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1,22 \frac{\lambda z'}{2R}; 2,23 \frac{\lambda z'}{2R}; 3,24 \frac{\lambda z'}{2R} \dots$$

La largeur caractéristique de la tache centrale est donc de l'ordre de $1,22 \frac{\lambda z'}{2R}$. Elle contient 84 % de la puissance lumineuse totale. Les maxima d'intensité des anneaux latéraux représentent 1,7 %, 0,04 % et 0,02 % de l'intensité au centre pour les trois premiers. Cette tache de lumière est appelée tache d'Airy, ou figure de diffraction d'Airy.

On représente ici la coupe suivant $S'x$ de la tache d'Airy : numériquement, la largeur totale à mi-hauteur pour le pic central correspond approximativement à l'écart entre le maximum de $I(x,0,z')$ et le premier zéro, valant donc $1,22 \frac{\lambda z'}{2R}$.



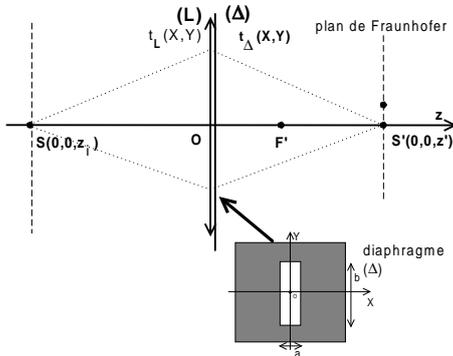
Application à l'observation d'une étoile par une lunette d'astronomie de rayon R : la source de lumière est à l'infini sur l'axe de la lentille donc son image est au point focal image, $z' = f$. La diffraction est due à la limitation de l'extension latérale de l'onde incidente, modélisée par un diaphragme de diamètre $2R$ accolé à la lentille. L'image de l'étoile est dans ce cas une tache d'Airy de largeur à mi-hauteur $1,22 \frac{\lambda f}{2R}$. λ correspond à la longueur d'onde moyenne du rayonnement arrivant de l'étoile.



Remarque : on retrouve les prévisions de l'optique géométrique (S' ponctuel) lorsque R devient très grand.

2.1.2 Fente rectangulaire

Intensité dans le plan d'observation



Le plan Δ est opaque, percé d'une fente rectangulaire de côtés a, b , centrée sur O . Son facteur de transmission s'écrit :

$$t_{\Delta}(X, Y) = 1 \text{ pour } -\frac{a}{2} < X < \frac{a}{2} \text{ et } -\frac{b}{2} < Y < \frac{b}{2}, 0 \text{ sinon}$$

$$= \text{rect}_a(X) \text{rect}_b(Y)$$

La diffraction de la lumière par Δ produit dans le plan de Fraunhofer associé à la source S l'amplitude

$$A(x, y, z') = C(x, y) \overline{\mathcal{F}}_{[A(O) t_{\Delta}(X, Y)]}\left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'}\right)$$

Un facteur de transmission à variables séparables est factorisable en $t_{\Delta}(X, Y) = t'(X) \times t''(Y)$, on peut écrire

$$\overline{\mathcal{F}}_{[A(O) t_{\Delta}(X, Y)]}\left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'}\right) = \int \int dX dY t'(X) t''(Y) \exp i2\pi\left(X \frac{x}{\lambda z'} + Y \frac{y}{\lambda z'}\right)$$

$$= A(O) \int dX t'(X) \exp i2\pi X \frac{x}{\lambda z'} \times \int dY t''(Y) \exp i2\pi Y \frac{y}{\lambda z'}$$

$$= A(O) \overline{\mathcal{F}}_{[t'(X)]}\left(\frac{x}{\lambda z'}\right) \overline{\mathcal{F}}_{[t''(Y)]}\left(\frac{y}{\lambda z'}\right)$$

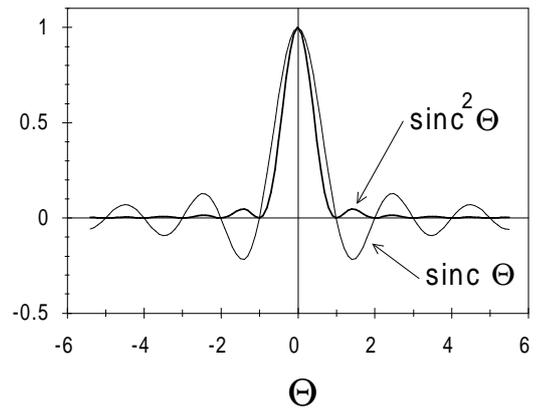
Les tables de transformées de Fourier (1 dimension) donnent

$$\overline{\mathcal{F}}_{[\text{rect}_a(u)]}(r) = a \text{sinc}(a r)$$

où le sinus cardinal normalisé est défini par

$$\text{sinc } \theta = \frac{\sin \pi \theta}{\pi \theta}$$

avec en particulier $\text{sinc}(0) = 1$ et $\text{sinc } \theta = 0$ pour θ entier non nul.



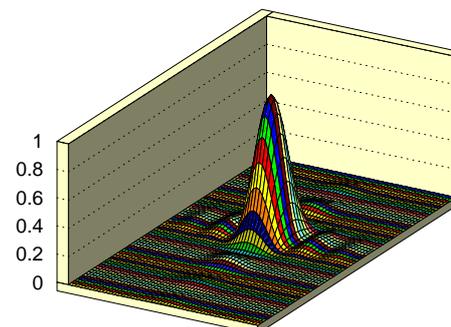
L'amplitude et l'intensité diffractées dans le plan π' valent

$$A(x, y, z') = C(x, y) A(O) a \text{sinc}\left(a \frac{x}{\lambda z'}\right) b \text{sinc}\left(b \frac{y}{\lambda z'}\right)$$

$$I(x, y, z') = |C(x, y) A(O)|^2 (ab)^2 \text{sinc}^2\left(a \frac{x}{\lambda z'}\right) \text{sinc}^2\left(b \frac{y}{\lambda z'}\right)$$

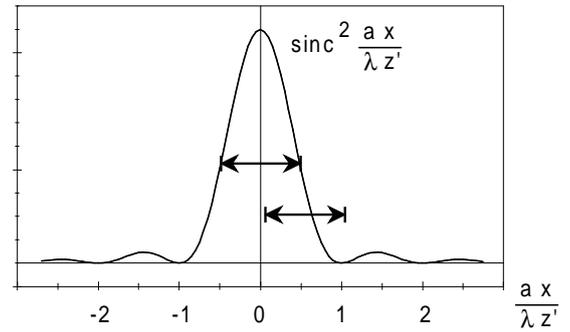
$$I(x, y, z') = I(0, 0, z') \text{sinc}^2\left(a \frac{x}{\lambda z'}\right) \text{sinc}^2\left(b \frac{y}{\lambda z'}\right)$$

Cette fonction est représentée ci-contre pour $a = b$.



Caractéristiques de la tache de diffraction

En l'absence du diaphragme, l'image géométrique du point source S est le point image S' . La diffraction par la fente rectangulaire produit une tache lumineuse centrée sur S' et possédant une largeur caractéristique qualitativement égale à l'écart entre le point le plus lumineux (le point S') et le premier minimum nul.

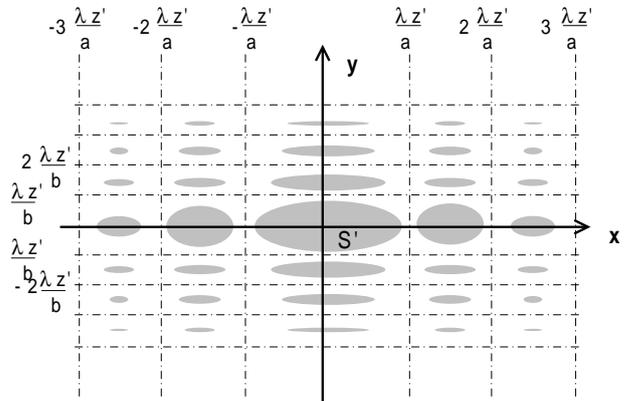


Les minima nuls sont obtenus pour

$$\begin{aligned} \text{sinc}\left(a \frac{x}{\lambda z'}\right) = 0 &\Leftrightarrow \pi \frac{ax}{\lambda z'} = p \pi \quad \text{avec } p \text{ entier non nul} &\Leftrightarrow x = \pm \frac{\lambda z'}{a}, \pm 2 \frac{\lambda z'}{a}, \dots \\ \text{ou } \text{sinc}\left(b \frac{y}{\lambda z'}\right) = 0 &\Leftrightarrow \pi \frac{by}{\lambda z'} = p \pi \quad \text{avec } p \text{ entier non nul} &\Leftrightarrow y = \pm \frac{\lambda z'}{b}, \pm 2 \frac{\lambda z'}{b}, \dots \end{aligned}$$

La largeur caractéristique de la tache centrale est de l'ordre de $\frac{\lambda z'}{a}$ suivant l'axe x et de $\frac{\lambda z'}{b}$ suivant l'axe y . Elle contient 80 % de la puissance lumineuse totale. Pour une fente **étroite suivant X** , ($a \ll b$) la tache de diffraction est **plus étendue suivant l'axe x** .

Les maxima locaux d'intensité situés en dehors de l'image géométrique S' sont appelés 'maximums secondaires'. Les plus intenses d'entre eux sont ceux obtenus au voisinage de $x \simeq \pm \frac{3\lambda z'}{2a}$ et $y = 0$, ou $x = 0$ et $y \simeq \pm \frac{3\lambda z'}{2b}$. Leur intensité est voisine de $I(0, 0, z') \left(\frac{1}{3\pi}\right)^2 \simeq 0,045 I(0, 0, z')$, soit 4,5 % de l'intensité au maximum.



Lorsque a et b tendent vers l'infini, les fonctions $a \text{sinc}^2\left(a \frac{x}{\lambda z'}\right)$ et $b \text{sinc}^2\left(b \frac{y}{\lambda z'}\right)$ tendent vers les fonctions de dirac $\delta_{\left(\frac{x}{\lambda z'}\right)}$ et $\delta_{\left(\frac{y}{\lambda z'}\right)}$ (formulaire p. 3)¹ de sorte que l'intensité dans le plan de Fraunhofer tend vers

$$I(x, y, z') = \frac{I(0, 0, z')}{ab} \delta_{\left(\frac{x}{\lambda z'}\right)} \delta_{\left(\frac{y}{\lambda z'}\right)}$$

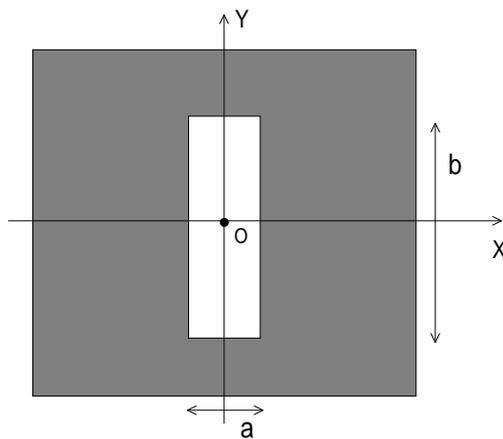
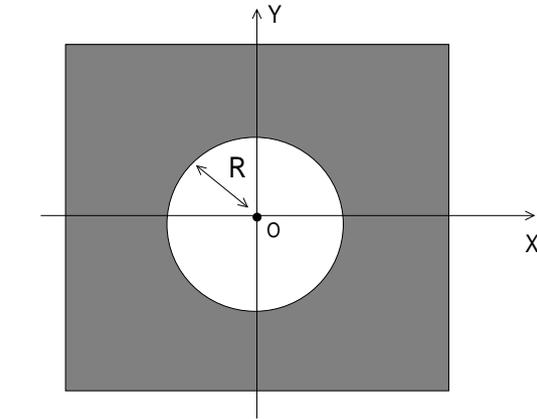
La lumière se concentre sur le point image S' . Lorsque l'extension latérale des faisceaux n'est plus limitée par un diaphragme, on retrouve le résultat prévu par l'optique géométrique².

1. dimensions : $\delta_{\left(\frac{x}{\lambda z'}\right)}$ a la dimension d'une longueur puisque $\int \delta_{\left(\frac{x}{\lambda z'}\right)} d\frac{x}{\lambda z'} = 1$

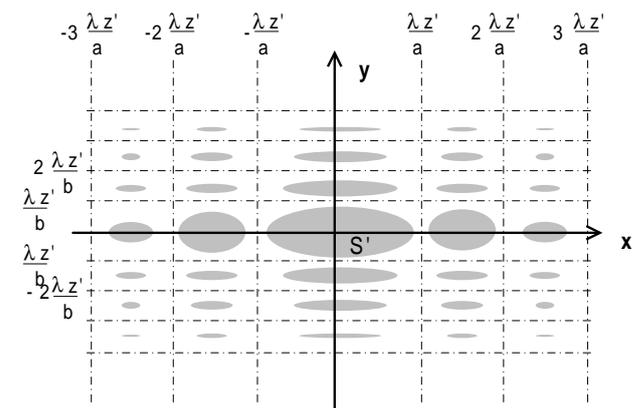
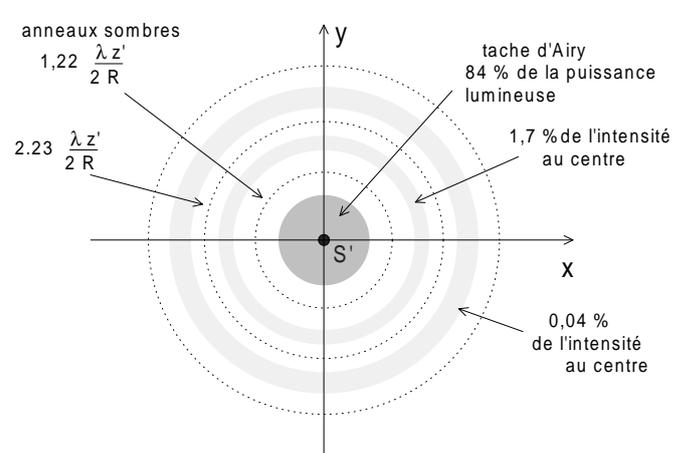
2. les problèmes de divergence de I sont discutées au chapitre 'Exemples d'applications .. paragraphe 2.2 Fréquences spatiales d'un objet périodique

2.1.3 Généralisation

Schéma du diaphragme accolé à la lentille



Éclairement du plan de Fraunhofer



La figure de diffraction est liée à la transformée de Fourier du facteur de transmission. Les propriétés mathématiques des TF justifient les propriétés physiques suivantes :

- diaphragme circulaire large \leftrightarrow tache de diffraction étroite, et inversement

- une fente rectangulaire $a \times b$ produit une tache de diffraction centrée sur S' , de l'ordre de $\frac{\lambda z'}{a}$ suivant l'axe x et $\frac{\lambda z'}{b}$ suivant l'axe y . On montre numériquement qu'elle contient 80 % de la puissance lumineuse totale.

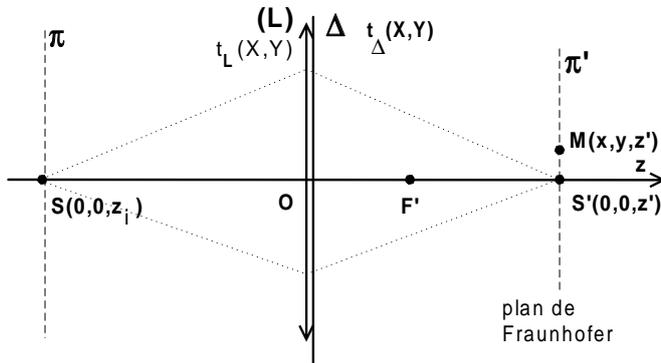
- une fente **étroite suivant** X , ($a \ll b$) produit une tache de diffraction **plus étendue suivant l'axe** x .

- cas limite : une fente infinie suivant Y produit une tache de diffraction concentrée sur l'axe Ox

- Soit un diaphragme de dimension caractéristique a suivant la direction \vec{w} . La transformée de Fourier d'une fonction de largeur caractéristique a possède une largeur proportionnelle à $\frac{1}{a}$. Dans le plan de Fraunhofer, on observe une figure de diffraction de largeur caractéristique de l'ordre de $\frac{\lambda z'}{a}$ suivant \vec{w} .

2.2 Propriétés générales

2.2.1 Translation du diaphragme dans son plan



Soient une source de lumière située à distance finie sur l'axe de la lentille et un premier diaphragme $t_1(X, Y)$ accolé à la lentille dans le plan $z = 0$. L'amplitude diffractée dans le plan de Fraunhofer s'écrit :

$$\mathcal{A}_1(x, y, z') = \mathcal{C}(x, y) \overline{\mathcal{F}}_{[A(O) t_1(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'} \right)$$

Soit un second diaphragme $t_2(X, Y)$ obtenu par une translation de $\vec{w}(X_0, Y_0, 0)$ du premier. La transmission au point (X, Y) de t_2 reproduit celle de t_1 au point $(X - X_0, Y - Y_0)$, on a donc $t_2(X, Y) = t_1(X - X_0, Y - Y_0)$.

* Première méthode

La table de transformées de Fourier à deux dimensions donne (Cf 2.6.3) :

$$\overline{\mathcal{F}}_{[F(u-u_0, v-v_0)]}(r, s) = \overline{\mathcal{F}}_{[F(u, v)]}(r, s) \exp i2\pi(u_0 r + v_0 s)$$

L'amplitude diffractée par $t_2(X, Y)$ vérifie alors

$$\mathcal{A}_2(x, y, z') = \mathcal{A}_1(x, y, z') \exp i2\pi \left(X_0 \frac{x}{\lambda z'} + Y_0 \frac{y}{\lambda z'} \right)$$

La translation du diaphragme dans son plan conduit à un simple déphasage de l'amplitude diffractée dans le plan de Fraunhofer. Il n'apparaît aucune modification de l'intensité correspondante.

* Deuxième méthode

Mathématiquement, la relation $t_2(X, Y) = t_1(X - X_0, Y - Y_0)$ est équivalente à

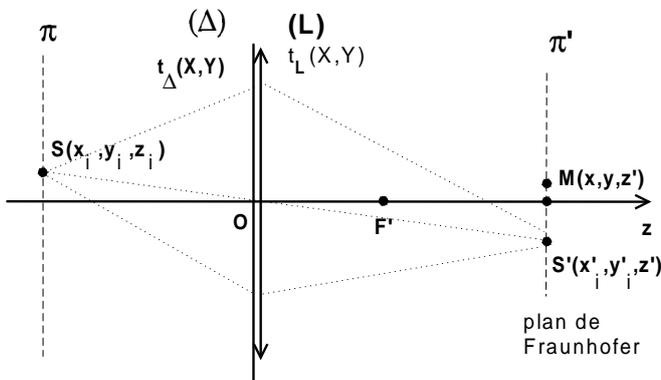
$$t_2(X, Y) = t_1 * \delta_{X-X_0, Y-Y_0} \quad (\text{produit de convolution})$$

On a la propriété³ :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}_{[t_1 * \delta_{X-X_0, Y-Y_0}] \left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'} \right)} &= \overline{\mathcal{F}}_{[t_1(X, Y)] \left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'} \right)} \times \overline{\mathcal{F}}_{[\delta_{X-X_0, Y-Y_0}] \left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'} \right)} \\ &= \overline{\mathcal{F}}_{[t_1(X, Y)] \left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'} \right)} \times \exp i2\pi \left(X_0 \frac{x}{\lambda z'} + Y_0 \frac{y}{\lambda z'} \right) \end{aligned}$$

D'où le même résultat.

2.2.2 Source située hors de l'axe



On va évaluer ce que devient la figure de diffraction pour une source ponctuelle $S(x_i, y_i, z_i)$ située hors de l'axe de la lentille. Son image géométrique par (L) est le point $S'(x'_i, y'_i, z')$ avec

Formule de conjugaison de Gauss

$$-\frac{1}{z_i} + \frac{1}{z'} = \frac{1}{f}$$

grandissement

$$g = \frac{x'_i}{x_i} = \frac{y'_i}{y_i} = \frac{z'}{z_i}$$

Le diaphragme et la lentille sont dans le plan $z = 0$, leurs facteurs de transmission sont notés $t_L(X, Y)$ et $t_\Delta(X, Y)$.

3. Rappel des notations : * produit de convolution ; \times : produit simple.

* Première méthode

L'onde incidente sphérique émise par S est transmise par le diaphragme et la lentille. Elle possède dans le plan $z = 0^+$ l'amplitude complexe :

$$\mathcal{A}(X, Y, 0^+) = \left(\text{valeur dans le plan } (z = 0) \text{ de l'onde sphérique émise par } S \right) \times t_L(X, Y) \times t_\Delta(X, Y)$$

$$\mathcal{A}(X, Y, 0^+) = \underbrace{\mathcal{A}(x_i, y_i, 0) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2}{2(0 - z_i)}}_{\text{onde sphérique (approximation parabolique)}} t_L(X, Y) t_\Delta(X, Y)$$

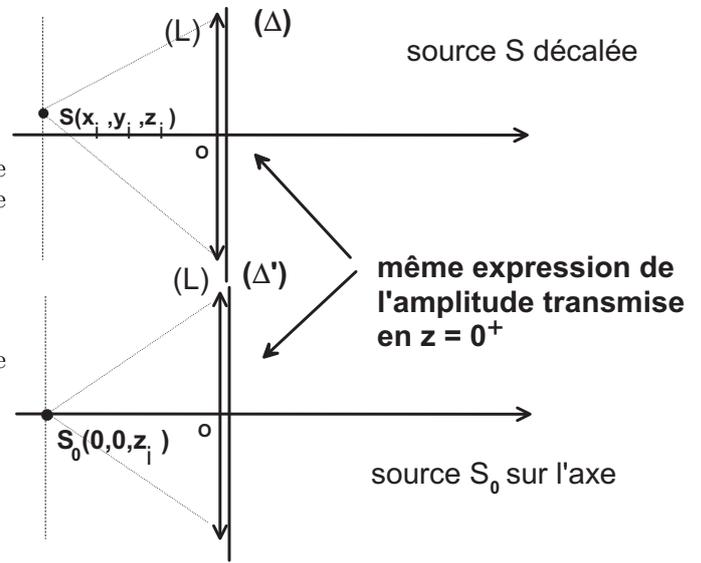
$$= \underbrace{\mathcal{A}(x_i, y_i, 0) \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x_i^2 + y_i^2}{2z_i}}_{\mathcal{A}(O)} \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2z_i} t_L(X, Y) \underbrace{\exp -i 2\pi \left(X \frac{x_i}{\lambda z_i} + Y \frac{y_i}{\lambda z_i} \right)}_{\text{Facteur de transmission d'un diaphragme noté } (\Delta')} t_\Delta(X, Y)$$

amplitude complexe dans le plan $z = 0^-$ pour une onde sphérique de centre $S_0(0, 0, z_i)$

Ces écritures justifient qu'on a la même expression de $\mathcal{A}(X, Y, 0^+)$ pour les deux montages schématisés ci-contre si :

$$t_{\Delta'}(X, Y) = \exp -i 2\pi \left(X \frac{x_i}{\lambda z_i} + Y \frac{y_i}{\lambda z_i} \right) t_\Delta(X, Y)$$

sachant que pour le second on évalue l'amplitude diffractée dans le plan $z = z'$ par :



$$\mathcal{A}(x, y, z') = \mathcal{C}(x, y) \mathcal{A}(O) \overline{\mathcal{F}}_{\left[\exp -i 2\pi \left(X \frac{x_i}{\lambda z_i} + Y \frac{y_i}{\lambda z_i} \right) t_\Delta(X, Y) \right]} \left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'} \right)$$

La table de transformées de Fourier à deux dimensions donne

$$\overline{\mathcal{F}}_{\left[\exp -2i\pi(u r_0 + v s_0) F(u, v) \right]}(r, s) = \overline{\mathcal{F}}_{[F(u, v)]}(r - r_0, s - s_0)$$

On adapte cette formule aux notations du problème physique :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = X \qquad v = Y \\ r = \frac{x}{\lambda z'} \qquad s = \frac{y}{\lambda z'} \\ r_0 = \frac{x_i}{\lambda z_i} = \frac{x'_i}{\lambda z'} \qquad s_0 = \frac{y_i}{\lambda z_i} = \frac{y'_i}{\lambda z'} \text{ (grandissement)} \end{array} \right.$$

pour obtenir

$$\mathcal{A}(x, y, z') = \mathcal{C}(x, y) \mathcal{A}(O) \overline{\mathcal{F}}_{[t_\Delta(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda z'} - \frac{x'_i}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'} - \frac{y'_i}{\lambda z'} \right)$$

Cette expression correspond à l'intensité que diffracterait (Δ) éclairé par la source sur l'axe avec en plus un décalage de la figure de diffraction de (x'_i, y'_i) .

Le déplacement de la source de $S_0(0, 0, z_i)$ à $S(x_i, y_i, z_i)$ entraîne le décalage de son image géométrique de $S'_0(0, 0, z'_i)$ à $S'(x'_i, y'_i, z'_i)$ et un décalage identique de l'intensité diffractée dans les conditions de Fraunhofer.

On remarque que la fonction dont on prend la transformée de Fourier sera la même que (Δ) soit situé juste avant ou juste après la lentille (le produit des facteurs de transmission $t_{\Delta}(X, Y)$ et $t_L(X, Y)$ est commutatif).

* Deuxième méthode

On repart de la formule de diffraction de Fresnel. L'amplitude complexe dans le plan $z = 0^+$ du système (lentille + diaphragme accolé) s'écrit :

$$\mathcal{A}(X, Y, 0^+) = \mathcal{A}(x_i, y_i, 0) \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2}{2z_i} t_{\Delta}(X, Y) \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2f}$$

L'amplitude diffractée dans le plan $z = z'$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y, z') = \mathcal{C}(x, y) \int \int_{-\infty}^{+\infty} dX dY \mathcal{A}(x_i, y_i, 0) \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2}{2z_i} t_{\Delta}(X, Y) \\ \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2f} \exp -ik \frac{X^2 + Y^2}{2z'} \exp ik \frac{xX + yY}{z'} \end{aligned}$$

Les termes exponentiels apparaissant sous l'intégrale peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \exp i \frac{2\pi}{2\lambda} \left[\frac{X^2 - 2Xx_i + x_i^2 + Y^2 - 2Yy_i + y_i^2}{z_i} + \frac{X^2 + Y^2}{f} - \frac{X^2 + Y^2}{z'} + \frac{2xX + 2yY}{z'} \right] \\ = \exp i \frac{2\pi}{2\lambda} \left[(X^2 + Y^2) \left(\frac{1}{z_i} + \frac{1}{f} - \frac{1}{z'} \right) + \frac{x_i^2 + y_i^2}{z_i} + 2 \frac{X}{z'} (x - \frac{x_i z'}{z_i}) + 2 \frac{Y}{z'} (y - \frac{y_i z'}{z_i}) \right] \end{aligned}$$

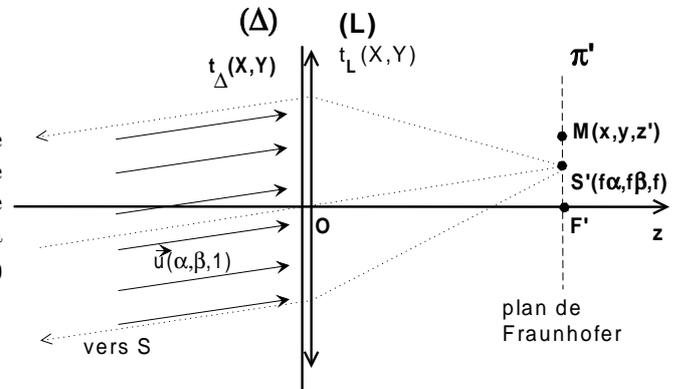
avec $(\frac{1}{z_i} + \frac{1}{f} - \frac{1}{z'}) = 0$, $\frac{x_i z'}{z_i} = x_i'$ et $\frac{y_i z'}{z_i} = y_i'$ donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y, z') = \mathcal{C}(x, y) \mathcal{A}(x_i, y_i, 0) \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x_i^2 + y_i^2}{z_i} \\ \int \int_{-\infty}^{+\infty} dX dY t_{\Delta}(X, Y) \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{X}{z'} (x - x_i') + \frac{Y}{z'} (y - y_i') \right) \\ = \mathcal{C}(x, y) \mathcal{A}(x_i, y_i, 0) \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x_i^2 + y_i^2}{z_i} \mathcal{F}_{[t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{x - x_i'}{\lambda z'}, \frac{y - y_i'}{\lambda z'} \right) \end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat que par la première méthode.

2.2.3 Source à distance infinie

Le diaphragme (Δ) situé en $z = 0$ est éclairé par une onde plane de direction de propagation $\vec{u}(\alpha, \beta, 1)$ et d'amplitude complexe $\mathcal{A}(X, Y, 0^-) = \mathcal{A}(O) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha X + \beta Y)$. Cette onde est produite par une source ponctuelle $S(x_i, y_i, z_i)$ à l'infini avec $\vec{u} = \frac{\vec{S}\vec{O}}{\|\vec{S}\vec{O}\|}$, donc $\alpha = \frac{x_i}{z_i}$ et $\beta = \frac{y_i}{z_i}$ pour $z_i < 0$ tendant vers $-\infty$.

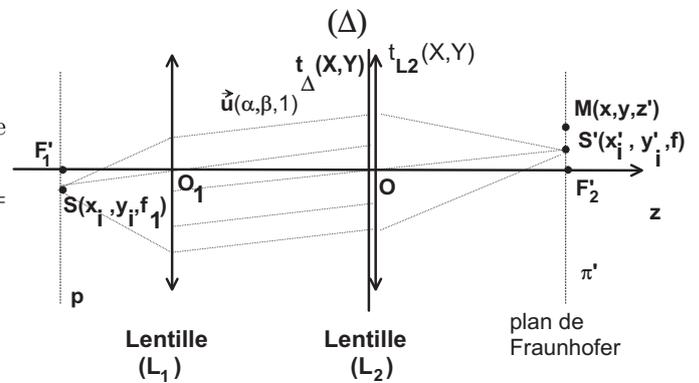


L'image géométrique de la source de lumière est le point $S'(x'_i = f\alpha, y'_i = f\beta, f)$. Le plan de Fraunhofer correspond ici au plan focal image de la lentille. La situation est donc analogue à celle du paragraphe précédent avec $z_i \rightarrow -\infty$, $z' = f$:

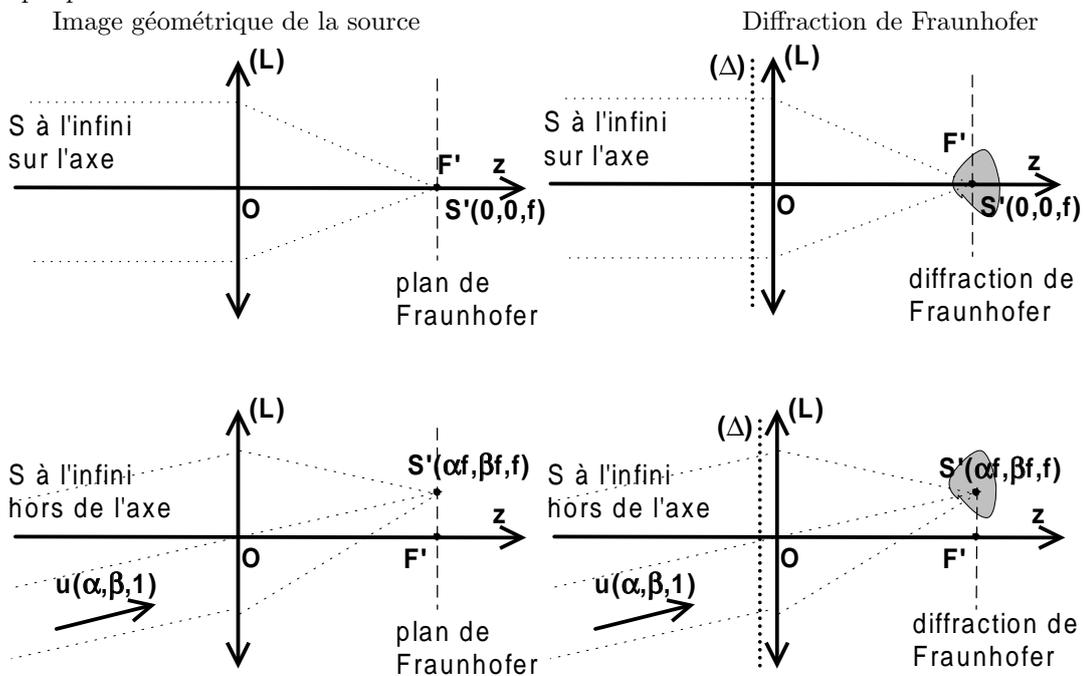
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y, f) &= \mathcal{C}(x, y) A(O) \overline{\mathcal{F}}_{[t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{x - x'_i}{\lambda f}, \frac{y - y'_i}{\lambda f} \right) \\ &= \mathcal{C}(x, y) A(O) \overline{\mathcal{F}}_{[t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{\alpha}{\lambda}, \frac{y}{\lambda f} - \frac{\beta}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Un autre exemple de montage pour une source ponctuelle à l'infini est schématisé ci-contre. On a ici

$$\vec{u}(\alpha, \beta, 1) = \frac{\overrightarrow{SO'_1}}{\|\overrightarrow{SO'_1}\|} \text{ d'où } \alpha = \frac{x_i}{-f_1} \text{ et } \beta = \frac{y_i}{-f_1} \text{ et } x'_i = -\frac{f_2}{f_1} x_i, y'_i = -\frac{f_2}{f_1} y_i.$$

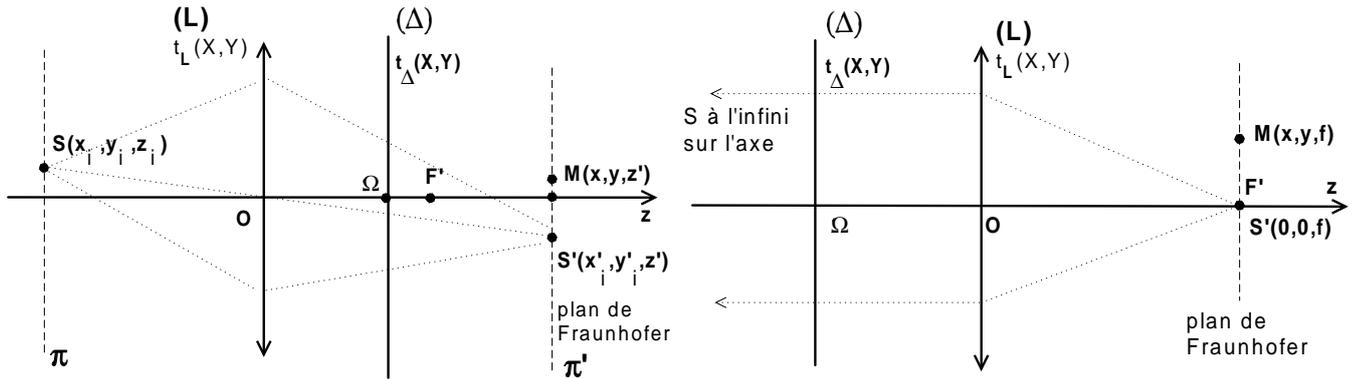


Synthèse graphique :



Le remplacement pour l'éclairage du système (lentille + diaphragme) d'une onde plane parallèle à l'axe par une onde plane de direction de propagation $\vec{u}(\alpha, \beta, 1)$ décale l'intensité diffractée dans le plan de Fraunhofer de la quantité $(\alpha f, \beta f)$.

2.2.4 Décalage du diaphragme suivant l'axe de la lentille



La position de plan de Fraunhofer dépend de celle de l'image géométrique de la source mais pas de celle du diaphragme diffractant (Δ). On peut montrer⁴ que le décalage de (Δ) suivant l'axe de la lentille ne modifie l'amplitude dans le plan de Fraunhofer que par un facteur de phase sans conséquence sur l'intensité observée.

Remarque : on a dans ce cas au point $M(x, y, z')$

$$\mathcal{A}(x, y, z') = C'(x, y) \overline{\mathcal{F}}_{[A(O) t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'} \right)$$

avec l'origine O du référentiel ($Oxyz$) correspondant au centre optique de la lentille mais ne correspondant plus à l'intersection Ω de (Δ) avec l'axe de la lentille.

Cette formule est valable pour (Δ) situé avant ou après (L), et pour une source à distance finie ou infinie.

2.2.5 Dilatation du diaphragme

On construit maintenant le diaphragme t_2 par dilatation de t_1 de facteurs réels α_X suivant OX et α_Y suivant OY : la transmission au point (X, Y) de t_2 reproduit celle au point $(\frac{X}{\alpha_X}, \frac{Y}{\alpha_Y})$ par t_1 .

$$t_2(X, Y) = t_1\left(\frac{X}{\alpha_X}, \frac{Y}{\alpha_Y}\right)$$

La table de transformées de Fourier indique

$$\overline{\mathcal{F}}_{\left[\frac{1}{|a| |b|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)\right]}(r, s) = \overline{\mathcal{F}}_{[F(u, v)]}(a r, b s)$$

On en déduit l'amplitude et l'intensité :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(x, y, z') &= |\alpha_X \alpha_Y| \mathcal{A}_1(\alpha_X x, \alpha_Y y, z') \\ I_2(x, y, z') &= |\alpha_X \alpha_Y|^2 I_1(\alpha_X x, \alpha_Y y, z') \end{aligned}$$

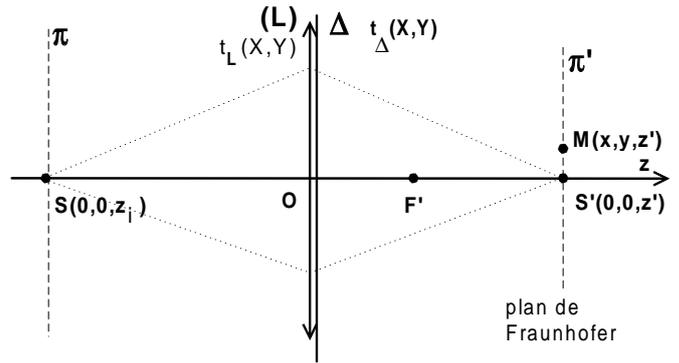
La tache lumineuse est contractée d'un facteur α_X suivant x et α_Y suivant y (ou dilatée d'un facteur $1/\alpha_X$ suivant x et $1/\alpha_Y$ suivant y).

Lorsque l'intensité incidente est homogène sur toute la surface du diaphragme, la puissance transmise par t_2 est $\alpha_X \alpha_Y$ fois plus forte que celle transmise par t_1 . Cette puissance se retrouve distribuée dans le plan π' sur une surface réduite d'un facteur $\alpha_X \alpha_Y$. L'intensité représentant la puissance par unité de surface, celle-ci se retrouve donc multipliée par $(\alpha_X \alpha_Y)^2$

4. Cf démonstration en annexe 2.6.1

2.2.6 Conservation de la puissance lumineuse

Un objet diffractant, dans le plan $z = 0$ et de facteur de transmission $t_\Delta(X, Y)$, est accolé à une lentille de facteur de transmission $t_L(X, Y) = \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2f}$. L'ensemble est éclairé par une source ponctuelle $S(0, 0, z_i)$.



La puissance lumineuse émergeant du plan $z = 0^+$, juste après le diaphragme et la lentille correspond à l'intensité lumineuse $I(X, Y, 0^+)$ intégrée sur toute sa surface.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(0^+) &= \iint dX dY I(X, Y, 0^+) \\ \mathcal{P}(0^+) &= \iint dX dY \left| \mathcal{A}(O) \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2z_i} \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2f} t_\Delta(X, Y) \right|^2 \\ &= \iint dX dY |\mathcal{A}(O) t_\Delta(X, Y)|^2 \end{aligned}$$

On évalue maintenant la puissance au niveau du plan de Fraunhofer (plan $z = z'$)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z') &= \iint dx dy I(x, y, z') \\ &= \iint dx dy \left| \frac{i}{\lambda z'} \exp -ikr_0 \overline{\mathcal{F}}_{[\mathcal{A}(O) t_\Delta(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'} \right) \right|^2 \\ &= \iint d\left(\frac{x}{\lambda z'}\right) d\left(\frac{y}{\lambda z'}\right) \left| \overline{\mathcal{F}}_{[\mathcal{A}(O) t_\Delta(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'} \right) \right|^2 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Parseval-Plancherel, on a pour une fonction $f(x, y)$ la propriété :

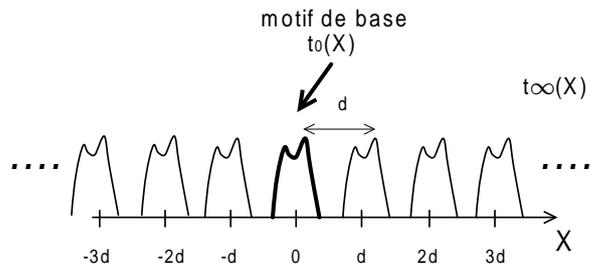
$$\iint du dv |\overline{\mathcal{F}}_{[f(r, s)]}(u, v)|^2 = \iint dr ds |f(r, s)|^2$$

Il y a donc bien conservation de la puissance lumineuse entre les plans $z = 0^+$ et $z = z'$.

2.3 Diffraction par un réseau

2.3.1 Réseau par transmission

On construit une fonction $t_\infty(X)$ par répétition d'un motif de base $t_0(X)$ avec la périodicité d .



On peut écrire

$$t_\infty(X) = \dots + t_0(X + d) + t_0(X) + t_0(X - d) + \dots$$

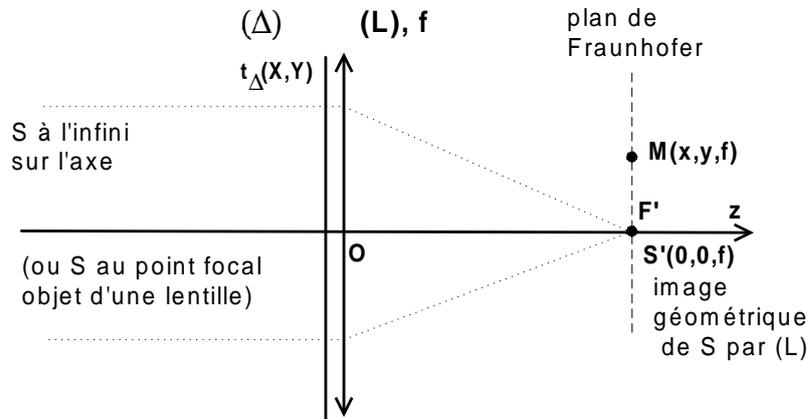
Mathématiquement, une fonction infinie de période d suivant X peut aussi s'écrire comme une série de Fourier (Cf 2.6.4) :

$$\begin{aligned}
 t_\infty(X) &= \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} C_p \exp -i2\pi p \frac{X}{d} \\
 \text{avec } C_p &= \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} dX t_\infty(X) \exp i2\pi p \frac{X}{d} \\
 &= \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{+\infty} dX t_0(X) \exp i2\pi p \frac{X}{d} \text{ car sur } [-d/2; d/2] t_\infty(X) = t_0(X) \\
 &\quad \text{et en dehors } t_0(X) = 0 \\
 &= \frac{1}{d} \overline{\mathcal{F}}_{[t_0(X)]} \left(\frac{p}{d} \right)
 \end{aligned}$$

Soit un système optique de facteur de transmission $t_\Delta(X, Y)$ indépendant de Y , avec $t_\Delta(X, Y) = t_\infty(X) \times 1_Y$. On l'appellera 'réseau par transmission' de période d .

2.3.2 Montage - Amplitude diffractée

Le réseau est éclairé par une source monochromatique ponctuelle à l'infini sur l'axe.



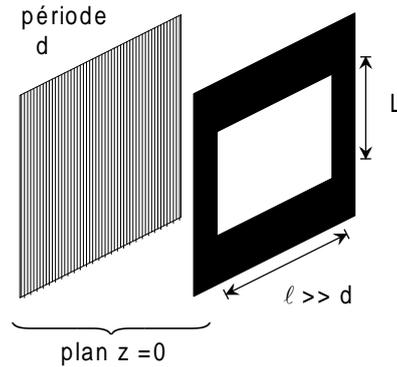
Dans le plan de Fraunhofer $z = f$, on observe :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(x, y, f) &= \mathcal{C}(x, y) \mathcal{A}(O) \overline{\mathcal{F}}_{[t_\infty(X) \times 1_Y]} \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right) \\
 \mathcal{A}(x, y, f) &= \mathcal{C}(x, y) \mathcal{A}(O) \overline{\mathcal{F}} \left[\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} C_p \exp -i2\pi p \frac{X}{d} \times 1_Y \right] \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right) \\
 &= \mathcal{C}(x, y) \mathcal{A}(O) \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} C_p \underbrace{\delta \left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{p}{d} \right)}_{\text{tache pour } x = p \frac{\lambda f}{d}} \times \underbrace{\delta \frac{y}{\lambda f}}_{\text{tache pour } y = 0}
 \end{aligned}$$

Ce sont des taches de lumière d'amplitudes proportionnelles à C_p aux points $(x, y) = (p \frac{\lambda f}{d}, 0)$.

2.3.3 Intensité dans le plan de Fraunhofer

$\mathcal{A}(x, y, f)$ contient des distributions de Dirac donc le calcul de $|\mathcal{A}(x, y, f)|^2$ diverge. Ce problème mathématique est évité en donnant une dimension finie au réseau : on lui accole un diaphragme rectangulaire de côté $\ell \times L$, avec $\ell \gg d$:



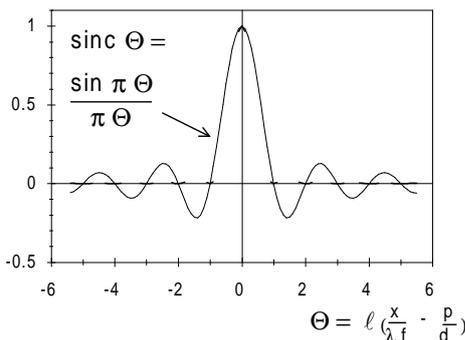
Facteur de transmission :

$$t_{\Delta}(X, Y) = \left(\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} C_p \exp -2i\pi p \frac{X}{d} \times 1_Y \right) \text{rect}_{\ell}(X) \times \text{rect}_L(Y)$$

On utilisera la propriété : $\overline{\mathcal{F}} \left[\exp -2i\pi \underbrace{r_0}_{\frac{p}{d}} \underbrace{u}_x \underbrace{F(u)}_{\text{rect}_{\ell}(x)} \right] \left(\frac{r}{\lambda f} \right) = \overline{\mathcal{F}}_{[F(u)]}(r - r_0)$ pour évaluer l'amplitude diffractée

dans le plan de Fraunhofer :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y, f) &= \mathcal{C}(x, y) \mathcal{A}(O) \left(\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} C_p \underbrace{\overline{\mathcal{F}}_{[\exp -2i\pi \frac{p}{d} X \text{rect}_{\ell}(X)]} \left(\frac{x}{\lambda f} \right)}_{\overline{\mathcal{F}}_{[\text{rect}_{\ell}(x)]} \left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{p}{d} \right)} \right) \times \overline{\mathcal{F}}_{[\text{rect}_L(Y)]} \left(\frac{y}{\lambda f} \right) \\ &= \underbrace{\mathcal{C}(x, y) \mathcal{A}(O) \ell L}_{\mathcal{C}'(x, y)} \left(\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} C_p \text{sinc} \ell \left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{p}{d} \right) \right) \times \text{sinc} \frac{Ly}{\lambda f} \end{aligned}$$



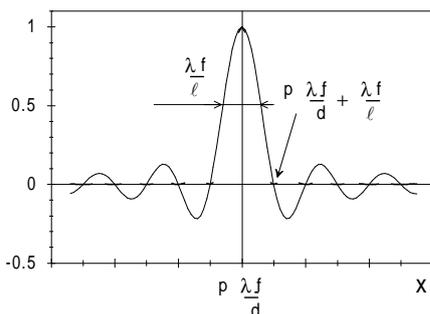
Le terme $\text{sinc} \ell \left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{p}{d} \right)$ est maximum pour $\frac{x}{\lambda f} = \frac{p}{d}$ avec à son voisinage une valeur nulle pour

$$\sin \pi \ell \left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{p}{d} \right) = 0 \text{ avec } \pi \ell \left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{p}{d} \right) = \pm \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\lambda f} - \frac{p}{d} = \pm \frac{1}{\ell} \Leftrightarrow x = \frac{p\lambda f}{d} \pm \frac{\lambda f}{\ell}$$

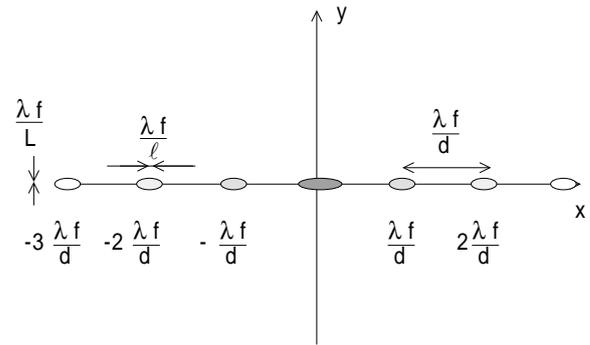
On en déduit que la tache centrée sur $\frac{p\lambda f}{d}$ possède qualitativement la largeur $\frac{\lambda f}{\ell}$ selon x .

De même, sa largeur suivant y vaut $\frac{\lambda f}{L}$.



La figure de diffraction du réseau est constituée de taches de largeur $\frac{\lambda f}{\ell} \times \frac{\lambda f}{L}$ centrées sur les points $(x_p, y) = (p \frac{\lambda f}{d}, 0)$.

Rem : l'hypothèse largeur $\ell \gg$ période d fait que $\frac{\lambda f}{\ell} \ll \frac{\lambda f}{d}$ donc deux taches consécutives ne se recouvrent pas.



L'intensité lumineuse s'écrit :

$$I(x, y, f) = |C'(x, y)|^2 \left| \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} C_p \operatorname{sinc} \ell \left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{p}{d} \right) \right|^2 \times \operatorname{sinc}^2 \left(L \frac{y}{\lambda f} \right)$$

Deux pics voisins ont un recouvrement négligeable. En x donné, l'amplitude d'au plus un pic possède une valeur significative donc les doubles produits apparaissant dans le carré de la somme ont des valeurs très faibles devant les termes sinc^2 . On peut négliger ces doubles produits et il reste :

$$I(x, y, f) = |C'(x, y)|^2 \left(\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} C_p^2 \operatorname{sinc}^2 \ell \left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{p}{d} \right) \right) \times \operatorname{sinc}^2 \frac{Ly}{\lambda f}$$

Remarques :

- la position des taches dépend de la périodicité d du réseau mais pas de la forme de son motif de base.
- la forme du motif de base $t_0(X)$ intervient dans la valeur des coefficients C_p donc dans les intensités relatives des différentes taches.

Applications : dans la pratique, la largeur utilisée du réseau est facilement de l'ordre de 1 cm. La périodicité d peut être de l'ordre du micromètre (réseaux de 1000 ou 2400 traits par millimètre). Par conséquent :

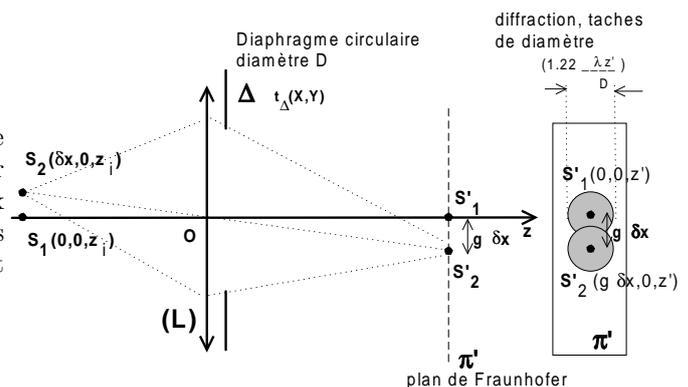
- La figure de diffraction est formées de pics dont la position dépend de λ . On dit que ce système disperse la lumière, il faut mesurer la position des pics le plus précisément possible pour en déduire la valeur absolue de λ .
- avec $d \ll \ell$, la largeur $\frac{\lambda f}{\ell}$ des pics est donc très étroite devant l'écart $\frac{\lambda f}{d}$ entre deux pics associés à la même longueur d'onde (les ordres successifs du réseau). On peut donc visualiser le déplacement d'un pic lié à une petite variation de λ , ou bien voir deux pics distincts associée à deux longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 très proches présentes dans le rayonnement.

Ces instruments s'appellent des spectroscopes (Voir TP 'Lasers à colorants'). Ils sont plus compacts s'ils dispersent la lumière avec un réseau plutôt qu'avec un prisme.

2.4 Limite de résolution d'un instrument d'optique

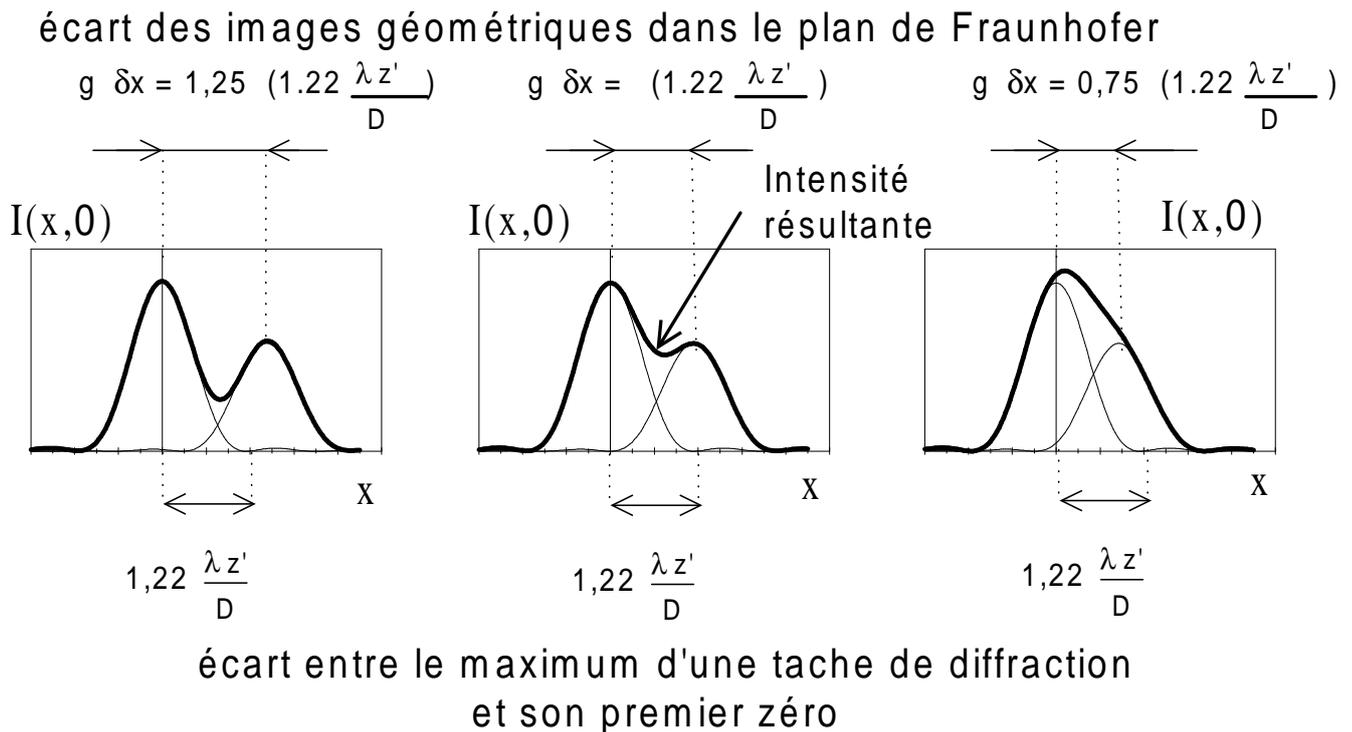
2.4.1 Critère de Rayleigh

Un système optique est modélisé par une lentille infinie de centre optique O accolée à un diaphragme centré sur O et de diamètre D . Ce système forme l'image de deux points $S_1(0, 0, z_i)$ et $S_2(\delta x, 0, z_i)$. Les images géométriques sont en $S'_1(0, 0, z')$ et $S'_2(g \delta x, 0, z')$ avec le grandissement $g = z'/z$.



Pour chaque point source, l'image sur l'écran est la figure de diffraction de Fraunhofer de l'onde diaphragmée par t_{Δ} , c'est une tache de largeur caractéristique $1,22 \frac{\lambda z'}{D}$. Les deux sources sont indépendantes donc non cohérentes. Dans ce cas, les figures de diffraction additionnent leurs intensités.

Pour S_1 et S_2 trop proches, l'écart $g \delta x$ entre les deux images est trop petit et on ne les distingue pas. Un critère qualitatif pour estimer leur caractère distinct ou non a été proposé par Rayleigh. Selon ce critère, la limite pour laquelle deux points sont distincts est lorsque le maximum de la figure de diffraction de l'un coïncide avec le premier zéro de la figure de diffraction de l'autre.



On constate sur le graphique que ce critère est très sensible : on voit nettement la séparation des deux taches de diffraction lorsque $g \delta x$ passe de $0,75 \times 1,22 \frac{\lambda z'}{D}$ à $1,25 \times 1,22 \frac{\lambda z'}{D}$. Le critère de Rayleigh reste qualitatif, et valable en particulier lorsque les deux sources ont des intensités comparables. Il n'aurait plus de sens par exemple si l'intensité de la seconde source était comparable à celle d'un pic secondaire de diffraction de la première source.

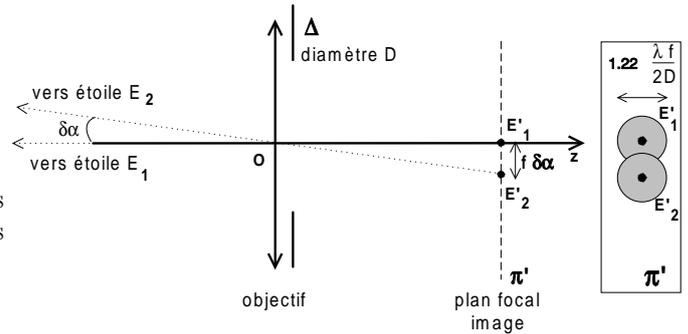
Commentaires : chaque point source produit sur l'image une petite tache de lumière. On comprend bien physiquement qu'un objet constitué d'une juxtaposition de points formera pour image une juxtaposition de petites taches de dimension $1,22 \frac{\lambda z'}{D}$ avec par conséquent la disparition des petits détails plus petits.

Dans ce paragraphe, l'hypothèse clé est la non cohérence des ondes émises par les différents points de l'objet dont on forme l'image. C'est la situation qu'on retrouve chaque fois qu'on ne prend pas de précautions particulières pour l'éclairer⁵, qu'on appelle 'imagerie en lumière incohérente'. On étudiera au chapitre suivant des montages qui éclairent l'objet par une onde cohérente, ce qui ouvre pour la formation de l'image des propriétés toutes à fait nouvelles et étonnantes.

5. Il faudrait éclairer cet objet à partir d'une source ponctuelle monochromatique ou d'un laser pour que ses différents points diffusent des ondes cohérentes entre elles.

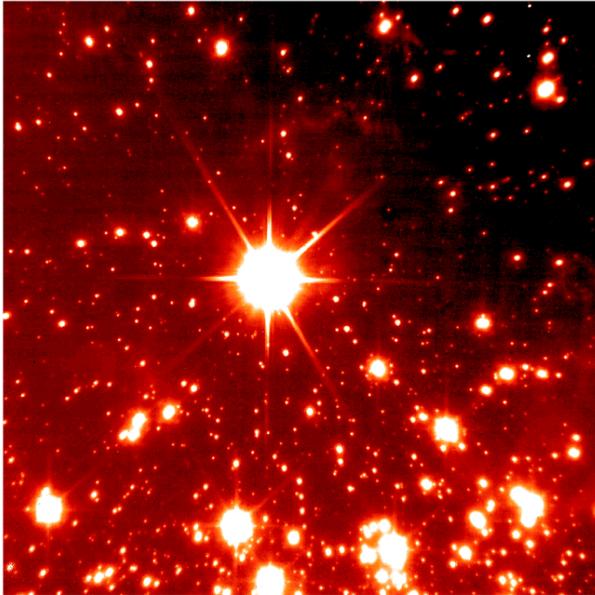
2.4.2 Résolution pour un télescope

Le principe reste le même, en schématisant les systèmes d'imagerie utilisant des miroirs par des systèmes analogues utilisant une lentille de diamètre D .



Le télescope du Mont Palomar a un miroir de diamètre 5 m qui lui confère une résolution angulaire de $\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \cdot 10^{-7}$ radians soit 0,025 seconde d'arc. Avec la distance terre-lune voisine de 380 000 km, cela correspond à résoudre sur la lune deux points lumineux séparés de 50 m.

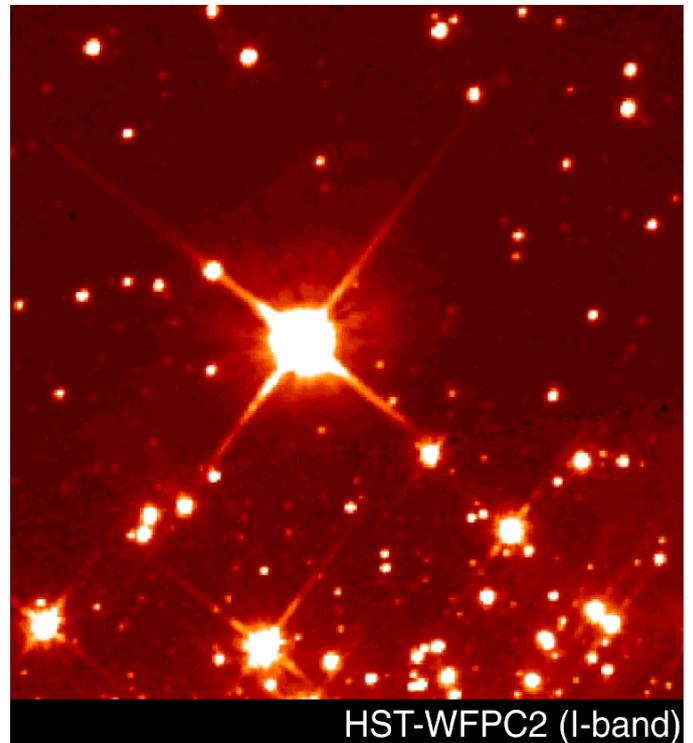
Cependant, les turbulences atmosphériques déplacent de manière aléatoire la position de l'image d'une étoile pour donner une image apparente plus large que celle due à la limite imposée par la diffraction. Un net progrès a été apporté par l'observation depuis l'espace (Hubble Space Telescope, miroir de diamètre 2,4 m, Cf <http://www.stsci.edu/hst/>), mais aussi plus récemment par les techniques d'optique active et d'optique adaptative qui permettent de corriger en partie les déformations de l'onde arrivant d'une étoile jusqu'à un télescope terrestre (Cf annexe 2.6.2).



Area Near Centre of NGC 3603
(VLT YEPUN + NAOS-CONICA)

ESO PR Photo 35c/01 (5 December 2001)

© European Southern Observatory



HST-WFPC2 (I-band)

VLT (chili), diamètre 8 m + optique adaptative. Un télescope de plus grand diamètre recupère plus de photons donc produit des taches plus intenses. De plus, elles sont moins élargies par la diffraction.

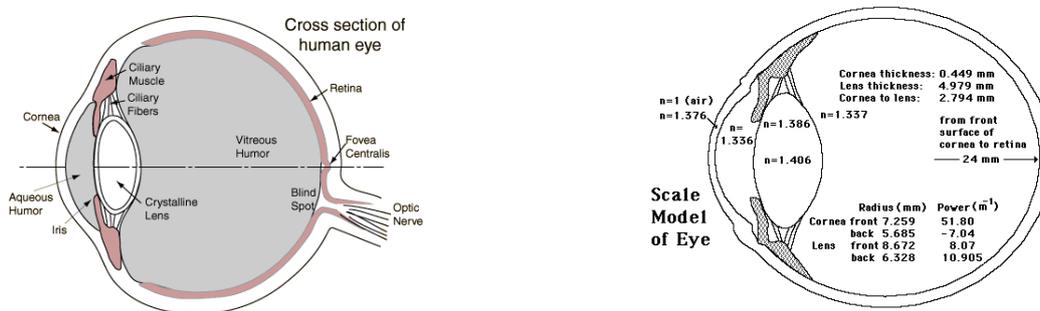
Hubble, diamètre 2,40 m

2.4.3 Résolution de l'oeil

Le cristallin de l'oeil est assimilable à une lentille dont la focale s'ajuste pour former une image sur la rétine. Pour un oeil normal au repos, la focale correspond à la distance cristallin-rétine (24 mm) et le cristallin forme sur la rétine l'image nette d'un objet lointain. Pour un objet plus proche, le cristallin s'incurve pour diminuer sa distance focale et continuer à former une image nette sur la rétine, on dit que l'oeil accommode. Pour faire une comparaison, la distance focale de l'objectif d'un appareil photo reste fixe et c'est la distance lentille pellicule qui s'ajuste.



La résolution de l'oeil dépend de l'individu, de la fatigue, de l'âge, des conditions d'éclairage et de divers autres facteurs. Cependant, en moyenne et en vision diurne, deux facteurs principaux interviennent : la diffraction, qui impose la limite de résolution angulaire, et la structure de la rétine.



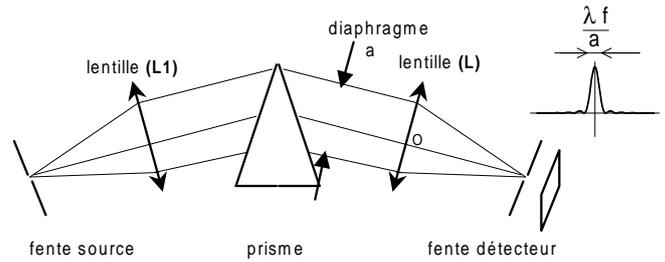
En éclairage assez fort, le diamètre D de la pupille est de l'ordre de 2 mm. La tache de diffraction sur le fond de la rétine a typiquement le diamètre $1,22 \frac{\lambda f}{D} = 1,22 \frac{550 \cdot 10^{-9} \cdot 24 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 8 \mu\text{m}$, voisin de deux fois l'écart moyen entre deux récepteurs (les cônes) sur la zone la plus sensible en vision diurne, la fovéa.

Du fait de cette limite par la diffraction, l'oeil doit être capable de voir distinctement deux points lumineux séparés angulairement de $\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 3,3 \cdot 10^{-4}$ radians soit à peu près 1 minute d'angle. Cela correspondrait par exemple à voir distinctement les phares d'une voiture située à 3 km. Les données médicales indiquent une valeur normale de $\theta = 5 \cdot 10^{-4}$ radians, et des cas exceptionnels descendant à $2 \cdot 10^{-4}$ radians dans les conditions optimales.

2.4.4 Résolution d'un spectroscope à prisme

Le principe d'un spectroscope à prisme est schématisé ci-contre. Cet outil sert à mesurer la longueur d'onde absolue d'un rayonnement. Le prisme dévie un faisceau parallèle d'une quantité qui dépend de son indice, quantité elle-même fonction de la longueur d'onde.

Le faisceau parallèle suivant une direction est obtenu en plaçant une fente étroite au foyer objet d'une lentille (L_1). L'observation se fait dans le plan de formation de l'image géométrique de la fente source. Au niveau de cette image se forme la figure de diffraction de Fraunhofer du diaphragme rectangulaire qui limite l'extension latérale du faisceau parallèle. Dans la pratique, la largeur a de ce diaphragme correspond à la largeur du prisme (10 à 30 cm pour les spectroscopes les plus performants)



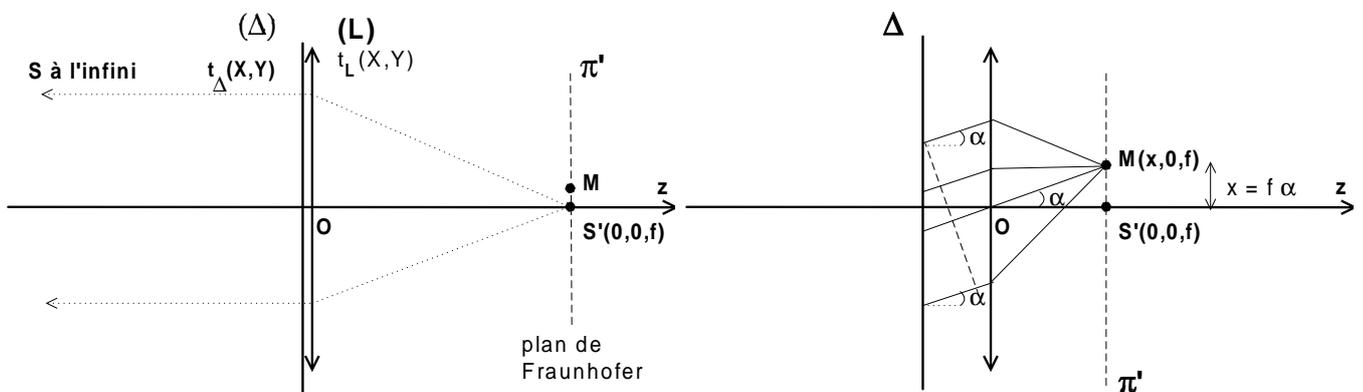
Si le rayonnement contient deux radiations de longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 , celles-ci apparaîtront comme deux fentes distinctes si leur écart est supérieur à la largeur de la figure de diffraction. Le spectroscope sera particulièrement résolvant si

- son indice varie rapidement avec la longueur d'onde (les taches λ_1 et λ_2 sont plus séparées)
- le prisme est de grande dimension (chaque tache est plus fine).
- la fente source est étroite (il y aura alors moins de lumière).

2.5 Commentaires physiques

2.5.1 Diffraction et interférences

On discute le cas d'une source de lumière ponctuelle à l'infini sur Oz . Son image géométrique par la lentille est au point focal image, le plan de Fraunhofer correspond dans ce cas au plan focal image.

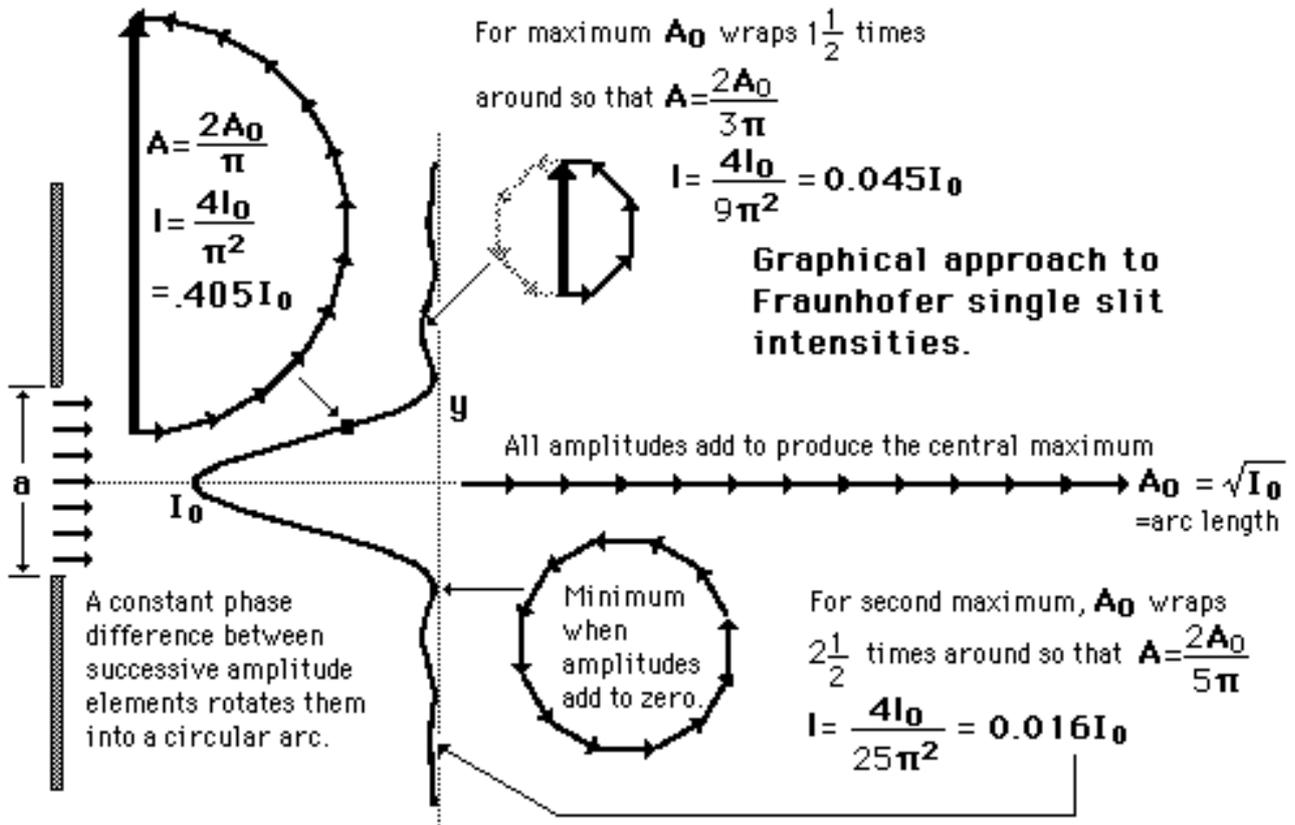


On fait référence pour cette interprétation physique au modèle de Huygens-Fresnel. L'amplitude en un point M est la somme des amplitudes émises par les différents points P de la fente puis se propageant jusqu'à M . Un point $M(x, 0, f)$ du plan de Fraunhofer reçoit les rayons diffractés par le diaphragme dans la direction $\vec{u}(\alpha, 0, 1)$ avec $\alpha = \frac{x}{f}$.

Le diaphragme est éclairé par une onde plane en incidence normale donc les ondelettes émises par les points P sont toutes en phase dans le plan $z = 0$. Entre P et M , chaque ondelette se déphase comme $\exp -i\frac{2\pi}{\lambda_0}[PM]$ et possède en M une amplitude complexe qu'on représente par un vecteur dans le plan complexe, vecteur dont l'orientation dépend du déphasage acquis. On peut montrer que ce déphasage varie d'autant plus vite d'un point P au suivant que l'angle α est important.

L'amplitude au point M est la résultante de ces vecteurs. Le graphe ci-dessous⁶ interprète physiquement comment l'intensité observée en un point M passe par des minima nuls et des maxima de plus en plus faibles en s'éloignant de S' .

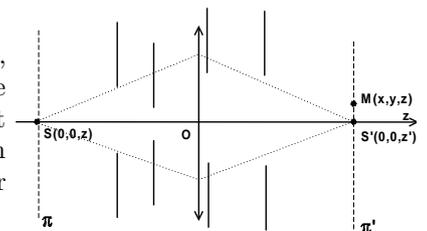
6. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hph.html>



Les points où l'intensité présente localement un maximum sont obtenus lorsque les amplitudes en M issues des différents point P forment des interférences constructives. Les minima locaux sont obtenus par des interférences destructives.

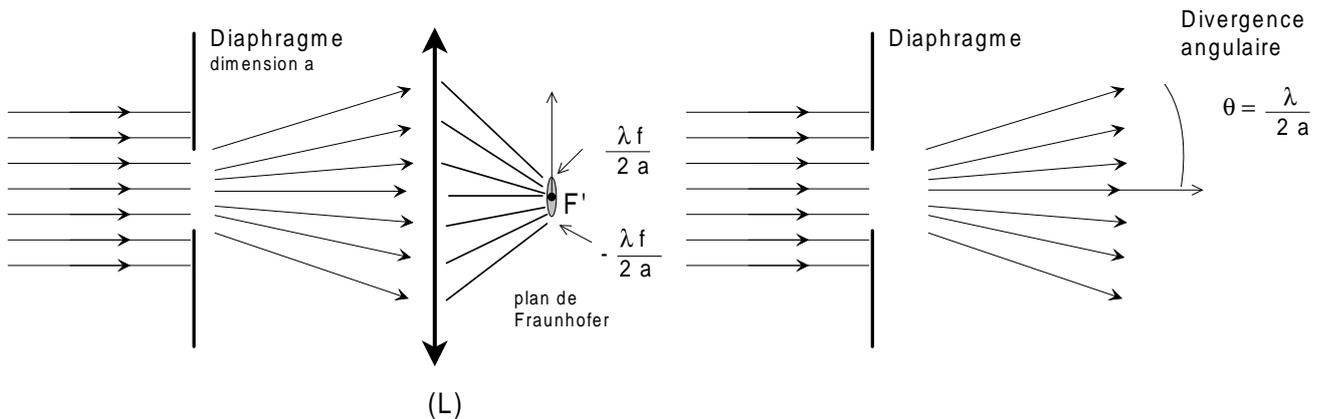
2.5.2 Système optique à plusieurs diaphragmes ou plusieurs lentilles

Un système optique forme l'image S' d'un point source S . Dans la pratique, ce système contient un ou plusieurs diaphragmes limitant l'extension latérale de l'onde, par exemple les montures des lentilles. Lorsqu'un de ces diaphragmes est nettement plus étroit que les autres, la diffraction par celui-ci a une contribution dominante dans l'élargissement de la tache S' . On peut alors en général négliger la diffraction par les autres diaphragmes en les supposant infinis.



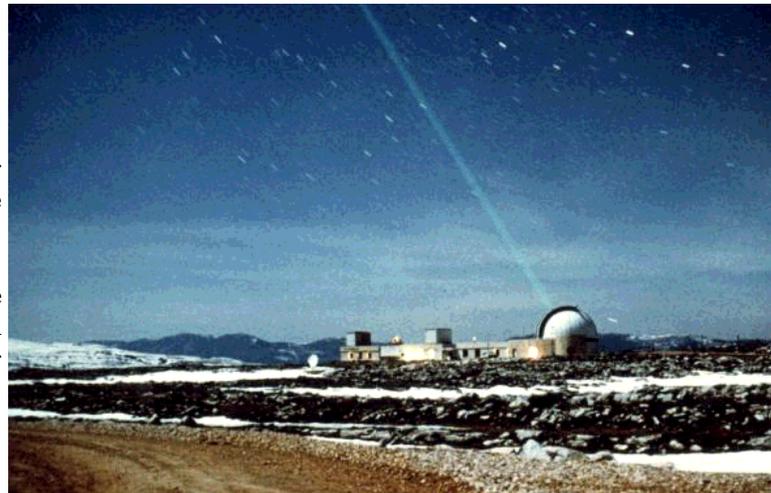
On a le même type de généralisation lorsque S' est l'image de S par un système de plusieurs lentilles de même axe optique. Il sera pratique pour le décrire de se ramener à un montage équivalent où une lentille unique judicieusement placée forme de la source une image à la même position avec le même grandissement. Le plan de Fraunhofer est celui passant par S' et perpendiculaire à l'axe optique.

2.5.3 Divergence d'un faisceau parallèle transmis par un diaphragme



Soit un diaphragme de dimension caractéristique a éclairé par une source ponctuelle à l'infini. Le faisceau transmis convergerait dans le plan focal d'une lentille en une tache de largeur caractéristique $\frac{\lambda f}{a}$. Cela signifie que ce faisceau observé à grande distance après le diaphragme possède une divergence angulaire de l'ordre de $\frac{\lambda}{a}$.

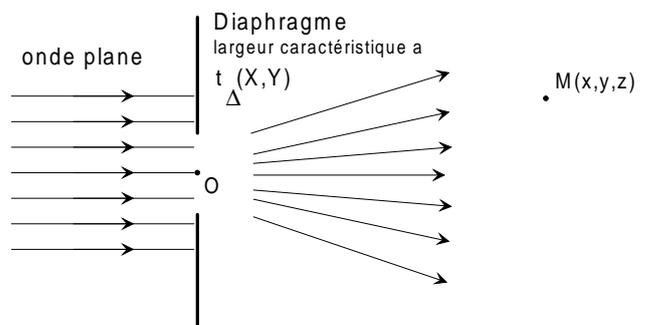
Application : les faisceaux lasers envoyés se réfléchir sur la lune pour suivre l'évolution de la distance terre-lune le sont avec des télescopes de diamètre le plus grand possible. Le même télescope sert à récupérer les photons réfléchis. Le grand diamètre du télescope permet d'une part de contribuer le moins possible à la divergence du faisceau par le phénomène de diffraction, d'autre part de récupérer un plus grand nombre des photons réfléchis.



source : <http://grasse.obs-azur.fr/cerga/laser/laslune/laserlune.jpg>

2.5.4 Diffraction à grande distance

On revient sur le montage sans lentille constitué d'un diaphragme plan Δ éclairé par une source ponctuelle à l'infini sur l'axe. Cet écran transmet de la lumière par une zone contenant O , de largeur caractéristique a , et de facteur de transmission $t_{\Delta}(X, Y)$.



Pour ce montage, la lumière diffractée en un point $M(x, y, z > 0)$ quelconque est donnée par la formule de Fresnel

(forme -I-).

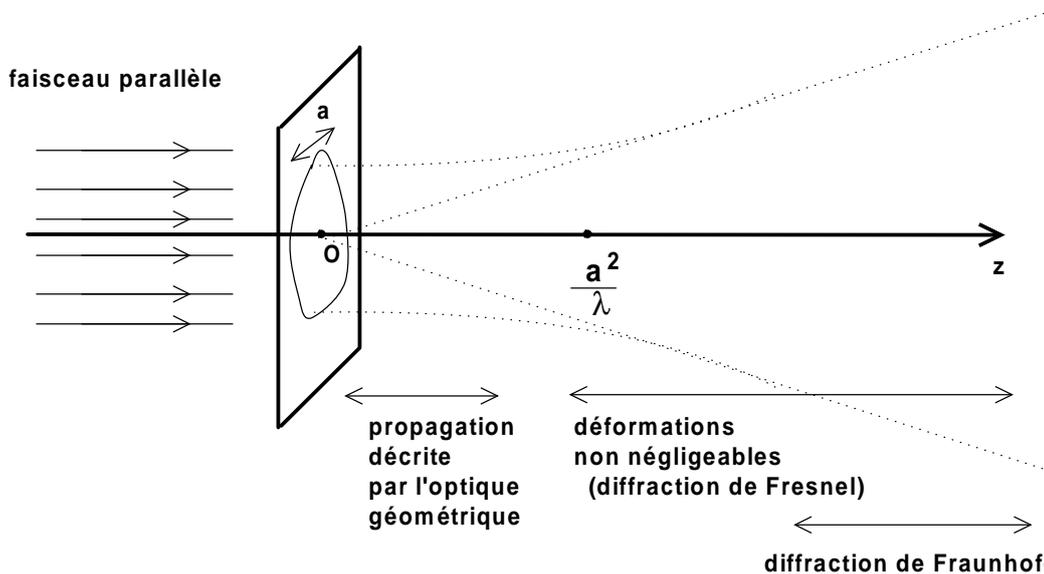
$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp -ikr_0 \int \int_{-\infty}^{+\infty} dX dY \mathcal{A}(O) t_{\Delta}(X, Y) \exp -ik \frac{X^2 + Y^2}{2z} \exp ik \frac{xX + yY}{z}$$

Lorsque z est suffisamment grand pour avoir $k \frac{X^2 + Y^2}{2z} \ll 1$ sur toute l'étendue du diaphragme, on retrouve

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp -ikr_0 \overline{\mathcal{F}}_{[\mathcal{A}(O) t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z} \right)$$

donc une expression correspondant à la formule de Fraunhofer. La condition $k \frac{X^2 + Y^2}{2z} \ll 1$ est vérifiée si

$$k \frac{a^2}{2z} \ll 1 \Leftrightarrow z \gg \frac{ka^2}{2} = \frac{\pi a^2}{\lambda}$$



A cause de cette propriété, on parle parfois pour la diffraction de Fraunhofer de diffraction 'à grande distance', ou 'à l'infini', qui est observée expérimentalement en *ramenant à l'infini dans le plan focal d'une lentille*.

Cette notion est à utiliser avec précautions puisque la simplification utilisée n'est correcte que pour le diaphragme éclairé par une source ponctuelle à l'infini. On retiendra plutôt la formulation générale qui englobe le cas particulier discuté ici : la diffraction de Fraunhofer est celle observée dans le plan de formation de l'image géométrique de la source de lumière.

2.5.5 Analogie physique avec l'incertitude de Heisenberg

Un faisceau parallèle arrive en incidence normale sur un diaphragme de dimension caractéristique a . S'il est très large, on peut le modéliser par une onde plane et considérer que chaque photon incident possède un vecteur d'onde parfaitement défini $\vec{k}(0, 0, \frac{2\pi}{\lambda})$.

Pour un photon traversant le diaphragme, l'incertitude ΔX sur la position est de l'ordre de a . Il est ensuite transmis dans un cône de lumière d'angle de l'ordre de $\alpha = \frac{\lambda}{a}$ donc les coordonnées de son vecteur d'onde sont comprises qualitativement entre $\frac{2\pi}{\lambda}(-\frac{\alpha}{2}, 0, 1)$ et $\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{\alpha}{2}, 0, 1)$ d'où une incertitude sur la composante k_X du vecteur d'onde de l'ordre de $\Delta k_X = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha$. Pour l'impulsion $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ du photon, l'incertitude sur la composante p_X est de l'ordre de $\Delta p_X \simeq \hbar \frac{2\pi}{\lambda} \alpha = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{a}$, d'où

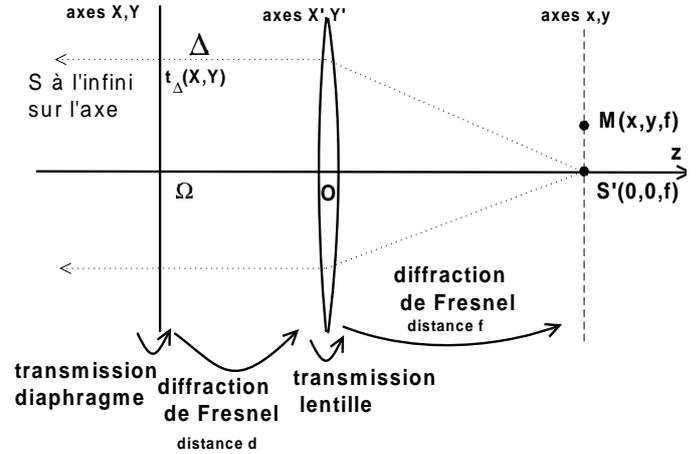
$$\begin{aligned} \Delta X \Delta p_X &= a \hbar \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{a} \\ &= h \end{aligned}$$

Ce résultat évoque l'incertitude de Heisenberg position-impulsion appliquée à l'objet quantique 'photon'.

2.6 Annexes

2.6.1 Calcul de l'amplitude diffracté pour un diaphragme décalé suivant l'axe de la lentille

Schéma de principe :



On décompose le problème

- Amplitude de l'onde incidente au niveau du diaphragme : \mathcal{A}_0
- Amplitude dans le plan de sortie du diaphragme : $\mathcal{A}_0 t_\Delta(X, Y)$
- Amplitude dans le plan d'entrée de la lentille.

C'est le résultat de la diffraction de Fresnel entre le plan Ω^+ et le plan O^- . On utilise la forme II de la formule de Fresnel.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(X', Y', 0^-) &= \mathcal{C} \int \int_{-\infty}^{+\infty} dX dY \mathcal{A}_0 t_\Delta(X, Y) \exp -ik \left[\frac{(X - X')^2 + (Y - Y')^2}{2d} \right] \\ &= \mathcal{C} \left\{ (\mathcal{A}_0 t_\Delta(X, Y)) * \exp -ik \left(\frac{X^2 + Y^2}{2d} \right) \right\} (X', Y') \\ &\text{avec } \mathcal{C} = \frac{i}{\lambda d} \exp -ikd \end{aligned}$$

- Amplitude dans le plan de sortie de la lentille :

$$\mathcal{A}(X', Y', 0^+) = \mathcal{A}(X', Y', 0^-) \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X'^2 + Y'^2}{2f}$$

- Amplitude dans le plan focal image de la lentille : on applique la formule de Fresnel (Forme I) entre le plan de sortie de la lentille et le plan focal image.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y, f) &= \mathcal{C}'(x, y) \int \int_{-\infty}^{+\infty} dX' dY' \mathcal{A}(X', Y', 0) \exp -ik \frac{X'^2 + Y'^2}{2f} \exp ik \frac{xX' + yY'}{f} \\ &\text{avec } \mathcal{C}'(x, y) = \frac{i}{\lambda f} \exp -ikr_0 \\ &\text{et } r_0 = \left(f + \frac{x^2 + y^2}{2f} \right) \\ \mathcal{A}(x, y, f) &= \mathcal{C}'(x, y) \mathcal{C} \int \int_{-\infty}^{+\infty} dX' dY' \left\{ (\mathcal{A}_0 t_\Delta(X, Y)) * \exp -ik \left(\frac{X^2 + Y^2}{2d} \right) \right\} (X', Y') \\ &\quad \exp i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X'^2 + Y'^2}{2f} \exp -ik \frac{X'^2 + Y'^2}{2f} \exp i2\pi \frac{xX' + yY'}{\lambda f} \\ &= \mathcal{C}'(x, y) \mathcal{C} \overline{\mathcal{F}} \left[\left\{ (\mathcal{A}_0 t_\Delta(X, Y)) * \exp -ik \left(\frac{X^2 + Y^2}{2d} \right) \right\} \right] \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right) \\ &= \mathcal{C}'(x, y) \mathcal{C} \overline{\mathcal{F}}_{[\mathcal{A}_0 t_\Delta(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right) \overline{\mathcal{F}}_{\left[\exp -i2\pi \left(\frac{X^2 + Y^2}{2\lambda d} \right) \right]} \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right) \end{aligned}$$

La table de transformées de Fourier à deux dimensions donne

$$\overline{\mathcal{F}} \left[\frac{1}{b^2} \exp -\pi \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{b} \right)^2 \right] (x, y) = \exp -\pi b^2 (x^2 + y^2)$$

En prenant $-\frac{\pi}{b^2} = \frac{-i2\pi}{2\lambda d} \Leftrightarrow b^2 = -i\lambda d$, il vient

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{F}}_{\left[\exp -ik\left(\frac{x^2+y^2}{2d}\right)\right]} \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) &= -i\lambda d \exp i\pi\lambda d \frac{x^2+y^2}{(\lambda f)^2} \\ &= -i\lambda d \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda} d \frac{x^2+y^2}{2f^2}\right) \\ &= -i\lambda d \exp\left(ikd \frac{x^2+y^2}{2f^2}\right)\end{aligned}$$

d'où l'amplitude diffractée

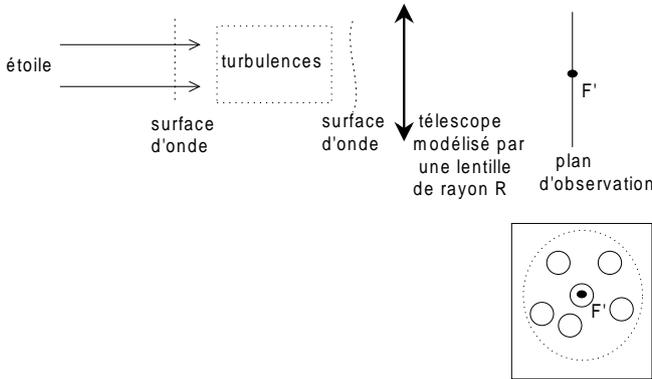
$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x, y, f) &= C'(x, y) \mathcal{C}(-i)\lambda d \exp\left(-ik \frac{x^2+y^2}{2f}\right) \bar{\mathcal{F}}_{[A_0 t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \\ &= \frac{i}{\lambda f} \exp -ik\left(f + \frac{x^2+y^2}{2f}\right) \frac{i}{\lambda d} \exp -ikd \\ &\quad (-i)\lambda d \exp\left(ikd \frac{x^2+y^2}{2f^2}\right) \bar{\mathcal{F}}_{[A_0 t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \\ &= \frac{i}{\lambda f} \exp -ik(f+d) \exp -ik\left[\frac{(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{f} - \frac{d}{f^2}\right)\right] \bar{\mathcal{F}}_{[A_0 t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)\end{aligned}$$

L'amplitude diffractée possède la même forme que celle obtenue pour le diaphragme accolé à la lentille, à un facteur de phase près. L'intensité observée est la même dans les deux cas.

La situation pour laquelle le plan diffractant est dans le plan focal objet de la lentille ($d = f$) est un cas particulier où le préfacteur de $\bar{\mathcal{F}}_{[A_0 t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$ est indépendant de la position (x, y) du point dans le plan d'observation.

2.6.2 Optique adaptative

On a appliqué le critère de Rayleigh en considérant que l'image de chaque étoile est une tache d'Airy (diamètre $1,22 \frac{\lambda f}{2R}$). En réalité d'autres phénomènes peuvent intervenir pour élargir l'image d'un point. Le plus gênant est la turbulence atmosphérique se produisant dans la colonne d'air de quelques dizaines de mètres au dessus des télescopes.



Considérons une étoile pointée dans l'axe du télescope. Sans turbulence, la phase dans le plan $z = 0^-$ serait uniforme, ϕ_0 . Les turbulences et les gradients d'indice associés déforment légèrement l'onde pour donner en $z = 0^-$ la phase $\phi(X, Y)$. Au premier ordre, on note $\phi(X, Y) = \phi_0 - 2\pi\left(\frac{\alpha X + \beta Y}{\lambda}\right)$.

L'amplitude dans le plan $z = 0^-$ est de la forme $\mathcal{A}_0 \exp i\phi_0 \exp -i2\pi\left(\frac{\alpha X + \beta Y}{\lambda}\right)$, comme dans le cas d'une source ponctuelle à l'infini dans la direction $-\vec{u}$ avec $\vec{u}(\alpha, \beta, 1)$. Il se forme donc dans le plan d'observation une tache de lumière de diamètre $1,22 \frac{\lambda f}{2R}$ centrée en $(x, y) = (f\alpha, f\beta)$.

Les turbulences font varier aléatoirement α et β à l'échelle de 10^{-2} à 10^{-1} seconde, ce qui déplace l'image de l'étoile autour de F' à cette cadence. Une étoile peu lumineuse doit être observée avec un temps de pose plus long, on ne peut pas mesurer sa position instantanée.

Le principe de l'optique adaptative est de déformer en temps réel le miroir du télescope de manière à maintenir l'image de l'étoile le plus précisément possible à proximité de F' . Cette correction facile à faire pour une étoile très lumineuse stabilise également les positions des autres étoiles dans le champ d'observation : l'effet des turbulences est compensé. Par contre, il n'y a pas de telles étoiles de référence dans tous les zones du ciel qu'on souhaite observer et il faut mettre en oeuvre des techniques spécifiques. On pourra citer celle des 'étoiles laser artificielles' permettant de créer depuis le sol un point lumineux intense situé au delà des couches atmosphériques produisant des turbulences, à n'importe quelle position dans le champ d'observation, et qui jouera le même rôle de référence qu'une étoile intense.

2.6.3 Table de Transformées de Fourier

Fonction	Transformée de Fourier
$f(r)$	$F(u)$
$f(r) = \overline{\mathcal{F}}_{[F(u)]}(r)$	$F(u) = \mathcal{F}_{[f(r)]}(u)$
$f(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{i2\pi ur} du$	$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) e^{-i2\pi ur} dr$
$f(ar)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{u}{a}\right)$
$f^*(r)$	$F^*(-u)$
$f(r - r_0)$	$e^{-i2\pi ur_0} F(u)$
$e^{i2\pi u_0 r} f(r)$	$F(u - u_0)$
$\delta(r)$	1
1	$\delta(u)$

Fonction	Transformée de Fourier
$e^{i2\pi u_0 r}$	$\delta(u - u_0)$
$\delta(r - r_0)$	$e^{-i2\pi ur_0}$
$ b e^{-\pi b^2 r^2}$	$e^{-\pi \left(\frac{u}{b}\right)^2}$
$\frac{2a}{1 + 4\pi^2 a^2 r^2}$ avec a positif	$e^{- u /a}$
$\begin{cases} a \operatorname{sinc}(ar) \\ \text{avec } \operatorname{sinc}(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z} \end{cases}$	$\begin{cases} \operatorname{rect}_a(u) & \text{ou } \operatorname{rect} \frac{u}{a} \\ \text{où } \operatorname{rect}_a(u) = 1 & \text{pour } -\frac{a}{2} \leq u \leq \frac{a}{2} \\ \text{et } \operatorname{rect}_a(u) = 0 & \text{pour } u > \frac{a}{2} \end{cases}$
$\begin{cases} \exp -\frac{r}{2a} & \text{pour } r \geq 0, \text{ avec } a \geq 0 \\ 0 & \text{pour } r < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i2\pi u + \frac{1}{2a}}$

On a la propriété utile :

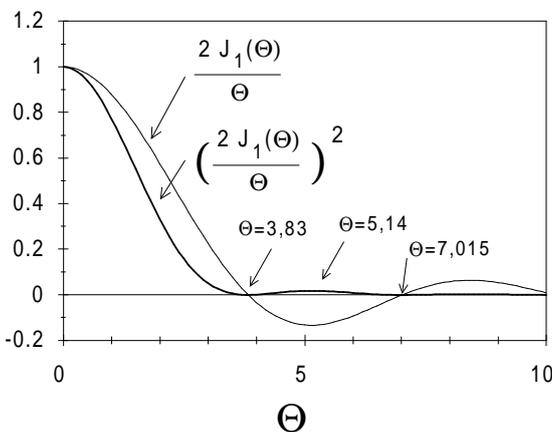
$$\overline{\mathcal{F}}_{[f(r)]}(u) = \mathcal{F}_{[f(r)]}(-u)$$

Fonction	Transformée de Fourier
$f(r, s)$	$F(u, v)$
$f(r, s) = \overline{\mathcal{F}}[F(u, v)](r, s)$	$F(u, v) = \mathcal{F}[f(r, s)](u, v)$
$f(r, s) = \int \int F(u, v) e^{i2\pi(ur+vs)} du dv$	$F(u, v) = \int \int f(r, s) e^{-i2\pi(ur+vs)} dr ds$
$f(ar, bs)$	$\frac{1}{ a } \frac{1}{ b } F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$
$f^*(r, s)$	$F^*(-u, -v)$
$f(r - r_0, s - s_0)$	$e^{-i2\pi(ur_0 + vs_0)} F(u, v)$
$e^{i2\pi(u_0r + v_0s)} f(r, s)$	$F(u - u_0, v - v_0)$
$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi R^2 2J_1(2\pi\sqrt{r^2 + s^2}R)}{2\pi\sqrt{r^2 + s^2}R} \\ \text{où } J_1 \text{ est la fonction de Bessel sphérique d'ordre 1} \\ \text{(voir figure ci-dessous)} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{circ}_R(u, v), \text{ ou } \text{circ} \frac{\rho}{R} \text{ avec } \rho = \sqrt{u^2 + v^2} \\ \text{circ}_R(u, v) = \text{circ}_R(\rho) = 1 \text{ pour } \rho \leq R \\ \text{et } \text{circ}_R(u, v) = \text{circ}_R(\rho) = 0 \text{ pour } \rho > R \end{array} \right.$

Fonction	Transformée de Fourier
$b^2 e^{-\pi b^2(r^2 + s^2)}$	$e^{-\frac{\pi}{b^2}(u^2 + v^2)}$
$f(r) g(s)$	$F(u) G(v)$

On a la propriété utile :

$$\overline{\mathcal{F}}_{[f(r,s)]}(u, v) = \mathcal{F}_{[f(r,s)]}(-u, -v)$$



Les trois premiers zéros de $J_1(\theta)$ sont :

- $\theta = 3,83$
- $\theta = 7,02$
- $\theta = 10,2$

Produit de convolution

Définition :

$$f * g(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(r-t) dt$$

Transformée de Fourier du produit de convolution (pour deux fonctions f et g de la même variable) :

Fonction	Transformée de Fourier
f	F
g	G
$f * g$	$F G$
$f g$	$F * G$

2.6.4 Séries de Fourier

Série de Fourier

Le développement en série de Fourier de la fonction périodique $f(r)$ de période r_0 peut s'écrire :

$$f(r) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p e^{-i2\pi p \frac{r}{r_0}} \quad \text{avec} \quad c_p = \frac{1}{r_0} \int_{-r_0/2}^{+r_0/2} e^{i2\pi p \frac{r}{r_0}} f(r) dr = \frac{1}{r_0} \overline{\mathcal{F}}_{[f(r) \text{ rect}_{r_0}(r)]} \left(\frac{p}{r_0} \right)$$

Chapitre 3

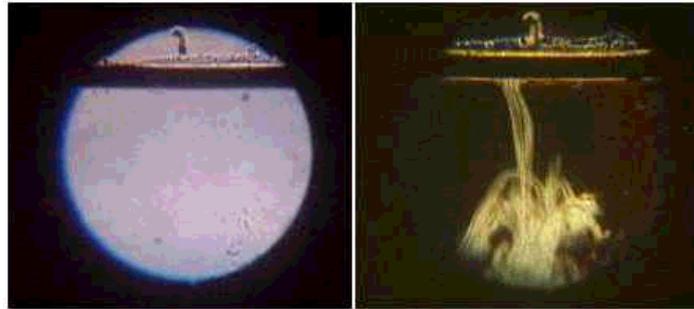
IMAGERIE EN LUMIERE COHERENTE - OPTIQUE DE FOURIER - HOLOGRAPHIE

Introduction

Dans les chapitres précédents, on a caractérisé le phénomène de diffraction et montré qu'il pouvait nuire à la qualité de restitution d'une image par un système optique. Le paramètre critique est la dimension du diaphragme limitant l'extension latérale du faisceau. On a introduit le formalisme reliant dans certaines conditions la forme de l'image d'une source ponctuelle à la transformée de Fourier inverse du facteur de transmission de ce diaphragme. On va maintenant s'intéresser à des applications très particulières du phénomène de diffraction apparaissant lorsque l'objet à imager est éclairé par une onde cohérente. Les ondes réfléchies, diffusées ou transmises par les différents points de l'objet sont alors toutes cohérentes entre elles. Un système optique forme une image de cet objet. L'utilisation de lumière cohérente donne la possibilité de réaliser du traitement de cette image (lissage, modification du contraste, visualisation de détails transparents, suppression de défauts) par des techniques optiques, en plus des propriétés de formation d'une image déjà étudiées lorsque l'objet est éclairé en lumière incohérente.

L'exemple présenté ci-dessous montre qu'on peut faire apparaître des détails a priori non visibles comme par exemple des inhomogénéités d'indice dans un fluide transparent.

Image d'une cuve d'eau dans laquelle on a fait tomber une goutte de glycérol ; sans traitement optique (à gauche) et avec filtrage 'passe-haut' des fréquences spatiales (à droite).



3.1 Notion de fréquence spatiale

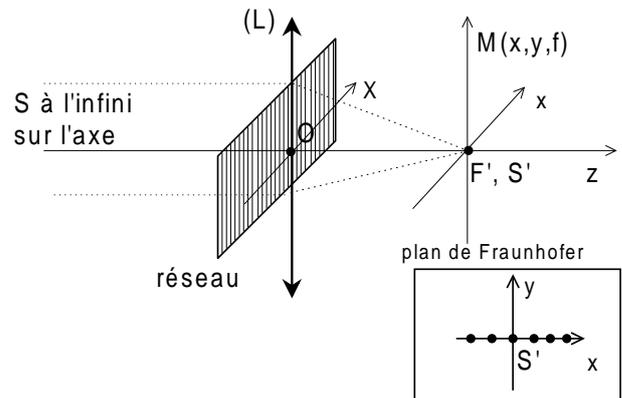
3.1.1 Objet périodique

Soit un réseau par transmission éclairé par un faisceau parallèle à l'axe Oz .

- l'éclairage en incidence normale par une onde plane monochromatique correspond à un point source à l'infini sur l'axe, dont l'image géométrique est au point focal de la lentille. Le plan de Fraunhofer est pour $z' = f$.

- Le réseau $t_{\Delta}(X, Y) = t_{\infty}(X) \times 1_Y$ a la période d suivant X avec l'écriture en série de Fourier (cf II.3.2) :

$$t_{\infty}(X) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} C_p \exp -i2\pi p \frac{X}{d}$$



L'amplitude complexe diffractée dans le plan de Fraunhofer s'écrit :

$$\mathcal{A}(x, y, f) = \mathcal{C}(x, y) \mathcal{A}(O) \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} C_p \underbrace{\delta\left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{p}{d}\right) \times \delta\left(\frac{y}{\lambda f}\right)}_{\text{tache en } (x, y) = \left(p \frac{\lambda f}{d}, 0\right)}$$

Il apparaît un lien mathématique direct entre la tache de lumière au point (x, y) du plan de Fraunhofer tel que $\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) = \left(p \times \frac{1}{d}, 0\right)$ et le terme $C_p \exp -i2\pi p \frac{X}{d} \times 1_Y$ de $t_{\Delta}(X, Y)$.

On écrit :¹

1. Le terme de fréquence est introduit par analogie avec les notions temps-fréquences apparaissant dans la représentation complexe $\exp i2\pi\nu t$ d'une onde monochromatique.

$$\exp -i2\pi X \frac{p}{d} \times 1_Y = \underbrace{\exp -i2\pi X \frac{p}{d}}_{\substack{\text{le facteur de } -i2\pi X \text{ est par définition} \\ \text{la fréquence spatiale associée à } X \\ f_x = \frac{p}{d} \text{ (m}^{-1}\text{)}}} \times \underbrace{\exp(-i2\pi Y \times 0)}_{\substack{\text{le facteur de } -i2\pi Y \text{ est par définition} \\ \text{la fréquence spatiale associée à } Y \\ f_y = 0 \text{ (m}^{-1}\text{)}}}$$

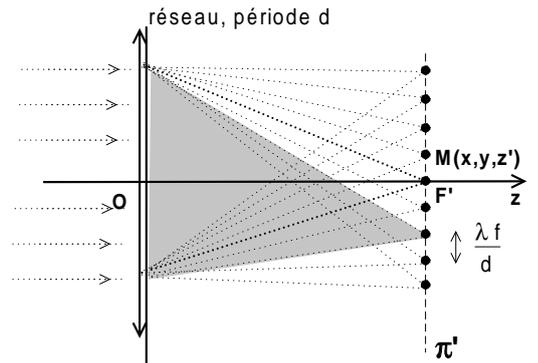
Généralisation :
 lorsqu'un objet (Δ) est éclairé par une onde cohérente, il se forme dans le plan de Fraunhofer $z = z'$ des taches de lumière aux points (x, y) tels que les quantités $(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'})$ correspondent aux fréquences spatiales présentes dans le facteur de transmission de (Δ).

Remarque : dans certains livres, le plan de Fraunhofer est appelé "plan de Fourier".

Interprétation physique.

Les ondelettes émises par chacun des points P du diaphragme sont cohérentes. L'addition de leurs amplitudes produit des interférences. Dans le plan de Fraunhofer, ces interférences ne sont constructives qu'aux points (x, y) tels que les quantités $(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f})$ associées correspondent à des fréquences spatiales de l'objet diffractant.

Cette propriété de l'éclairement de π' n'apparaît donc que parce que (Δ) est éclairé par une onde cohérente.



Autre interprétation physique (Cf annexe 3.5.1) : t_Δ est la somme de termes $C_P \exp -2i\pi p \frac{X}{d}$ correspondant chacun à un prisme de petit angle A vérifiant $\frac{(n-1)A}{\lambda} = \frac{p}{d}$ et donc faisant converger une onde incidente parallèle à l'axe au point $x = p \frac{\lambda f}{d}$ du plan focal.

3.1.2 Fréquences spatiales d'un objet non périodique

Les notions précédentes sont généralisées au cas d'un objet non périodique.

On note $\mathcal{S}(f_x, f_y) = \overline{\mathcal{F}}_{[t_\Delta(X,Y)]}(f_x, f_y)$. La propriété mathématique $\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} t_\Delta = t_\Delta$ permet d'écrire

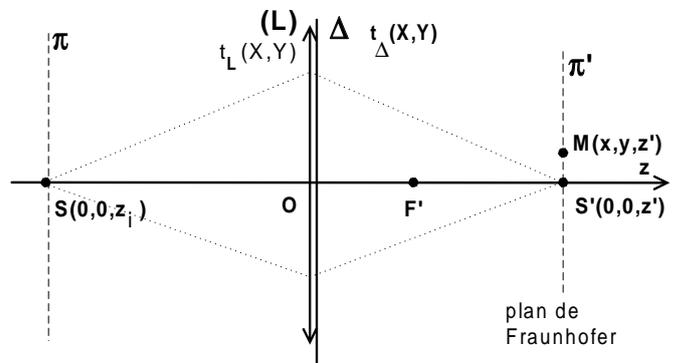
$$t_\Delta(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}(f_x, f_y) \exp -i2\pi(f_x X + f_y Y) df_x df_y$$

Interprétation physique : $t_\Delta(X, Y)$ s'écrit comme une somme continue de termes $\exp -i2\pi f_x X \exp -i2\pi f_y Y$ ayant la fréquence spatiale f_x suivant X et f_y suivant Y , avec pour chacun le poids $\mathcal{S}(f_x, f_y) df_x df_y$ dans la sommation. La fonction $\mathcal{S}(f_x, f_y)$ est appelée le **spectre des fréquences spatiales** de $t_\Delta(X, Y)$.

On observe la figure de diffraction de cet objet dans les conditions de Fraunhofer (montage ci-contre). L'amplitude obtenue au point (x, y) du plan de Fraunhofer $z = z'$ vaut

$$\mathcal{A}(x, y, z') = \mathcal{C}(x, y) \mathcal{A}(O) \overline{\mathcal{F}}_{[t_\Delta(X,Y)]}\left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'}\right)$$

c'est à dire $\mathcal{C}(x, y) \mathcal{A}(O) \mathcal{S}(f_x, f_y)$ avec $\mathcal{C}(x, y) = \frac{\exp -ikz'}{\lambda z'} \exp -ik \frac{x^2 + y^2}{2z'}$.



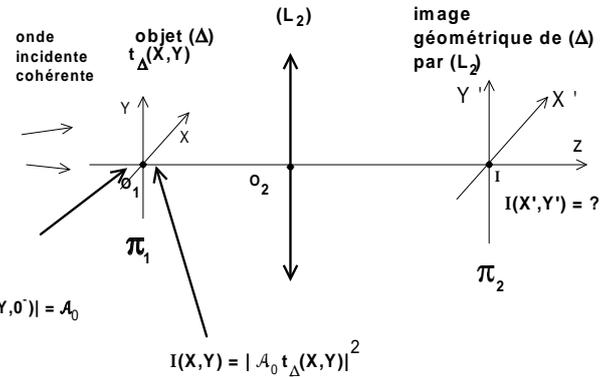
L'amplitude au point (x, y) du plan de Fraunhofer est donc égale, au facteur $\mathcal{A}(O) \mathcal{C}(x, y)$ près, au poids des fréquences spatiales $(f_x, f_y) = (\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'})$ dans le facteur de transmission $t_\Delta(X, Y)$ de l'objet diffractant.

La répartition de l'éclairement dans le plan de Fraunhofer donne une illustration de la répartition des fréquences spatiales de l'objet.

3.2 Filtrage des fréquences spatiales

3.2.1 Principe

Soit un objet (Δ) de facteur de transmission $t_{\Delta}(X, Y)$, perpendiculaire en O_1 à l'axe Oz (plan π_1). Il est éclairé par une onde $\mathcal{A}_i(X, Y, 0)$ vérifiant $|\mathcal{A}_i(X, Y, 0)| = \mathcal{A}_0$ sur tout π_1 . L'intensité émergente au niveau du point (X, Y) de ce plan vaut $|\mathcal{A}_0 t_{\Delta}(X, Y)|^2$. Une lentille (L_2) de centre optique O_2 , axe O_2z et distance focale f_2 forme l'image de O_1 en I . Le plan perpendiculaire en I à O_2z est noté plan image π_2 .



On a la relation de conjugaison objet image de Gauss :

$$-\frac{1}{O_2O_1} + \frac{1}{O_2I} = \frac{1}{f_2}$$

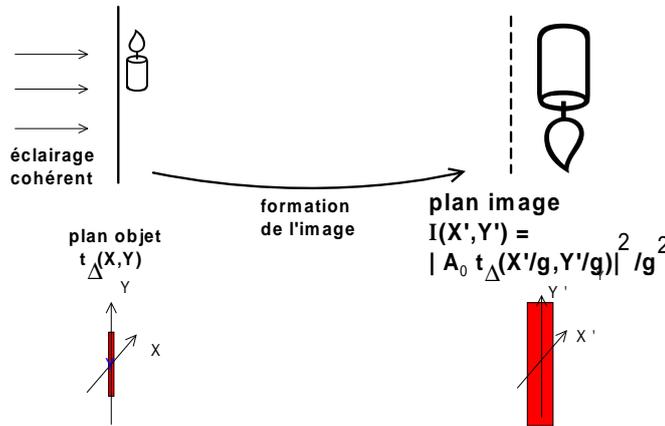
$$\Leftrightarrow \overline{O_2I} = \frac{f_2 \overline{O_2O_1}}{\overline{O_2O_1} + f_2} \quad \text{positif pour } \overline{O_2O_1} < -f_2 \text{ (image réelle)}$$

$$\text{grandissement } g = \frac{\overline{O_2I}}{\overline{O_2O_1}}$$

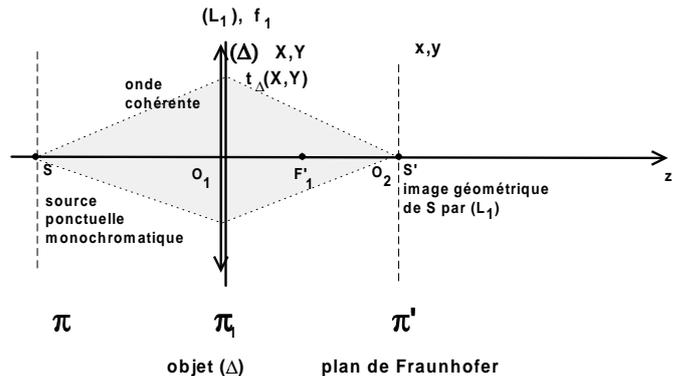
L'énergie lumineuse transmise au niveau de π_1 se répartit sur une surface g^2 fois plus grande de π_2 . L'intensité est l'énergie lumineuse par unité de surface et de temps, sa valeur moyenne sur π_2 est égale à celle sur π_1 atténuée d'un facteur g^2 . Plus précisément, l'intensité au point (X', Y') du plan image π_2 reproduit celle au point $(X = X'/g, Y = Y'/g)$ du plan objet π_1 , atténuée d'un facteur g^2 , d'où la formulation :

$$I(X', Y') = \frac{1}{g^2} |\mathcal{A}_0 t_{\Delta}(X'/g, Y'/g)|^2$$

Exemple :



On précise maintenant le système optique choisi pour éclairer (Δ). L'onde incidente provient d'une source ponctuelle monochromatique S , elle est donc cohérente. On place juste avant (Δ) une lentille (L_1) de centre optique O_1 , axe O_2z et distance focale f_1 . La position de S et la distance focale de (L_1) sont choisies pour que la lentille forme en O_2 l'image géométrique de S . Le plan π' perpendiculaire en O_2 à O_2z est donc le plan de Fraunhofer, il s'y forme la figure de diffraction de Fraunhofer de (Δ) éclairé par S .

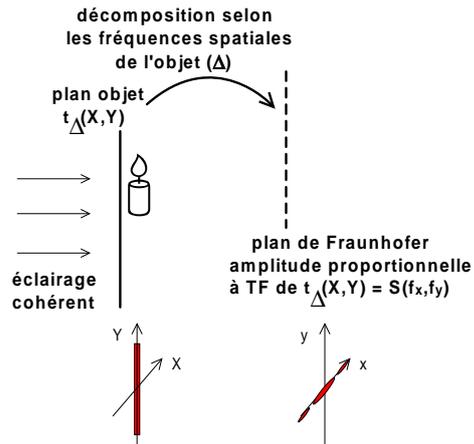


L'amplitude dans π' s'écrit :

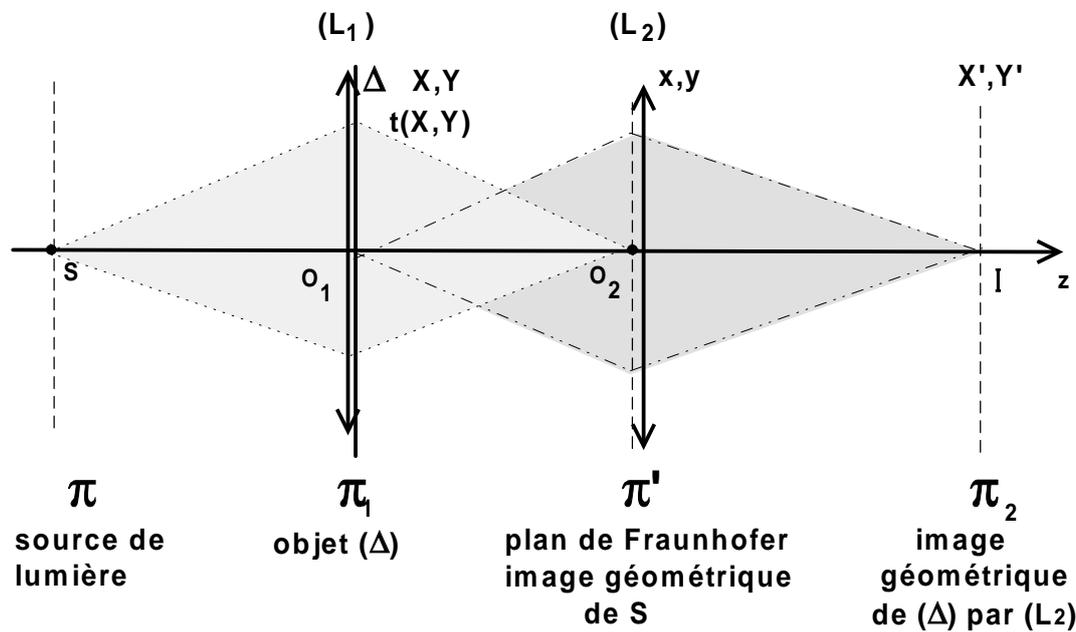
$$\mathcal{A}(x, y, O_2) = \mathcal{C}(x, y) \mathcal{A}(O_1) \overbrace{\mathcal{F}_{[t_\Delta(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda O_1 O_2}, \frac{y}{\lambda O_1 O_2} \right)}^{S(f_x, f_y)}$$

la lumière en $M(x, y)$ sur π' correspond au poids de la fréquence spatiale $(f_x, f_y) = \left(\frac{x}{\lambda O_1 O_2}, \frac{y}{\lambda O_1 O_2} \right)$ dans $t_\Delta(X, Y)$. On reformule ceci en disant que la répartition de l'amplitude dans π' correspond à la décomposition en fréquences spatiales de $t_\Delta(X, Y)$.

Exemple (partie inférieure de la figure) : décomposition en fréquences spatiales d'une fente verticale (figure de diffraction de Fraunhofer). La source et la lentille du montage ne sont pas représentées. Si l'objet était une bougie (partie supérieure de la figure), on retiendra seulement que sa figure de diffraction ne ressemblerait absolument pas à une bougie.



Les deux montages précédents sont maintenant combinés :



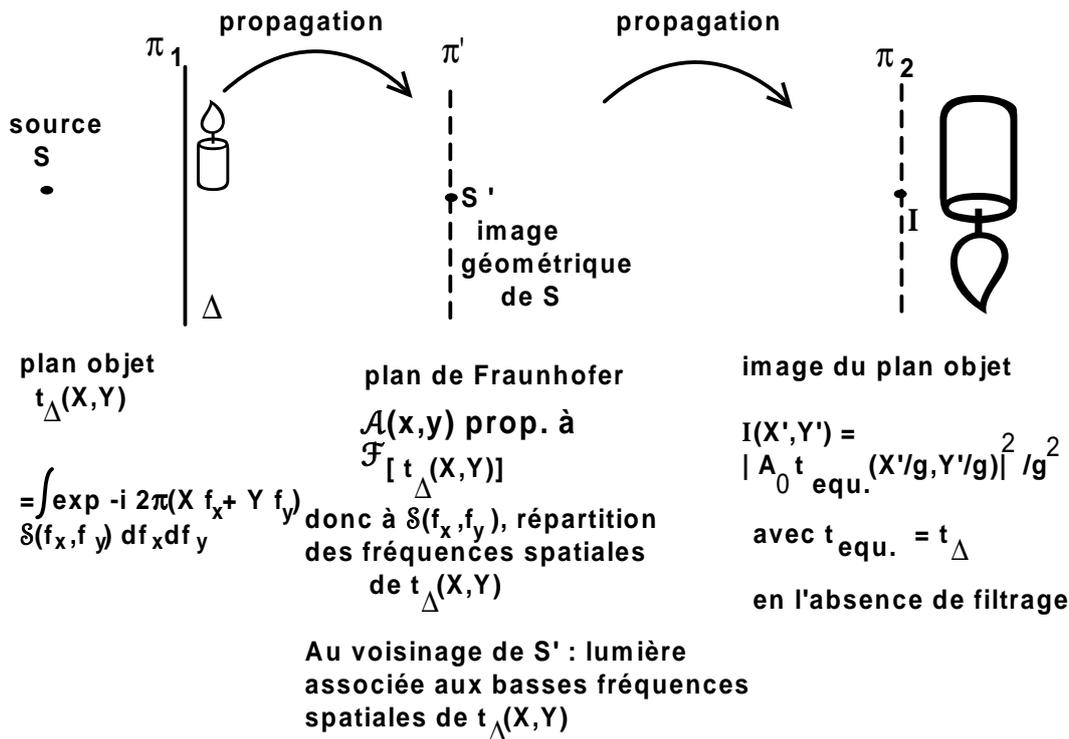
Tout se passe comme si le rayonnement issu des points du plan (π'^+) reconstituait dans (π_2) l'image de l'objet (Δ) avec le grandissement g . Or, l'amplitude observée dans π' traduit **la décomposition en fréquences spatiales du facteur de transmission de (Δ)**². La propagation entre (π'^+) et (π_2) semble reconstruire l'image de (Δ) à partir du spectre de ses fréquences spatiales.

En supprimant la lumière émise par certains points de (π'^+), on peut enlever la contribution de certaines fréquences spatiales à la reconstruction de l'image et observer les modifications induites. Selon le même principe, on peut atténuer ou déphaser le poids de certaines fréquences dans la reconstruction de l'image et en observer les conséquences.

L'utilisation de ces techniques s'appelle 'imagerie en lumière cohérente' ou 'optique de Fourier'.

2. On a cette propriété uniquement si (Δ) est éclairé en lumière cohérente

Synthèse des notions importantes :



- Δ : objet éclairé par S , avec l'écriture mathématique $t_{\Delta}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}(f_x, f_y) df_x df_y \exp -i2\pi(f_x X + f_y Y)$.

- S' image géométrique de S

- le plan π' passant par S' est le plan où se forme la figure de diffraction de Fraunhofer de (Δ) éclairé par S .

- dans le plan de S' , information complémentaire sur Δ : au point x, y de π' se trouve une amplitude complexe proportionnelle au poids des fréquences spatiales $(f_x, f_y) = (\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'})$ dans $t_{\Delta}(X, Y)$.

- propagation de la lumière entre π' et π_2 : reconstruction de l'image de Δ à partir du spectre de ses fréquences spatiales.

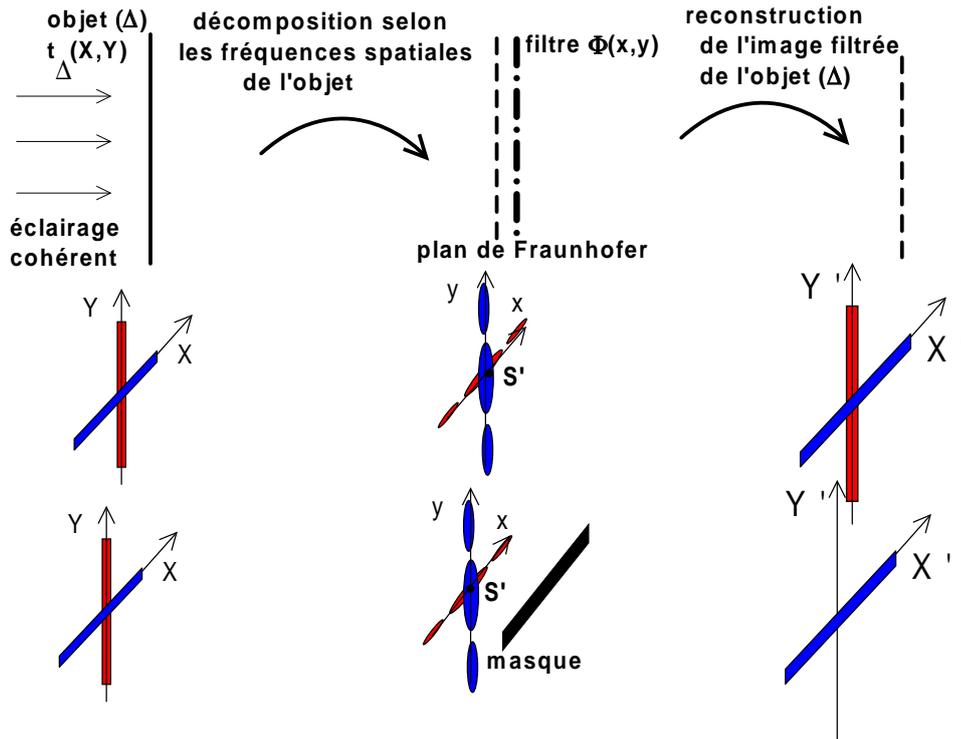
- en sortie de π' , on peut arrêter ou modifier la lumière transmise au niveau de (x, y) pour modifier la contribution de la fréquence spatiale (f_x, f_y) dans la reconstruction de l'image de Δ sur π_2 :

La modification de l'amplitude dans (π') est appelée 'filtrage des fréquences spatiales'. L'image alors obtenue dans (π_2) est l'image filtrée.

Remarque : le calcul complet de l'amplitude de l'image reconstruite à partir du spectre des fréquences spatiales de l'objet est donné en annexe 3.5.2 pour la cas sans filtrage. Il faut le combiner à la technique décrite au §3.2.5 pour le cas avec filtrage.

3.2.2 Exemples qualitatifs

Exemple 1.



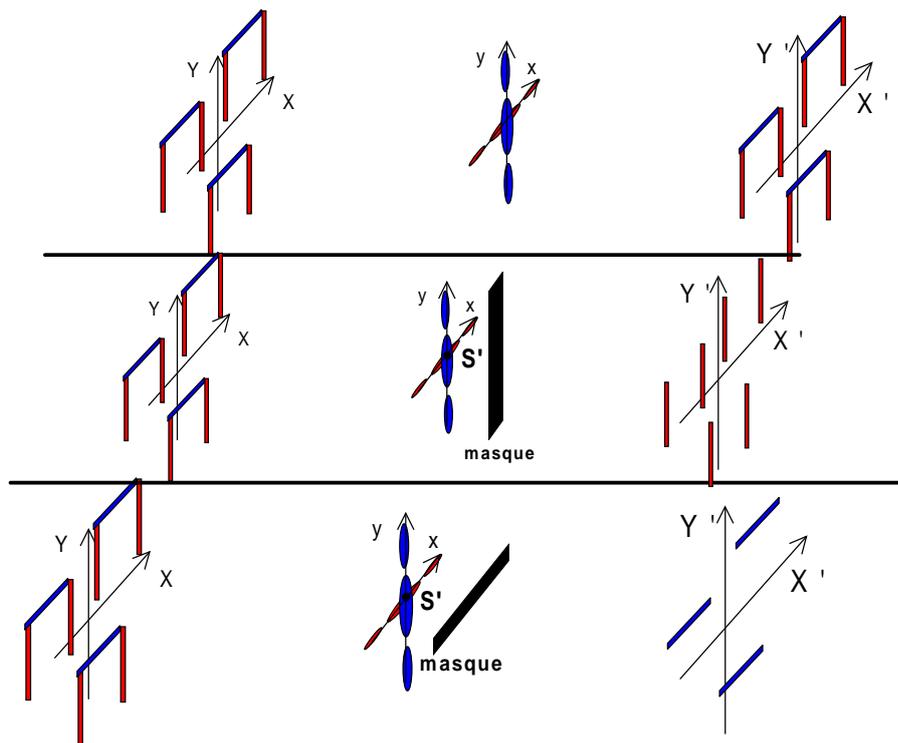
- détail 'petit' sur l'objet suivant X (variations rapides du facteur de transmission en X) -> tache de diffraction 'large' suivant $S'x$ où contribuent fortement les hautes fréquences spatiales, avec de la lumière diffractée en des points (x,y) éloignés de S' .
- détail 'large' sur l'objet suivant X (variations lentes du facteur de transmission en X) -> tache de diffraction 'étroite' sur $S'x$ où ne contribuent significativement que les basses fréquences spatiales.
- exemples donnés suivant X à généraliser pour toute direction.

Exemple 2.

Propriété utilisée : l'intensité diffractée dépend de la forme d'une fente mais pas de sa position.

Toutes les fentes horizontales contribuent à la tache diffractée selon $S'y$;

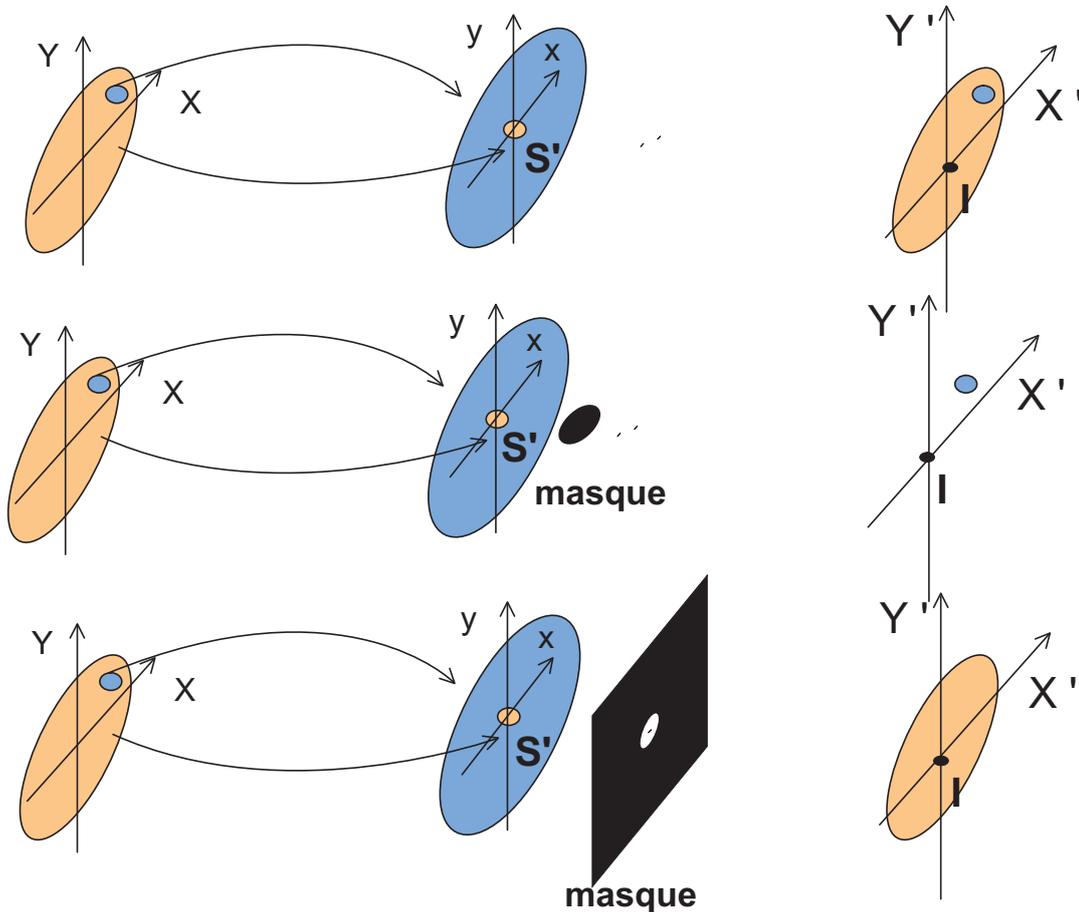
Toutes les fentes verticales contribuent à la tache diffractée selon $S'x$;



Exemple 3.

Nouvelle propriété utilisée :

- qualitativement, un détail petit de Δ diffracte la lumière comme une fente étroite à la fois selon X et Y .
- détail étroit \rightarrow figure de diffraction large.
- détail large \rightarrow figure de diffraction étroite.
- la lumière diffractée près de S' correspond à des petites valeurs de x, y donc contient l'information sur les basses fréquences spatiales (f_x, f_y).

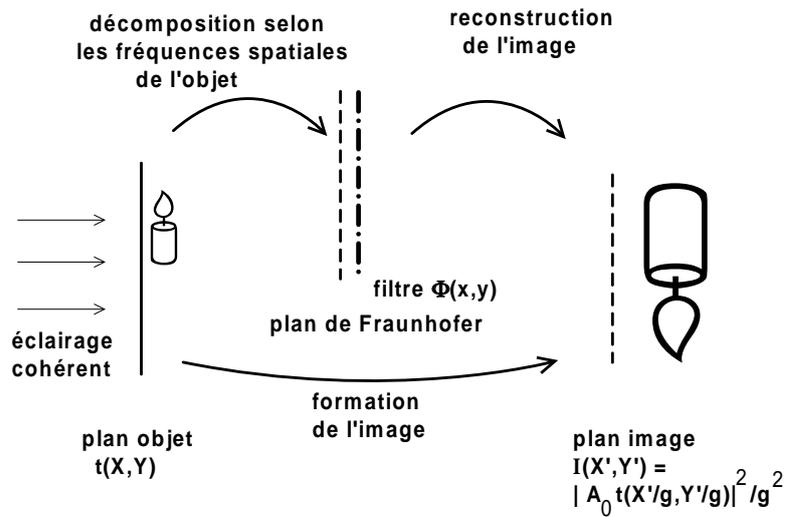


Commentaires :

- si les petits détails correspondent à des défauts de l'objet, on les supprime de l'image filtrée (lissage des défauts) en ne transmettant que la lumière proche de S' , c'est à dire en coupant les hautes fréquences spatiales.
- si on veut au contraire les mettre en valeur, on arrête dans le plan de Fraunhofer la lumière proche de S' : supprimer les basses fréquences spatiales coupe sur l'image les variations lentes d'intensité c'est à dire le fond de l'image.

Exemple 4 : on discute qualitativement, et à une dimension ce qui se passe avec un objet de facteur de transmission $t_{\Delta}(X) = \exp -\frac{X^2}{w_0^2}$, $t'_{\Delta}(X) = \exp -\frac{X^2}{w_0'^2}$, ou la somme des deux, pour $w_0 \gg w_0'$. Les spectres des fréquences spatiales associés sont $\mathcal{S}(f_x) = \overline{\mathcal{F}}_{[t_{\Delta}(X,Y)]}(f_x) = \sqrt{\pi}w_0 \exp -\pi^2w_0^2f_x^2$, $\mathcal{S}'(f_x) = \sqrt{\pi}w_0' \exp -\pi^2w_0'^2f_x^2$ ou la somme des deux. La largeur totale à mi-hauteur de $t_{\Delta}(X)$ vaut $\Delta X = 2\sqrt{\ln 2} w_0$, celle de $\mathcal{S}(f_x)$ vaut $\Delta f_x = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\pi w_0}$

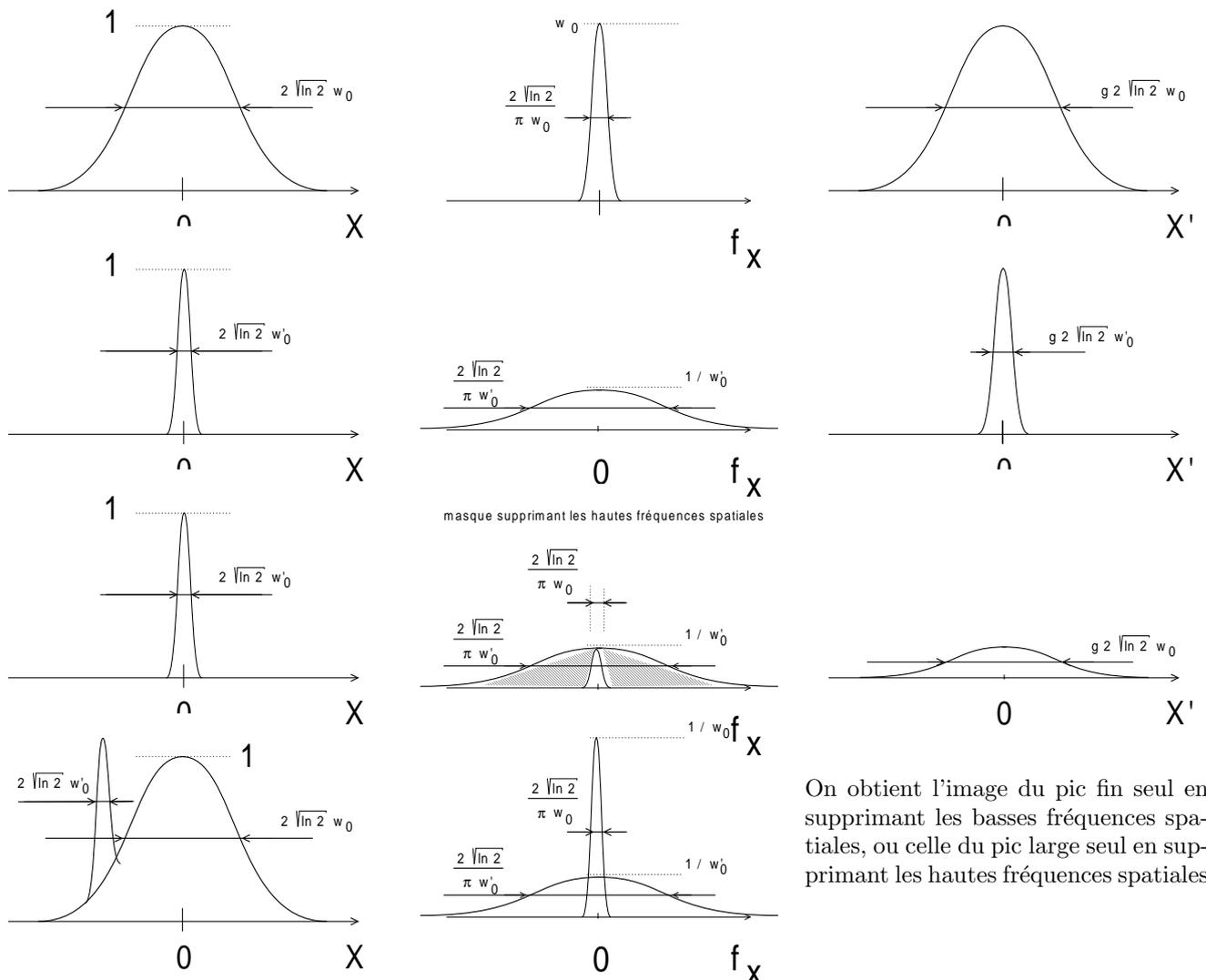
Exemples qualitatifs de filtrage spatial pour des objets non périodiques



Facteur de transmission de l'objet

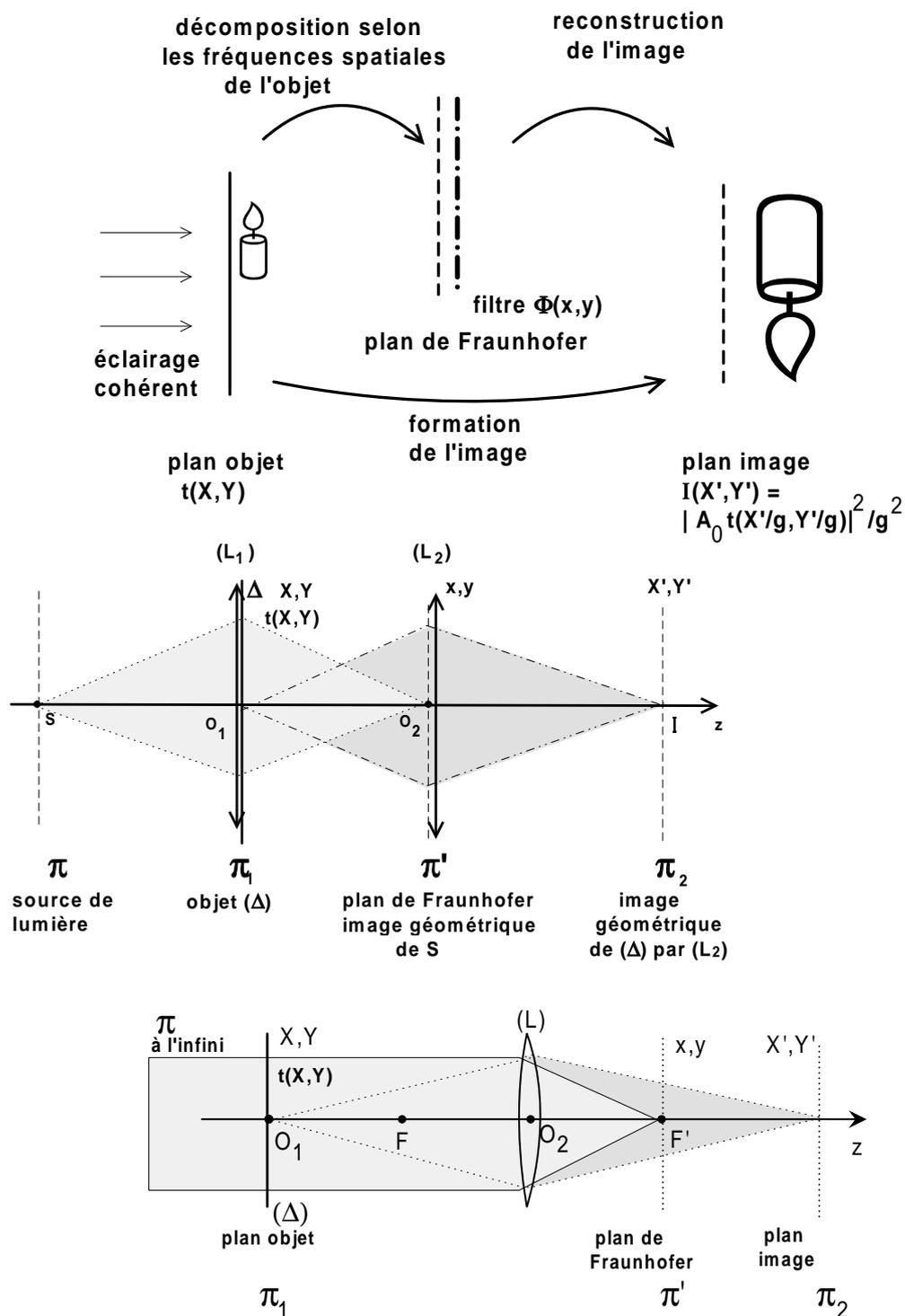
Schéma de l'amplitude dans le plan de Fraunhofer spectre des fréquences spatiales

Schéma de l'intensité dans le plan image



On obtient l'image du pic fin seul en supprimant les basses fréquences spatiales, ou celle du pic large seul en supprimant les hautes fréquences spatiales

3.2.3 Dispositifs expérimentaux pour le filtrage des fréquences spatiales - Illustrations expérimentales

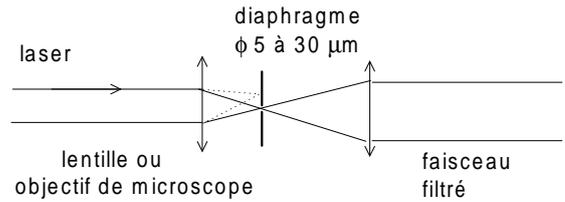


* Filtrage "passe-bas" : épuration d'un faisceau laser gaussien

Ce type de filtrage ne conserve que les basses fréquences spatiales. On illustre son utilisation pour l'épuration d'un faisceau laser.

Du fait de leur très grande cohérence, les ondes émises par les lasers sont fortement dégradées par les interférences résultant de la superposition de l'onde principale et des ondes diffusées par des poussières ou par les inhomogénéités des milieux traversés (Speckle). L'intensité de la tache lumineuse reçue sur un écran présente des inhomogénéités qui peuvent être gênantes pour des expériences comme le filtrage des fréquences spatiales ou l'holographie.

Ces inhomogénéités de petite taille correspondent à des fréquences spatiales élevées qu'on peut éliminer avec un filtre passe-bas schématisé ci-contre.



Faisceau laser

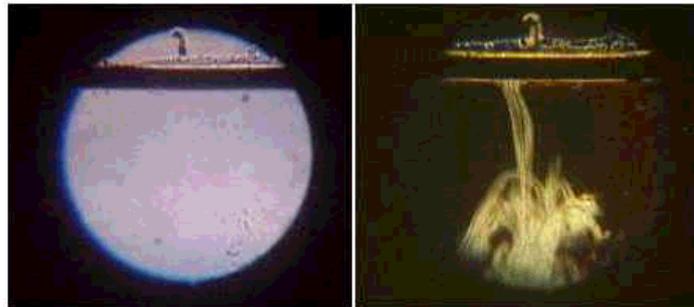


Faisceau laser après épuraison. L'observation ou la mesure montrent que la répartition de l'intensité est beaucoup plus homogène (voir TP 'filtrage des fréquences spatiale')

* Filtrage "passe-haut" : visualisation d'un petit objet de phase.

Ce type de filtrage ne conserve que les hautes fréquences spatiales :

Exemple : image d'une cuve d'eau où tombe une goutte de glycérol ; sans traitement optique (à gauche) et avec filtrage 'passe-haut' des fréquences spatiales (à droite).



- au niveau de la cuve (avant l'introduction de la goutte de glycérine) : $t_{\Delta}(X, Y) = \exp -i\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)e$, pas de variations en X, Y sur la cuve, basses fréquences spatiales ; $|\mathcal{A}_i t_{\Delta}(X, Y)|^2$ est uniforme donc l'intensité est uniforme sur l'image.

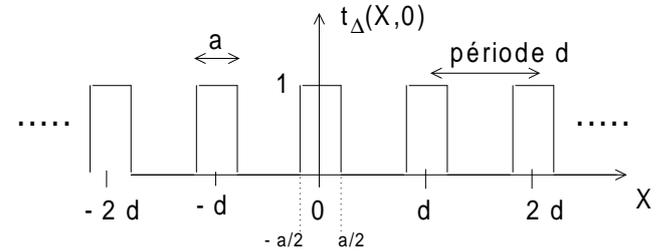
- au niveau de la goutte : n différent donc un déphasage différent sur une zone étroite en X, Y donc $t_{\Delta}(X, Y)$ possède à ce niveau des variations spatiales rapides en $X, Y \Leftrightarrow$ contient des fréquences spatiales plus élevées. Sans filtrage, l'intensité est uniforme sur toute l'image. Le filtrage 'passe-haut' supprime le fond uniforme et met en valeur le défaut local (Cf TD6)

Autre exemple : mettre en valeur les contours d'une image -> reconnaissance automatique de forme (application à la photographie d'un visage).

3.2.4 Exemple quantitatif : filtrage des fréquences spatiales d'un réseau

La démarche discutée dans ce paragraphe est étudiée expérimentalement dans le TP 'Filtrage des fréquences spatiales'.

L'objet est un réseau de fentes percées dans un écran opaque. La largeur des fentes suivant X vaut a , la périodicité vaut d . La dimension suivant Y est assez grande pour être supposée infinie.



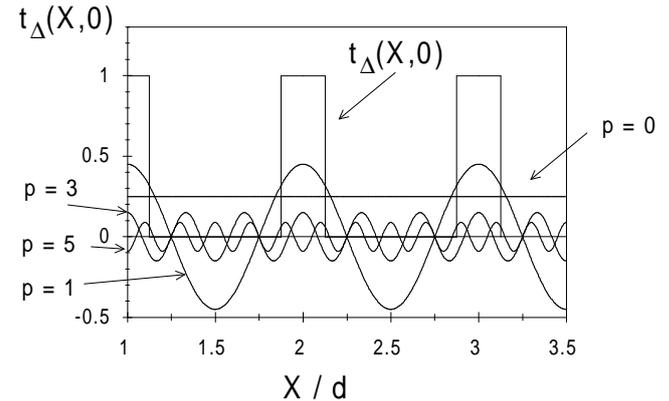
$$\begin{aligned}
 t_{\Delta}(X, Y) &= (\dots + \text{rect}_a(X + d) + \text{rect}_a(X) + \text{rect}_a(X - d) + \dots) \times 1_Y \\
 t_{\Delta}(X, Y) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \text{rect}_a(X - md) \times 1_Y \\
 &= \left(\text{rect}_a(X) * \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_{(X-md)} \right) \right) \times 1_Y
 \end{aligned}$$

$t_{\Delta}(X, Y)$ est périodique donc peut s'écrire comme une série de Fourier.

$$t_{\Delta}(X, Y) = \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_p \exp -i2\pi \frac{p}{d} X \right) \times 1_Y$$

Le terme p est celui associé à la fréquence spatiale $\frac{p}{d}$. La fonction $t_{\Delta}(X, Y)$ est paire, ce qui entraîne ici que $C_{-p} = C_p$ et que $t_{\Delta}(X, Y)$ s'écrit comme la somme de C_0 et de termes $2C_p \cos 2\pi \frac{p}{d} X$ chacun de période $\frac{d}{p}$ et fréquence spatiale $\frac{p}{d}$.

Ces termes sont représentés ci-contre pour $p = 0, 1, 3$ et 5 et $a = \frac{d}{4}$.



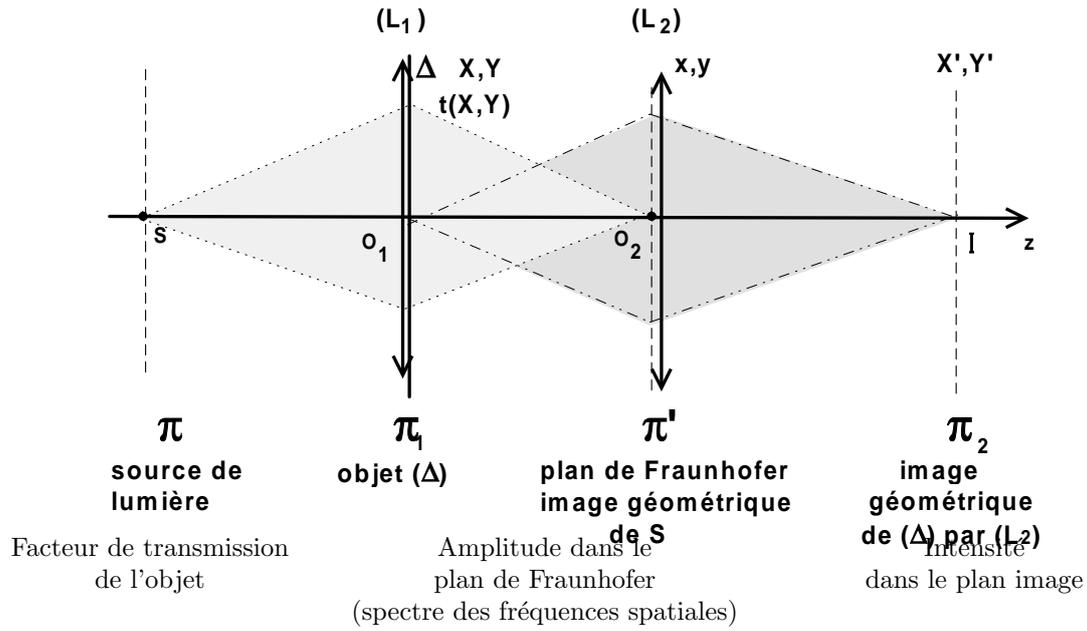
On reprend le montage du paragraphe précédent, en notant $f = \overline{O_1 O_2}$ (attention : pour ce montage, ce n'est en pas une distance focale).

L'amplitude de l'onde dans le plan de Fraunhofer π' vaut :

$$\mathcal{A}(x, y, f) = \mathcal{C} \mathcal{A}_0 \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} C_p \delta_{\left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{p}{d}\right)} \times \delta_{\frac{y}{\lambda f}}$$

L'intensité dans le plan image π_2 s'écrit

$$I(X', Y') = \frac{1}{g^2} |\mathcal{A}_0 t_{\Delta}(X'/g, Y'/g)|^2$$



$$\begin{aligned}
 t_{\Delta}(X, Y) &= 1_Y \times (\\
 &\vdots \\
 &+ \\
 C_{-p} \exp -i2\pi \frac{(-p)}{d} X & \\
 &+ \\
 &\vdots \\
 &+ \\
 C_{-1} \exp -i2\pi \frac{(-1)}{d} X & \\
 &+ \\
 C_0 & \\
 &+ \\
 C_1 \exp -i2\pi \frac{1}{d} X & \\
 &+ \\
 &\vdots \\
 &+ \\
 C_p \exp -i2\pi \frac{p}{d} X & \\
 &+ \\
 &\vdots \\
 &)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(x, y) = \mathcal{C} \mathcal{A}_0 \times \delta_{(\frac{y}{\lambda f})} \times & \\
 \text{la somme des termes (} & \\
 & \vdots \\
 & + \\
 C_{-p} \delta_{(\frac{x}{\lambda f} - \frac{(-p)}{d})} & \\
 & + \\
 & \vdots \\
 & + \\
 C_{-1} \delta_{(\frac{x}{\lambda f} - \frac{(-1)}{d})} & \\
 & + \\
 C_0 \delta_{(\frac{x}{\lambda f})} & \\
 & + \\
 C_1 \delta_{(\frac{x}{\lambda f} - \frac{1}{d})} & \\
 & + \\
 & \vdots \\
 & + \\
 C_p \delta_{(\frac{x}{\lambda f} - \frac{p}{d})} & \\
 & + \\
 & \vdots \\
 &)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I(X', Y') = \frac{1}{g^2} \times |\mathcal{A}_0|^2 \times \text{le module} & \\
 \text{au carré de la somme des termes (} & \\
 & \vdots \\
 & + \\
 C_{-p} \exp -i2\pi \frac{(-p)}{d} \frac{X'}{g} & \\
 & + \\
 & \vdots \\
 & + \\
 C_{-1} \exp -i2\pi \frac{(-1)}{d} \frac{X'}{g} & \\
 & + \\
 C_0 & \\
 & + \\
 C_1 \exp -i2\pi \frac{1}{d} \frac{X'}{g} & \\
 & + \\
 & \vdots \\
 & + \\
 C_p \exp -i2\pi \frac{p}{d} \frac{X'}{g} & \\
 & + \\
 & \vdots \\
 &)
 \end{aligned}$$

en notant $f = \overline{O_1 O_2}$

On dispose juste avant (L_2) (au niveau de π') un diaphragme (Φ) ne laissant passer que certaines taches de lumière. L'image obtenue sur π_2 est modifiée. On discute comment en prenant pour exemple le cas où l'on garde les taches $p = 0, \pm 1$ uniquement.

Avec ce filtrage, l'amplitude transmise après le plan de Fraunhofer vaut

$$\mathcal{A}(x, y, f) = \mathcal{C}(x, y) \mathcal{A}_0 \left(\sum_{p=-1}^{+1} C_p \delta_{\left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{p}{d}\right)} \right) \times \delta_{\frac{y}{\lambda f}}$$

On obtiendrait la même amplitude transmise **en utilisant dans le plan objet π_1 un objet fictif** de facteur de transmission

$$t_{\text{fictif}}(X, Y) = \sum_{p=-1}^{+1} C_p \exp -i2\pi \frac{p}{d} X \times 1_Y$$

La figure de diffraction de cet objet fictif est intégralement transmise vers (L_2), donc c'est l'image de cet objet fictif qu'on trouve reconstituée sur le plan image π_2 .

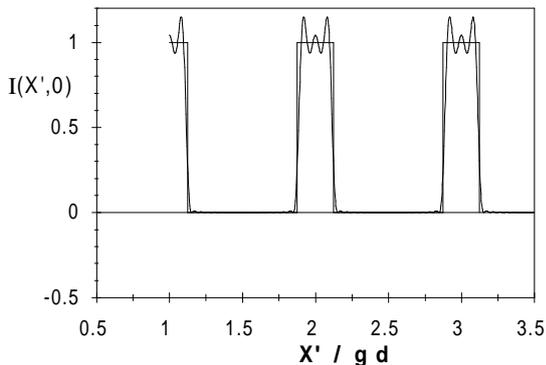
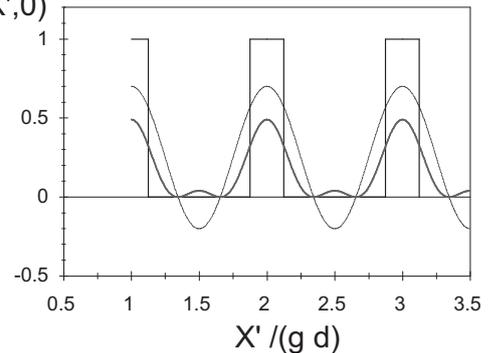
$$I(X', Y') = \frac{1}{g^2} |\mathcal{A}_0 t_{\text{fictif}}(X'/g, Y'/g)|^2 \text{ pour } g = \frac{O_2 I}{O_2 O_1}$$

Le principe présenté ici se généralise à toute expérience de filtrage spatial.

Pour l'exemple traité ici avec $a = \frac{d}{4}$, on peut calculer $c_0 = \frac{1}{4}$, $c_1 = c_{-1} I(X', 0) = 0,225$ d'où

$$t_{\text{fictif}}(X, Y) = \frac{1}{4} + 0,225 \times 2 \cos(2\pi \frac{X}{d}) \times 1_Y$$

Cette fonction oscille entre $0,25-0,45 = -0,2$ et $0,25+0,45 = 0,7$. On reporte sur le graphe $t_{\text{fictif}}(X'/g, 0)$ et on schématise son carré pour illustrer l'intensité $I(X', 0) = \frac{1}{g^2} |\mathcal{A}_0 t_{\text{fictif}}(X'/g, 0)|^2$ (traits épais) et la comparer à l'image qu'on obtiendrait sans filtrage. L'image reconstituée avec seulement les basses fréquences spatiales ($0, \pm \frac{1}{d}$) restitue la période de l'objet mais sans aucune précision sur la forme détaillée des créneaux.



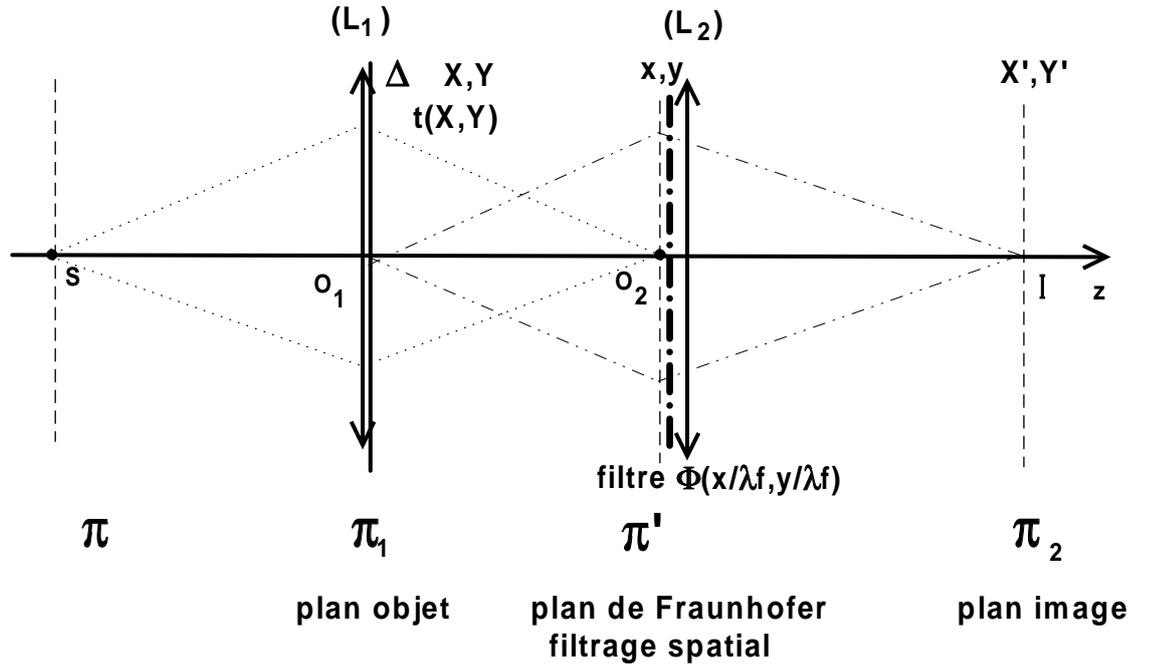
En gardant les taches $p = -10, \dots, 10$, on obtiendrait une image schématisée ci-contre en comparaison à l'image complète du réseau

L'image obtenue est beaucoup plus fidèle mais elle présente encore des irrégularités en particulier au voisinage des zones de variations brutales d'intensité, parce que la reconstruction de celles-ci nécessite des fréquences spatiales élevées qui n'ont pas été conservées dans le filtrage.

Remarque : en TP, on peut accoler une diapositive à un réseau. L'image non filtrée se présente comme la diapositive avec des rayures. La figure de diffraction spécifique au réseau est localisée sur l'axe perpendiculaire au réseau donc facile à filtrer. Le filtrage permet très facilement d'éliminer l'image du réseau pour retrouver l'image non dégradée de la diapositive.

On retiendra que les basses fréquences spatiales contiennent l'information sur les structures lentement variables (lisses) de l'objet. Les fréquences spatiales élevées ($\frac{p}{d}$ avec $p \geq p_0$) contiennent elles l'information sur des détails à l'échelle de $\frac{d}{p_0}$ ou sur des variations brutales à l'échelle de $\frac{d}{p_0}$.

3.2.5 Formule générale du filtrage



L'amplitude diffractée par $t_{\Delta}(X, Y)$ dans le plan de Fraunhofer s'écrit

$$\mathcal{A}(x, y, f) = \mathcal{C}\mathcal{A}_0 \overline{\mathcal{F}}_{[t_{\Delta}(X, Y)]}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$$

en notant $f = \overline{O_1 O_2}$ et $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}(O_1)$.

On dispose dans le plan de Fraunhofer un objet de facteur de transmission $T_{\Phi}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$. L'intensité dans le plan image est celle reconstruite à partir de l'amplitude émergente du plan de Fraunhofer, c'est à dire à partir de

$$\mathcal{C}\mathcal{A}_0 \overline{\mathcal{F}}_{[t_{\Delta}(X, Y)]}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) T_{\Phi}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$$

Cette amplitude est celle que produirait dans le plan de Fraunhofer un objet fictif de facteur de transmission $t_{\text{fictif}}(X, Y)$ tel que

$$\mathcal{C}\mathcal{A}_0 \overline{\mathcal{F}}_{[t_{\text{fictif}}(X, Y)]}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) = \mathcal{C}\mathcal{A}_0 \overline{\mathcal{F}}_{[t_{\Delta}(X, Y)]}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) T_{\Phi}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$$

soit, en simplifiant et prenant le transformée de Fourier directe

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{[\overline{\mathcal{F}}_{[t_{\text{fictif}}(X, Y)]}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)]}(X, Y) &= \mathcal{F}_{[\overline{\mathcal{F}}_{[t_{\Delta}(X, Y)]}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) T_{\Phi}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)]}(X, Y) \\ t_{\text{fictif}}(X, Y) &= \iint du dv \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}_{[t_{\Delta}(X, Y)]}(u, v) \mathcal{F}_{[T_{\Phi}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)]}(X - u, Y - v) \\ &= t * \mathcal{F}_{[T_{\Phi}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)]}(X, Y) \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de l'intensité dans le plan image lorsque le filtre Φ est placé dans le plan de Fraunhofer :

$$I(X', Y') = \frac{1}{g^2} \left| \mathcal{A}_0 t * \mathcal{F}_{[T_{\Phi}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)]}(X'/g, Y'/g) \right|^2$$

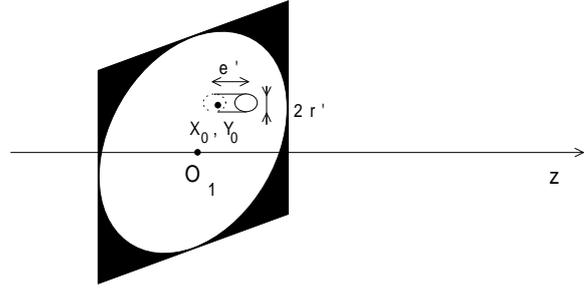
3.3 Exemples d'applications du filtrage des fréquences spatiales

3.3.1 Strioscopie

Certains objets quasi transparents ou transparents agissent peu ou pas du tout sur l'intensité lumineuse au point d'être non visibles par imagerie en lumière incohérente. Ils ont malgré tout une action sur la phase de l'onde, à cause par exemple d'un indice optique légèrement différent de celui du milieu environnant. On parle d'objets de phase.

L'imagerie en lumière cohérente permet d'utiliser différentes techniques de filtrage spatial pour former une image visible de ces objets. On va décrire celle appelée strioscopie³.

On veut visualiser un léger défaut d'épaisseur existant sur une lentille, modélisé au niveau de la position (X_0, Y_0) par un petit cylindre de rayon r' , d'indice n , et d'épaisseur e' qui s'ajoute à l'épaisseur de la lentille parfaite. La sur-épaisseur e' est positive pour une bosse ou négative pour un creux. Ce défaut n'agit que sur la phase de l'onde, il n'est pas visible.



Soit (Δ) le diaphragme modélisant la différence entre une lentille infinie parfaite et la lentille réelle. Son facteur de transmission vaut

$$t_{\Delta}(X, Y) = \begin{cases} \exp -i\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)e' & \text{sur le cylindre de rayon } r' \text{ et de centre } (X_0, Y_0) \\ 1 & \text{ailleurs sur disque de rayon } R \text{ et de centre } O_1 \\ 0 & \text{en dehors de ce disque} \end{cases}$$

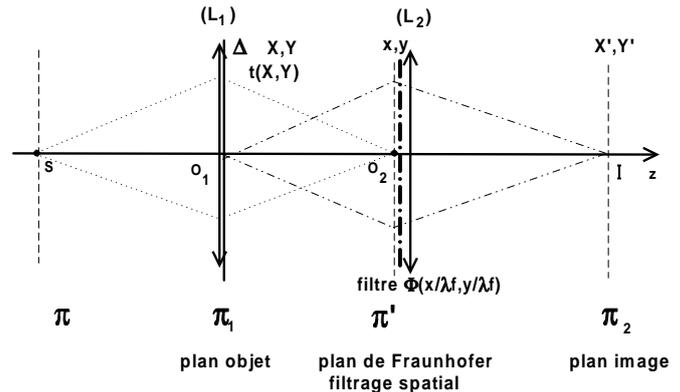
On peut vérifier que l'expression analytique suivante convient :⁴

$$t_{\Delta}(X, Y) = \text{circ}_R(X, Y) + \gamma \text{circ}_{r'}(X - X_0, Y - Y_0)$$

avec $\gamma = \exp(-i2\pi\frac{(n-1)e'}{\lambda}) - 1$.

On utilise le montage décrit au 3.2.1, en notant $f = \overline{O_1O_2}$ et $A_0 = \mathcal{A}(O_1)$. L'amplitude diffractée par $t_{\Delta}(X, Y)$ dans le plan de Fraunhofer s'écrit

$$\mathcal{A}(x, y, f) = C A_0 \overline{\mathcal{F}}_{[t_{\Delta}(X, Y)]}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$$



L'amplitude obtenue dans le plan de Fraunhofer peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y, f) &= \mathcal{A}_1(x, y, f) + \mathcal{A}_2(x, y, f) \\ \text{avec } \mathcal{A}_1(x, y, f) &= C A_0 \pi R^2 \frac{2J_1(2\pi R\sqrt{(\frac{x}{\lambda f})^2 + (\frac{y}{\lambda f})^2})}{2\pi R\sqrt{(\frac{x}{\lambda f})^2 + (\frac{y}{\lambda f})^2}} \\ \text{et } \mathcal{A}_2(x, y, f) &= \gamma C A_0 \exp 2i\pi(X_0\frac{x}{\lambda f} + Y_0\frac{y}{\lambda f}) \pi r'^2 \frac{2J_1(2\pi r'\sqrt{(\frac{x}{\lambda f})^2 + (\frac{y}{\lambda f})^2})}{2\pi r'\sqrt{(\frac{x}{\lambda f})^2 + (\frac{y}{\lambda f})^2}} \end{aligned}$$

Le premier terme correspond à une tache de rayon caractéristique $1, 22\frac{\lambda f}{2R}$ centrée sur O_2 . Le second est une tache de rayon typique $1, 22\frac{\lambda f}{2r'}$, centrée sur O_2 mais nettement plus grande pour un défaut de petite largeur ($r' \ll R$). On place dans le plan de Fraunhofer un disque opaque T_{Φ} de taille suffisante pour intercepter la tache $\mathcal{A}_1(x, y, f)$ et supprimer sa contribution à la reconstruction de l'image.⁵

3. La technique de contraste de phase, une variante de la strioscopie mise au point par Zernicke sera approfondie en TD; la technique dite 'de Foucaultage' consiste à bloquer avec une lame de couteau la moitié du plan de Fraunhofer y compris le point focal, pour faire apparaître les défauts d'épaisseur des lentilles ou les défauts d'un miroir de télescope en cours de polissage

4. pour un cylindre ne touchant pas le bord

5. Appliquer ce filtrage spatial revient à avoir plus précisément le facteur de transmission fictif

$$t_{\text{fictif}}(X, Y) = \gamma \text{circ}_{r'}(X - X_0, Y - Y_0) * \mathcal{F}_{[T_{\Phi}]}$$

Le défaut est de petite extension latérale donc son facteur de transmission contient peu de basses fréquences spatiales. Leur suppression n'est donc pas gênante pour la reconstruction des détails de l'image, on peut considérer que $t_{\text{fictif}}(X, Y) = \gamma \text{circ}_{r'}(X - X_0, Y - Y_0)$ d'où sur le plan image l'intensité

$$I(X', Y') = |\gamma|^2 \frac{|\mathcal{A}_0|^2}{g^2} \text{circ}_{r'}\left(\frac{X'}{g} - X_0, \frac{Y'}{g} - Y_0\right)$$

qui donne une image brillante du défaut sur un fond noir, avec le grandissement g .

Des techniques de filtrage spatial (strioscopie, contraste de phase, Foucaultage) sont utilisées pour visualiser des fluctuations locales d'indice comme par exemple un condensat de Bose-Einstein ou des écoulements de gaz chauds.⁶

3.3.2 Filtrage passe-haut d'un bord d'écran

L'objet diffractant est un bord d'écran en $X = 0$. On raisonne seulement sur la dimension X . Le facteur de transmission vaut

$$t(X) = \begin{cases} 1 & \text{pour } X > 0 \\ 0 & \text{pour } X \leq 0 \end{cases}$$

Le filtrage spatial est réalisé par un cache opaque placé dans le plan de Fraunhofer pour y supprimer les fréquences spatiales de valeurs absolues inférieures à $f_0/2$.

$$\begin{aligned} T_{\Phi}\left(\frac{x}{\lambda f}\right) &= \begin{cases} 0 & \text{pour } \frac{x}{\lambda f} \leq \frac{f_0}{2} \\ 1 & \text{pour } \frac{x}{\lambda f} > \frac{f_0}{2} \end{cases} \\ &= 1 - \text{rect}_{f_0}\left(\frac{x}{\lambda f}\right) \end{aligned}$$

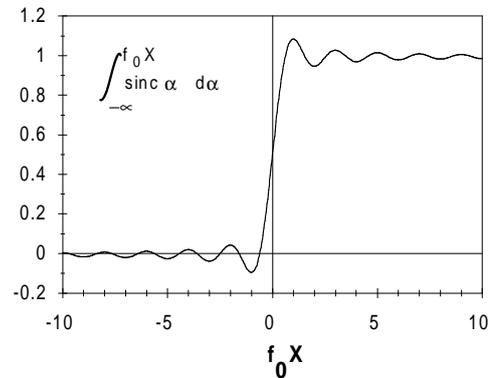
Lorsque le filtrage T_{Φ} est appliqué, l'objet fictif équivalent serait

$$t_{\text{fictif}}(X) = t * \mathcal{F}_{[1 - \text{rect}_{f_0}(\frac{x}{\lambda f})]}(X)$$

avec $\mathcal{F}_{[1 - \text{rect}_{f_0}(\frac{x}{\lambda f})]}(u) = \delta_u - f_0 \text{sinc}(f_0 u)$ donc

$$\begin{aligned} t_{\text{fictif}}(X, Y) &= \int du t(X - u)(\delta_u - f_0 \text{sinc}(f_0 u)) \\ &= t(X) - \int_{-\infty}^X du f_0 \text{sinc}(f_0 u) \\ &= t(X) - \int_{-\infty}^{f_0 X} d\alpha \text{sinc } \alpha \end{aligned}$$

avec le changement de variable $\alpha = f_0 u$. La fonction $\int_{-\infty}^{f_0 X} d\alpha \text{sinc } \alpha$, calculée numériquement, est représentée ci-contre.



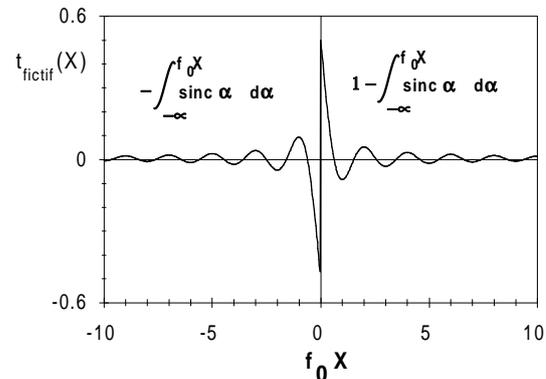
Pour $X > 0$, $t(X) = 1$ et

$$t_{\text{fictif}}(X, Y) = 1 - \int_{-\infty}^{f_0 X} d\alpha \text{sinc } \alpha$$

Pour $X < 0$, $t(X) = 0$ et

$$t_{\text{fictif}}(X, Y) = - \int_{-\infty}^{f_0 X} d\alpha \text{sinc } \alpha$$

comme illustré ci-contre

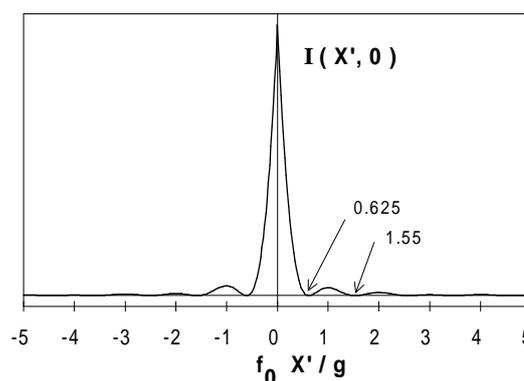


6. photo Echt p 577

L'intensité de l'image du bord d'écran quand on a supprimé toutes les fréquences $|f_x| < f_0$ est donnée par

$$I(X', Y') = \frac{1}{g^2} |\mathcal{A}_0 t_{\text{fictif}}(X'/g, Y'/g)|^2$$

Il apparaît des oscillations, avec les deux premiers minima nuls pour $f_0 X'/g = 0,625$ puis $1,55$. La plus grande fraction de la lumière est localisée dans une bande centrée sur $X' = 0$ de largeur approximative $0,625 \frac{g}{f_0}$. Cette tache est d'autant plus étroite que le seuil de coupure en fréquence f_0 est élevé.



On retrouve la propriété qualitative générale : la somme des termes de hautes fréquences spatiales est localisée au voisinage des zones de l'objet présentant de brutales variations dans $t(X)$. Il en résulte que ces zones sont mal reconstituées sur l'image lorsque les hautes fréquences spatiales sont mal transmises par le système optique (lumière arrêtée par la monture des lentilles par exemple).

3.3.3 Généralisation de la notion à des images numérisées ou à un signal sonore

Les notions introduites dans ce chapitre illustrent le principe d'un traitement d'image en temps réel par une méthode optique. Elles s'appliquent exactement de la même manière à du traitement numérique (calcul de la transformées de Fourier d'image numérisées pour obtenir le spectre des fréquences spatiales, modification passe haut ou passe bas selon qu'on souhaite mettre en valeur des détails, la lisser, ou jouer sur le contraste détails/fond, calcul d'une nouvelle TF pour reconstruire l'image filtrée). Ce sont également les mêmes notions que pour du traitement de signal acoustique (signal à une dimension).

3.4 Principe de l'holographie

L'imagerie en lumière incohérente conserve l'information sur l'intensité lumineuse émise par un point. L'image peut être enregistrée sur un support photographie (ou une matrice de capteurs) pour conserver l'information sur la projection de l'objet dans un plan.

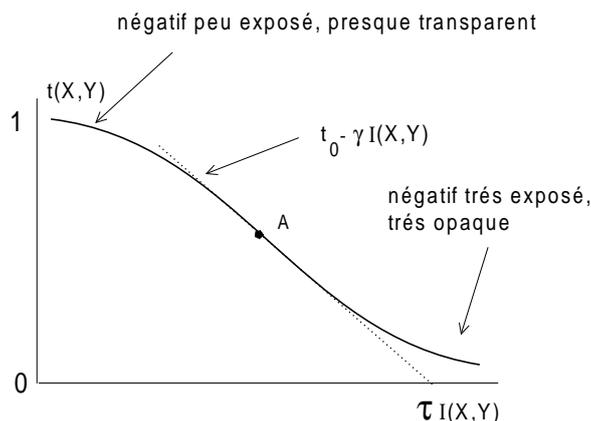
L'imagerie en lumière cohérente conserve en plus l'information sur les phases relatives des ondes émises par les différents points de l'objet. On va étudier comment cette information peut être enregistrée sous la forme d'un hologramme dont la lecture donnera ensuite une image à 3 dimensions.

3.4.1 Enregistrement photographique

On considère un négatif photographique (noir et blanc). Il peut être décrit comme un objet de facteur de transmission $t(X, Y)$. Un élément de surface dS centré en (X, Y) a vu lors de la prise de vue une énergie $E = I(X, Y) T dS$ proportionnelle à l'intensité reçue du point correspondant de l'objet et au temps de pose T . Il est d'autant plus opaque (t proche de 0) que E est élevé

Le lien entre l'énergie reçue et le facteur de transmission dépend des caractéristiques de l'émulsion photographique et du développement, avec l'allure indiquée ci-contre. On travaillera pour la suite dans une partie linéaire autour du point de fonctionnement A de manière à obtenir

$$t(X, Y) = t_0 - \gamma I(X, Y)$$

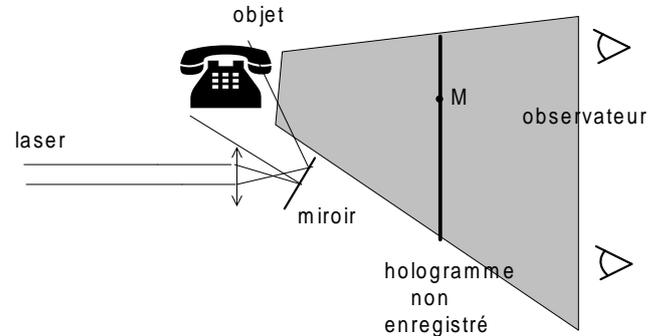


3.4.2 Observation en lumière cohérente

On commence par discuter une particularité de l'observation d'un objet éclairé en lumière cohérente. L'hologramme est pour l'instant une simple plaque transparente bordée de parois opaques. Les yeux de l'observateur forment sur les rétines l'image de l'objet vu à travers cette plaque. L'observateur voit l'objet en relief avec la possibilité de modifier un peu l'angle de vue.

On peut aussi dire que les points de l'objet éclairés par une onde cohérente émettent tous des ondelettes cohérentes entre elles. La superposition de leurs amplitudes produit dans le plan de l'hologramme une distribution $a_O(M)$. On peut alors considérer que la diffraction de Fresnel de cette distribution crée sur les rétines de l'observateur l'image de l'objet, qui est vu en relief.

Les deux approches proposées sont strictement équivalentes.



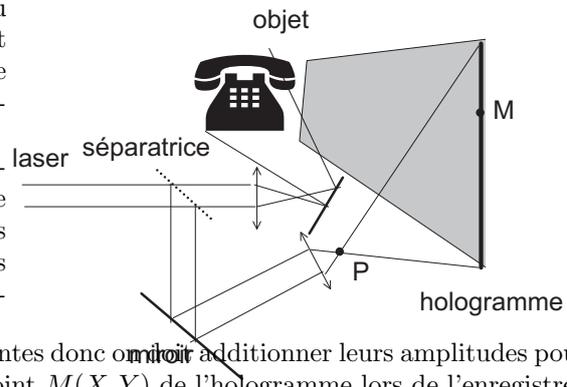
3.4.3 Enregistrement d'un hologramme

On décrit maintenant l'enregistrement de l'hologramme. Contrairement à une photographie ordinaire, un hologramme est enregistré sans lentille, suivant le principe décrit ci-dessous.

Un point $M(X, Y)$ de la plaque photographique (H) est éclairé

- par une onde monochromatique dite 'de référence', sphérique de centre P , d'amplitude complexe $a_R(M)$ au point M , produite à partir d'un laser. Le point P est assez éloigné pour que l'intensité $|a_R(M)|^2$ de l'onde de référence soit uniforme sur toute la surface de l'hologramme.
- par les ondes émises depuis les différents points de l'objet. Chaque point de l'objet se comporte comme une source secondaire de lumière, mais toutes ces sources secondaires éclairées par une même onde laser ont des relations de phase entre elles et avec la porteuse. L'amplitude résultante en M est notée $a_O(M)$.

Les ondes émises par l'objet et l'onde porteuse sont cohérentes donc on peut additionner leurs amplitudes pour obtenir l'intensité $I(X, Y) = |a_O(X, Y) + a_R(X, Y)|^2$ reçue au point $M(X, Y)$ de l'hologramme lors de l'enregistrement. Après le développement, le facteur de transmission de l'hologramme a la forme :



$$\begin{aligned}
 t(X, Y) &= t_0 - \gamma |a_R + a_O|^2 \\
 &= t_0 - \gamma (|a_R(X, Y)|^2 + a_R^*(X, Y)a_O(X, Y) + a_R(X, Y)a_O^*(X, Y) + |a_O(X, Y)|^2)
 \end{aligned}$$

On ajuste le système optique pour garder $|a_O| \ll |a_R|$ et rendre le dernier terme $\gamma |a_O(X, Y)|^2$ négligeable.

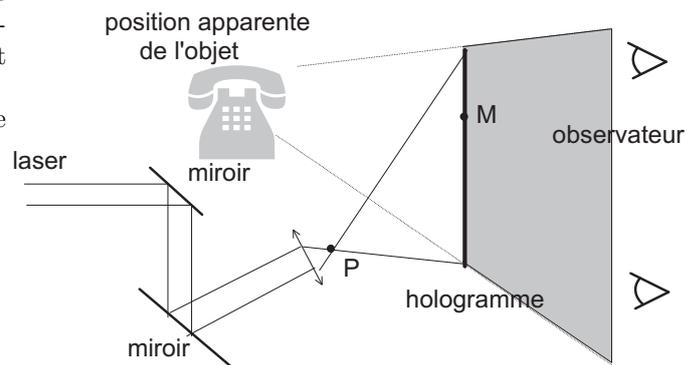
3.4.4 Lecture d'un hologramme

On considère le cas où l'hologramme développé est éclairé exactement dans les mêmes conditions que pour l'enregistrement par une onde $a_L(X, Y) = \beta a_R(X, Y)$. L'objet est évidemment absent.

Un point $M(X, Y)$ de l'hologramme reçoit l'amplitude $a_L(X, Y)$ et transmet la lumière $a_L(X, Y)t(X, Y)$ soit

$$\begin{aligned}
 a_L(X, Y)t(X, Y) &= \beta a_R(X, Y)(t_0 - \gamma |a_R(X, Y)|^2) \\
 &\quad - \gamma \beta a_R(X, Y)a_R^*(X, Y)a_O(X, Y) \\
 &\quad - \gamma \beta a_R(X, Y)a_R(X, Y)a_O^*(X, Y)
 \end{aligned}$$

On discute les trois termes.



* Le premier est l'onde incidente, atténuée.

* Le second terme est proportionnel à $a_O(X, Y)$, le coefficient de proportionnalité étant

$\gamma\beta a_R(X, Y)a_R^*(X, Y)$, réel et uniforme sur l'ensemble de l'hologramme. On retrouve, à un facteur réel près, la même répartition d'amplitude que celle produite sur l'hologramme par la lumière issue de l'objet.

En utilisant le commentaire fait en introduction, on déduit que l'observateur voit l'objet exactement comme si celui-ci était présent, et peut même 'tourner autour' dans la limite où il regarde la position apparente de l'objet à travers l'hologramme. L'image holographique restitue le relief avec profondeur et parallaxe.

* Le troisième terme est une onde parasite, qui contient une information déformée sur le conjugué de l'objet, et qui ne se superpose pas aux autres. On parle parfois de l'image conjuguée de l'objet.

3.4.5 Conditions d'enregistrement

Elles se déduisent du fait que l'hologramme est l'enregistrement d'une figure d'interférences : les interférences entre l'onde porteuse et l'onde venant de l'objet. Le terme $a_R^*(X, Y)a_O(X, Y)$ a une moyenne non nulle pendant la durée de l'enregistrement uniquement parce que les ondes a_R et a_O ont des relations entre leurs phases (sont cohérentes).

- il faut une émulsion à grain fin, plus fin que l'interfrange qui est de l'ordre de $\lambda/\sin\theta$, où θ est l'angle entre les ondes objet et porteuse. $\lambda/\sin\theta$ peut valoir $1\ \mu\text{m}$ ou moins ; ceci exige une émulsion spéciale, les émulsions du commerce ayant un grain de 10 à $50\ \mu\text{m}$ pour gagner en sensibilité.

- il faut un montage avec une stabilité mécanique bien meilleure que $\lambda/\sin\theta$.

- dans la pratique, il faut une source laser pour que la cohérence des ondes porteuse et objet permette les interférences

Exemples d'application : visualisation en 3 dimensions, archivage de pièces de musée, étude de déformations et de vibrations à l'échelle micrométrique, composants optiques sophistiqués.

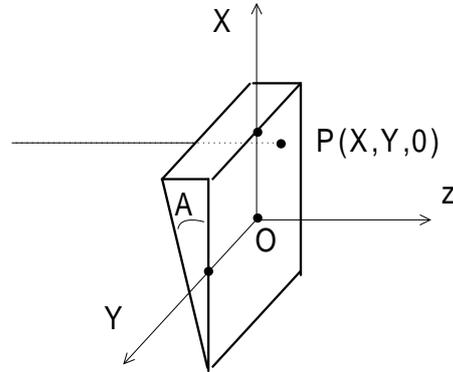


<http://holos-tar.cmaisonneuve.qc.ca/index.html?url=/cours/hologrammes.html>
 "Train and Bird" le premier hologramme fabriqué au laser. Cette image pionnière a été produite en 1964 par Emmeth Leith et Juris Upatnieks à l'Université du Michigan seulement quatre ans après l'invention du laser.

3.5 Annexes

3.5.1 Notion de fréquences spatiales définie par l'exemple d'un prisme

Soit un prisme d'angle A petit, d'arête parallèle à OY , de face de sortie parallèle à OXY et centrée sur O , d'indice optique n . Son extension latérale est assez grande pour que la diffraction par sa monture ne joue pas un rôle significatif et on le suppose infini selon X et Y .

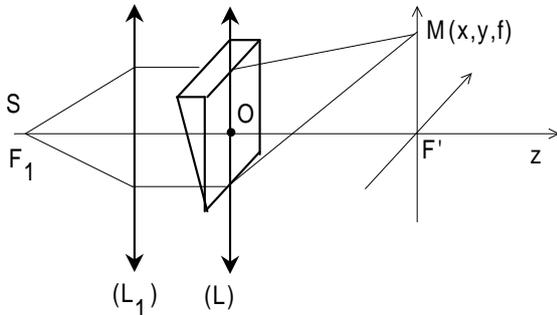


Un rayon parallèle à Oz incident dans la direction de $P(X, Y, 0)$ traverse une épaisseur de verre $e(X, Y)$. Pour un prisme de petit angle comme pour une lentille de grand rayon de courbure, le facteur de transmission du diaphragme sans épaisseur équivalent au système optique est localement celui d'une lame à faces parallèles d'épaisseur $e(X, Y)$ et d'indice n , donc de la forme

$$t_{\Delta}(X, Y) = t_1 t_2 \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) e(X, Y) \right] \times 1_Y$$

Pour le prisme décrit ici, $e(X, Y) = e(0, 0) + AX$ donc la dépendance de $t_{\Delta}(X, Y)$ en X, Y s'écrit

$$t_{\Delta}(X, Y) = t_0 \exp \left[-i 2\pi \frac{(n-1)A}{\lambda} X \right] \times 1_Y$$



On forme la figure de diffraction de Fraunhofer avec le dispositif à deux lentilles schématisé ci-contre. Les lentilles sont de grande dimension et ne produisent aucune diffraction.

Pour ce montage, le plan de Fraunhofer correspond au plan focal image de (L) , on y observe l'amplitude :

$$\mathcal{A}(x, y, f) = \mathcal{C}(x, y) \overline{\mathcal{F}}_{[A(O) t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right)$$

Le formulaire donne $\overline{\mathcal{F}}_{[\exp -i 2\pi u r_0]}(r) = \delta(r - r_0)$ donc

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}_{[A(O) t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right) &= \mathcal{A}(O) t_0 \overline{\mathcal{F}}_{[\exp(-i 2\pi \frac{(n-1)A}{\lambda} X)]} \left(\frac{x}{\lambda f} \right) \times \overline{\mathcal{F}}_{[1_Y]} \left(\frac{y}{\lambda f} \right) \\ &= \mathcal{A}(O) t_0 \delta \left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{(n-1)A}{\lambda} \right) \times \delta \left(\frac{y}{\lambda f} \right) \end{aligned}$$

La figure de diffraction est une tache de lumière située en $M(x, y, f)$ avec $\frac{x}{\lambda f} = \frac{(n-1)A}{\lambda}$ et $\frac{y}{\lambda f} = 0$.

On retrouve un résultat en accord avec celui prévu par l'optique géométrique : le faisceau incident parallèle est dévié dans la direction $((n-1)A, 0, 1)$ et converge dans le plan focal image de (L) au point $(x, y) = (f(n-1)A, 0)$.

On revient à la forme du facteur de transmission $t_{\Delta}(X, Y) = t_0 \exp(-i 2\pi \frac{(n-1)A}{\lambda} X) \times 1_Y$. Par analogie avec les notions temps-fréquences apparaissant dans la représentation complexe $\exp i 2\pi \nu t$ d'une onde monochromatique, on définit la fréquence spatiale de $t_{\Delta}(X, Y)$ associée à X par le facteur de $-i 2\pi X$ dans l'expression du facteur de

transmission, c'est à dire $f_x = \frac{(n-1)A}{\lambda}$. Dans le cas décrit ici, la fréquence spatiale associée à Y est nulle. Le résultat précédent peut être présenté sous la forme :

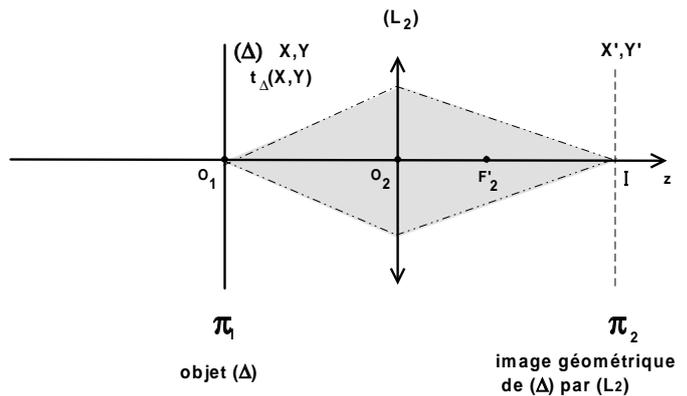
Lorsque l'objet diffractant est éclairé par une onde plane en incidence normale, il existe dans le plan de Fraunhofer une tache de lumière au point (x, y) tel que les quantités $(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f})$ correspondent aux fréquences spatiales présentes dans le facteur de transmission de l'objet diffractant.

Remarque 1 : le choix de signe fait pour la définition de la fréquence spatiale entraîne qu'en x positif du plan de Fraunhofer converge la lumière diffractée par les termes de $t_{\Delta}(X, Y)$ dont la fréquence spatiale f_x est positive.

Remarque 2 : pour une source $S(0, 0, z_i)$ à distance finie, le plan de Fraunhofer est le plan de formation de l'image géométrique de la source, $z = z'$, différent du plan focal de la lentille. Dans ce cas, les points (x, y, z') éclairés dans le plan de Fraunhofer sont ceux pour lesquels $\frac{x}{\lambda z'}$ et $\frac{y}{\lambda z'}$ correspondent à des fréquences spatiales de l'objet diffractant.

3.5.2 Calcul de la formation d'une image à partir du spectre de ses fréquences spatiales

Soit un objet (Δ) de facteur de transmission $t_{\Delta}(X, Y)$, perpendiculaire en O_1 à l'axe Oz (plan π_1). Il est éclairé par une onde $\mathcal{A}_i(X, Y)$ vérifiant $|\mathcal{A}_i(X, Y)| = A_0$. Une lentille (L_2) de centre optique O_2 , axe O_2z et distance focale f_2 forme l'image de O_1 en I . Le plan perpendiculaire en I à O_2z est noté plan image π_2 .



$$-\frac{1}{\overline{O_2O_1}} + \frac{1}{\overline{O_2I}} = \frac{1}{f_2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{O_2I} = \frac{f_2 \overline{O_2O_1}}{\overline{O_2O_1} + f_2} \quad \text{positif pour } \overline{O_2O_1} < -f_2$$

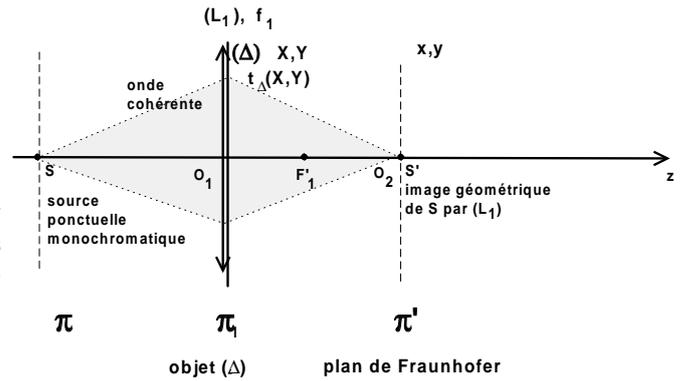
Le grandissement de l'image par (L_2) est $g = \frac{\overline{O_2I}}{\overline{O_2O_1}}$. L'optique géométrique indique que (L_2) forme dans le plan π_2 l'image de l'objet $t_{\Delta}(X, Y)$ avec le grandissement g .

A un facteur près, on retrouve au point (X', Y') de l'image la même intensité qu'au point $(X'/g, Y'/g)$ de l'objet avec :

$$I(X', Y') = \frac{1}{g^2} |\mathcal{A}_0 t(X'/g, Y'/g)|^2$$

Le facteur $\frac{1}{g^2}$ assure la conservation de la puissance lumineuse. Une même puissance lumineuse répartie sur une surface g^2 fois plus grande correspond bien à une intensité g^2 fois plus faible.

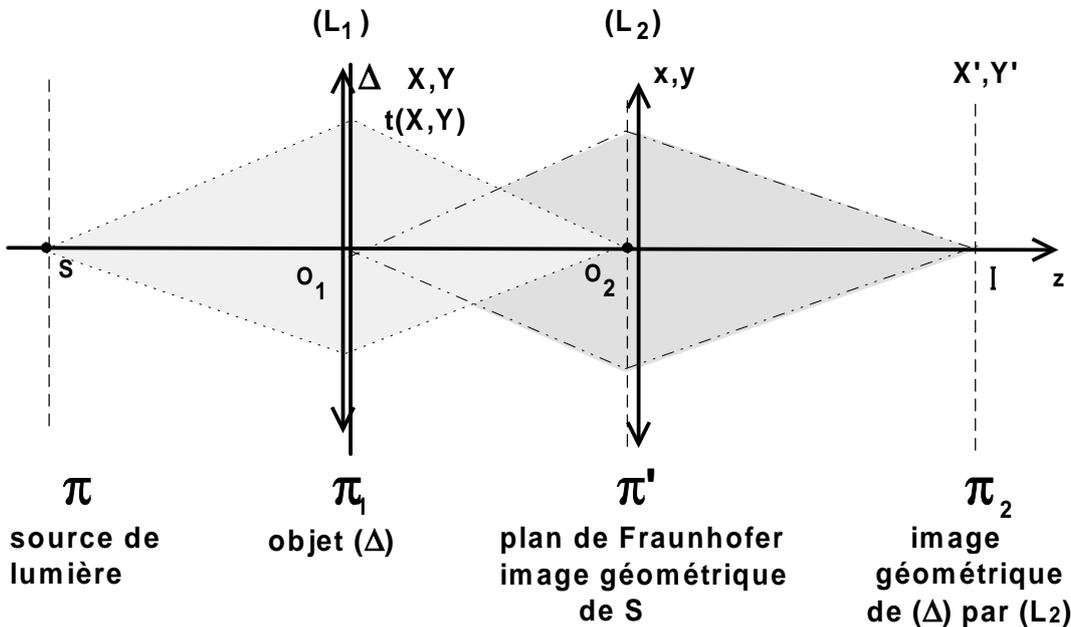
On précise maintenant le système optique qui éclaire (Δ) . L'onde incidente provient d'une source ponctuelle monochromatique S , elle est donc cohérente. On choisit d'accoler à (Δ) une lentille (L_1) de centre optique O_1 , axe O_2z et distance focale f_1 . Les positions et les distances focales sont choisies pour que (L_1) forme en O_2 l'**image géométrique de S** .



Soit π' le plan perpendiculaire en O_2 à O_2z . Il s'y forme la figure de diffraction de Fraunhofer de (Δ) éclairé par S .

$$A(x, y, O_2) = \frac{i A_0}{\lambda O_1 O_2} \exp -ik \overline{O_1 O_2} \exp -ik \frac{x^2 + y^2}{2O_1 O_2} \overline{\mathcal{F}}_{[t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda O_1 O_2}, \frac{y}{\lambda O_1 O_2} \right)$$

On combine les deux montages précédents avec pour objectif de vérifier qu'on retrouve la même expression pour l'intensité dans le plan image π_2 avec l'approche déduite de l'optique géométrique et celle utilisant la diffraction



L'expression précédente multipliée par le facteur de transmission de (L_2) donne l'amplitude dans le plan de sortie de (L_2) , noté π'^+ .

$$A(x, y, O_2^+) = \exp ik \frac{x^2 + y^2}{2f_2} A(x, y, O_2^-)$$

L'amplitude dans π_2 correspond à la diffraction de Fresnel de la distribution d'amplitude émergeant de π'^+ . On utilise la formule de Fresnel, forme I.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(X', Y', I) &= \frac{i}{\lambda \overline{O_2 I}} \exp -ik\overline{O_2 I} \exp -ik \frac{X'^2 + Y'^2}{2\overline{O_2 I}} \\
 &\int \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \mathcal{A}(x, y, O_2^+) \exp -ik \frac{x^2 + y^2}{2\overline{O_2 I}} \exp ik \frac{xX' + yY'}{\overline{O_2 I}} \\
 &= \frac{i \mathcal{A}_0}{\lambda \overline{O_2 I}} \exp -ik\overline{O_2 I} \exp -ik \frac{X'^2 + Y'^2}{2\overline{O_2 I}} \frac{i}{\lambda \overline{O_1 O_2}} \exp -ik\overline{O_1 O_2} \\
 &\int \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \exp -ik \frac{x^2 + y^2}{2\overline{O_1 O_2}} \exp ik \frac{x^2 + y^2}{2f_2} \exp -ik \frac{x^2 + y^2}{2\overline{O_2 I}} \\
 &\overline{\mathcal{F}}_{[t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{x}{\lambda \overline{O_1 O_2}}, \frac{y}{\lambda \overline{O_1 O_2}} \right) \exp ik \frac{xX' + yY'}{\overline{O_2 I}}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases}
 \frac{-1}{\overline{O_1 O_2}} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{\overline{O_2 I}} = 0 \\
 \exp ik \frac{xX' + yY'}{\overline{O_2 I}} = \exp i2\pi \left(\frac{x}{\lambda \overline{O_1 O_2}} \frac{\overline{O_1 O_2}}{\overline{O_2 I}} X' + \frac{y}{\lambda \overline{O_1 O_2}} \frac{\overline{O_1 O_2}}{\overline{O_2 I}} Y' \right) \\
 -\frac{1}{g} = \frac{\overline{O_1 O_2}}{\overline{O_2 I}}
 \end{cases}$$

On pose $u = \frac{x}{\lambda \overline{O_1 O_2}}$ et $v = \frac{y}{\lambda \overline{O_1 O_2}}$, d'où les éléments différentiels $dx = \lambda \overline{O_1 O_2} du$ et $dy = \lambda \overline{O_1 O_2} dv$. On modifie alors l'expression de l'amplitude dans le plan (π_2) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(X', Y', I) &= \mathcal{A}_0 \exp -ik\overline{O_1 O_2} \exp -ik\overline{O_2 I} \exp -ik \frac{X'^2 + Y'^2}{2\overline{O_2 I}} \frac{-1}{\lambda \overline{O_2 I} \lambda \overline{O_1 O_2}} \\
 &(\lambda \overline{O_1 O_2})^2 \int \int_{-\infty}^{+\infty} du dv \overline{\mathcal{F}}_{[t_{\Delta}(X, Y)]}(u, v) \exp -i2\pi \left(u \frac{X'}{g} + v \frac{Y'}{g} \right) \\
 &= \mathcal{A}_0 \exp -ik\overline{O_1 I} \exp -ik \frac{X'^2 + Y'^2}{2\overline{O_2 I}} \frac{-\overline{O_1 O_2}}{\overline{O_2 I}} \overline{\mathcal{F}} \circ \overline{\mathcal{F}}_{[t_{\Delta}(X, Y)]} \left(\frac{X'}{g}, \frac{Y'}{g} \right) \text{ avec } \frac{1}{g} = \frac{\overline{O_2 O_1}}{\overline{O_2 I}} \\
 &= \mathcal{A}_0 \exp -ik\overline{O_1 I} \exp -ik \frac{X'^2 + Y'^2}{2\overline{O_2 I}} \frac{1}{g} t \left(\frac{X'}{g}, \frac{Y'}{g} \right)
 \end{aligned}$$

On retrouve bien pour l'intensité l'expression prévue par l'optique géométrique.