

# Phénomènes de transport

Jean-Baptiste Manneville

Prépa Agreg ENS Paris-Saclay 2021-2022

# Contents

<b>1</b>	<b>Généralités sur les phénomènes de transport</b>	<b>3</b>
1.1	Définition d'un phénomène de transport . . . . .	3
1.1.1	Equilibre thermodynamique et perturbations de l'équilibre . . . . .	3
1.1.2	Equilibre thermodynamique local . . . . .	4
1.1.3	Réponse linéaire, relation flux-affinités et coefficients cinétiques . . . . .	5
1.2	Lois phénoménologiques . . . . .	6
1.2.1	Exemples de phénomènes de transport . . . . .	6
1.2.2	Historique des lois phénoménologiques . . . . .	7
1.2.3	Ordres de grandeur des coefficients de transport . . . . .	7
1.3	Lois de conservation et bilans . . . . .	7
1.3.1	Forme générale d'une loi de conservation . . . . .	7
1.3.2	Approche générale d'un phénomène de transport . . . . .	8
1.4	Classification des phénomènes de transport . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Phénoménologie des phénomènes de transport</b>	<b>11</b>
2.1	Aspects microscopiques . . . . .	11
2.1.1	Notions de temps de collision et de libre parcours moyen . . . . .	11
2.1.2	Section efficace de collision . . . . .	11
2.2	Transport de chaleur, conduction thermique . . . . .	12
2.2.1	Aspects microscopiques, conductivité thermique . . . . .	12
2.2.2	Loi de Fourier . . . . .	12
2.2.3	Conservation de l'énergie . . . . .	13
2.2.4	Coefficients cinétiques et coefficients de transport associés . . . . .	13
2.2.5	Equation de la chaleur . . . . .	13
2.3	Transport de matière, diffusion . . . . .	14
2.3.1	Aspects microscopiques, coefficient de diffusion2.4.6 . . . . .	14
2.3.2	Loi de Fick . . . . .	15
2.3.3	Conservation du nombre de particules . . . . .	16
2.3.4	Coefficients cinétiques et coefficients de transport associés . . . . .	16

2.3.5	Equation de la diffusion . . . . .	16
2.4	Transport de quantité de mouvement dans un fluide . . . . .	16
2.4.1	Aspects microscopiques, viscosité . . . . .	16
2.4.2	Loi de Newton . . . . .	17
2.4.3	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	18
2.4.4	Equation de diffusion de la quantité de mouvement . . . . .	18
2.4.5	Equation de Navier-Stokes . . . . .	18
2.4.6	Couplage avec la chaleur, thermo-convection, applications . . . . .	19
2.5	Transport dans un conducteur, conduction électrique . . . . .	20
2.5.1	Aspects microscopiques, conductivité électrique . . . . .	20
2.5.2	Loi d'Ohm . . . . .	21
2.5.3	Conservation de la densité de charge . . . . .	21
2.5.4	Coefficients cinétiques et coefficients de transport associés . . . . .	21
2.5.5	Effets thermoélectriques . . . . .	22
2.6	Récapitulatif . . . . .	23

# Chapter 1

## Généralités sur les phénomènes de transport

On s'intéresse ici aux phénomènes de transport classique (non quantique, non relativiste) par diffusion et convection dans un milieu matériel (on ne considèrera donc pas les phénomènes de rayonnement). Après avoir défini un phénomène de transport, nous illustrerons les notions de réponse linéaire et de relation flux-affinité à l'aide de quatre exemples (qui seront détaillés au Chapitre 2) : transports de chaleur, de matière, de quantité de mouvement dans un fluide et de charge dans un conducteur. Puis nous introduirons de manière générale les lois de conservation et le bilan d'entropie pour arriver aux coefficients cinétiques dans le cadre de la réponse linéaire.

### 1.1 Définition d'un phénomène de transport

#### 1.1.1 Equilibre thermodynamique et perturbations de l'équilibre

Appartition de **flux** pour permettre le retour à l'équilibre = phénomènes de **transport hors équilibre**

- Deux descriptions de l'équilibre thermique

- Description **thermodynamique** : principe 'zéro' de la thermodynamique, mise en contact thermique de deux systèmes = équilibre thermique atteint au bout d'un certain **temps de relaxation**; Les premier et second principes de la thermodynamique s'appliquent à des états d'équilibre.

- Description **statistique** : microétats, distribution de probabilités, grandeurs moyennes + fluctuations

→ La thermodynamique et la mécanique statistique (classique ou quantique) décrivent les **états d'équilibre**, les changements entre un état d'équilibre initial et un état d'équilibre final (en terme de variation d'énergie ou d'entropie  $\Delta U$ ,  $\Delta S$ ) et prévoient le sens d'évolution.

→ Phénomènes de transport décrivent la **dynamique hors équilibre** lors du passage d'un état d'équilibre à un autre (le but est de répondre à la question : 'comment passe-t-on d'un état d'équilibre à un autre par un phénomène irréversible').

- Notions d'affinité et de flux

- Le déséquilibre d'une variable extensive  $X$  est associé à une **affinité**  $\mathcal{A}$  et à un **flux** de la quantité  $X$  noté  $J_X = \frac{dX}{dt}$  : à l'équilibre  $\mathcal{A} = 0$  et  $J_X = 0$ ; hors équilibre  $\mathcal{A} \neq 0$  et  $J_X \neq 0$ . La **relation entre l'affinité  $\mathcal{A}$  et le flux  $J_X$**  (appelée 'relation flux-affinité') caractérise les **transports irréversibles** mis en jeu lors du passage de l'état d'équilibre initial à l'état d'équilibre final.

- Transformation **réversible** (suite d'états d'équilibre infiniment proches, inversion du temps  $t \rightarrow -t$  possible) vs. **irréversible** (hors équilibre, apport d'énergie, inversion du temps impossible).

- Relaxation (une perturbation de l'état d'équilibre localisée dans le temps induit un régime **transitoire** hors équilibre, flux  $\rightarrow 0$  aux temps longs) vs. transport maintenu hors équilibre (une perturbation continue de l'état d'équilibre induit un régime **permanent**, flux constants non nuls).

- Exemples : mise en contact thermique de deux systèmes, mise en contact d'un système avec un thermostat réservoir de particules.

→ Deux hypothèses dans la suite : 1) Equilibre thermodynamique local; 2) Réponse linéaire flux/affinité

### 1.1.2 Equilibre thermodynamique local

**Condition d'équilibre thermodynamique local (ETL)** = les échanges entre systèmes et sous-systèmes sont suffisamment **lents** pour qu'on puisse définir des échelles de temps et d'espace sur lesquelles les variables ont **localement une valeur d'équilibre**.

- Exemples

- Mise en contact thermique de deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$ : l'ETL implique que l'échelle de temps considérée corresponde à des temps longs devant le temps de mise à l'équilibre de  $S_1$  ou de  $S_2$  mais courts devant le temps d'évolution de  $S_1 \cup S_2$ .

- Cas d'un système continu : on considère un volume  $dV$  de fluide hors équilibre. On suppose que le volume  $dV$  retourne à l'équilibre en un temps typique  $\tau_{\text{éq}}$  de l'ordre de quelques fois le temps de collision (= temps entre deux collisions pour une particule donnée). Sur des échelles de temps longues devant  $\tau_{\text{éq}}$ , l'ETL permet de définir une température locale  $T(\vec{r}, t)$  et un potentiel chimique local  $\mu(\vec{r}, t)$  à partir de l'entropie d'équilibre local de  $dV$   $s_{\text{éq}}(u(\vec{r}, t), n(\vec{r}, t))$ , où  $u(\vec{r}, t)$  est la densité locale d'énergie et  $n(\vec{r}, t)$  est la densité locale de particules, à l'aide de :  $\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{1}{T(\vec{r}, t)}$  et  $\frac{\partial s}{\partial n} = -\frac{\mu(\vec{r}, t)}{T(\vec{r}, t)}$ .

- Echelles spatio-temporelles de l'ETL

⇒ Echelles temporelles  $\Delta t$  telles  $\tau_{\text{éq}} \ll \Delta t \ll \tau_{\text{évol}}$ , où  $\tau_{\text{éq}}$  est le **temps de retour à l'équilibre** à l'échelle microscopique/moléculaire de l'ordre de quelques fois le temps de collision  $\tau_{\text{coll}}$  ( $\tau_{\text{éq}} \sim \tau_{\text{coll}}$ , cf §2.1.1) et  $\tau_{\text{évol}}$  est le **temps d'évolution macroscopique** de  $u(t)$ ,  $n(t)$  et  $T(t)$ .

⇒ Echelles spatiales  $\Delta x$  telles  $a \ll l \ll \Delta x \ll L$ , où  $l$  est le **libre parcours moyen** (= distance moyenne parcourue entre deux collisions, voir §2.1.1),  $a$  est l'échelle microscopique (taille d'une molécule) et  $L$  est l'échelle macroscopique (taille du système).

- Nombres adimensionnés : on définit le **nombre de Knudsen**  $Kn = l/\Delta x$  où  $l$  est le libre parcours moyen et  $\Delta x$  est l'échelle spatiale caractéristique. L'ETL impose  $Kn \ll 1$  et valide l'hypothèse des milieux continus. Remarque : pour un gaz adiabatique, on peut montrer que  $Kn = \frac{Ma}{Re} \sqrt{\frac{\gamma\pi}{2}}$  où  $Re = \rho V \Delta x / \eta$  est le nombre de Reynolds à l'échelle  $\Delta x$  et  $Ma = V/c$  est

le nombre de Mach, avec  $V$  la vitesse typique de l'écoulement,  $c = \sqrt{\gamma RT/M} = \sqrt{\gamma kT/m}$  la vitesse du son,  $v = \sqrt{8kT/m\pi}$  la vitesse moyenne des particules,  $\eta = \rho vl/2$  la viscosité,  $m$  la masse d'une particule et  $\rho$  la densité (cf aussi §2.4.1).

- Exemple : validité de la loi de Fourier (cf §2.2.2). On applique un gradient de température  $\Delta T$  sur une distance  $L$ . L'ETL impose que les perturbations locales de température (à l'échelle  $\delta r$ ) dues au gradient, notées  $\delta T = \frac{\Delta T}{L} \delta r$ , soient petites devant les fluctuations locales de température dans le volume  $\delta r^3$  autour de la température d'équilibre  $T$ . Ces fluctuations locales autour de  $T$  dans le volume  $\delta r^3$  sont caractérisées par la variance  $\sigma_T = \sqrt{\frac{kT^2}{c_V \delta r^3}}$ . On a donc  $\delta T \ll \sigma_T$ , soit  $\frac{\Delta T}{L} \ll \sqrt{\frac{k}{c_V} \frac{T}{\delta r^{5/2}}}$  : le gradient de température ne peut pas être 'trop grand' pour pouvoir appliquer la loi de Fourier.

### 1.1.3 Réponse linéaire, relation flux-affinités et coefficients cinétiques

- Cas où le système est soumis à un flux unique

- Une seule variable extensive  $X$  est hors équilibre, il existe donc un seul flux  $J$  et une affinité  $\mathcal{A}$  non nuls associés à  $X$ . On suppose que la réponse à la perturbation est **locale** et **instantanée**, et que les grandeurs varient **lentement** dans le temps et l'espace. On suppose de plus que la réponse du système à la perturbation est **linéaire** : le flux  $J = \frac{dX}{dt}$  est une **fonction linéaire** de l'**affinité**  $\mathcal{A}$  :  $J = L\mathcal{A}$ .  $J$  et  $\mathcal{A}$  sont des tenseurs d'ordre  $n$ ,  $L$  est un tenseur d'ordre  $2n$  appelé **tenseur des coefficients cinétiques**. Si  $n = 1$ ,  $J$  et  $\mathcal{A}$  sont des vecteurs et  $L$  est appelée **matrice des coefficients cinétiques**.

- Les coefficients cinétiques sont les termes de la matrice  $L$  et peuvent être calculés théoriquement dans le cadre d'une **approche statistique** des phénomènes de transport (qu'on ne fera pas ici) ou bien mesurés par l'expérience dans le cadre d'une **approche phénoménologique** des phénomènes de transport (voir chapitre 2).

- Cas où le système est soumis à plusieurs flux

- Plusieurs variables extensives (quantités  $X_i$ ) sont maintenant hors équilibre. La réponse linéaire suppose que le flux  $J_i = \frac{dX_i}{dt}$  de la quantité  $i$  dépend linéairement des **affinités**  $\mathcal{A}_k$  :  $J_i(\vec{r}, t) = \sum_k L_{ik} \mathcal{A}_k(\vec{r}, t)$ . Le tenseur  $L_{ik}$  est le **tenseur des coefficients cinétiques**.

- Les **coefficients cinétiques**  $L_{ik}$  dépendent des paramètres intensifs conjugués des quantités  $X_i$  (voir §1.3).

Les coefficients diagonaux  $L_{ii}$  représentent les **effets directs** (relation entre le flux de  $X_i$ , l'affinité  $\mathcal{A}_i$  et le paramètre intensif conjugué de  $X_i$ ). Exemples : lois d'Ohm, de Fourier, de Fick (voir §2).

Les coefficients non diagonaux  $L_{ik}$  (pour  $k \neq i$ ) représentent les **effets indirects** (ou effets croisés). Exemples : effet Peltier, effet Seebeck (voir §2.5.5).

- Termes non linéaires

De manière plus générale, on peut développer le flux  $J$  en fonction de l'affinité  $\mathcal{A}$  :

$J = 0 + L\mathcal{A} + L'\mathcal{A}^2 + \dots$ , les termes d'ordres supérieurs sont à l'origine des **non linéarités** (exemples : instabilités, structures dissipatives, turbulence).

## 1.2 Lois phénoménologiques

Il existe deux approches pour obtenir le tenseur des coefficients cinétiques :

- l'approche **phénoménologique** dans laquelle les coefficients cinétiques sont mesurés par l'expérience à partir d'une loi phénoménologique liant flux et affinité.

- l'approche **statistique** dans laquelle les coefficients cinétiques sont calculés par la théorie. On ne s'intéressera ici qu'à l'approche phénoménologique.

Les lois phénoménologiques (lois linéaires) sont des lois reliant flux et affinité lors d'un phénomène de transport qui permettent de définir et de mesurer les coefficients cinétiques (aussi appelés 'constantes cinétiques de transport'). De manière générale, ces lois peuvent être écrites localement ou globalement et on caractérise l'irréversibilité du phénomène de transport à l'aide d'un bilan d'entropie (voir §1.3.2).

### 1.2.1 Exemples de phénomènes de transport

- Transport de chaleur (ou d'entropie), loi de Fourier (voir §2.2)

**Loi de Fourier** locale :  $\vec{j}_Q = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}} T$  où  $\vec{j}_Q$  est la densité de **flux de chaleur** ( $j_Q = \frac{1}{S} \frac{\delta Q}{dt}$  en  $\text{W.m}^{-2}$ ) et  $\kappa$  est la conductivité thermique (en  $\text{W.K}^{-1}\text{m}^{-1}$ ).

**Loi de Fourier** globale :  $\mathcal{P} = \int_S \vec{j}_Q \cdot \overrightarrow{dS} = \Lambda \Delta T$  où  $\mathcal{P}$  est la puissance thermique (en W) et  $\Lambda = \kappa \frac{S}{l}$  est la conductance thermique (en  $\text{W.K}^{-1}$ ) d'un conducteur de longueur  $l$  et de section  $S$  soumis à un gradient de température uniforme  $\Delta T/l$ .

Densité de **flux d'entropie** :  $\vec{j}_S = \frac{\vec{j}_Q}{T} = -\frac{\kappa}{T} \overrightarrow{\text{grad}} T$

→ entropie  $\Delta S_{12}$  échangée entre deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$  en contact sur une surface  $S$  telle que  $\frac{d(\Delta S_{12})}{dt} = \int_S \vec{j}_S \cdot \overrightarrow{dS}$

→ production locale d'entropie :  $\sigma_S = -\vec{j}_Q \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = -T \vec{j}_S \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T$  (irréversibilité de la conduction thermique, voir 1.3.2, analogue à l'effet Joule)

- Transport de particules, loi de Fick (voir §2.3)

**Loi de Fick** :  $\vec{j}_N = -D \overrightarrow{\text{grad}} n$  où  $\vec{j}_N$  est la densité de **flux de particules** ( $j_N = \frac{1}{S} \frac{dN}{dt}$  en  $\text{m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ ),  $n(\vec{r}, t) = \frac{dN}{dV}$  est la densité de particules (en  $\text{m}^{-3}$ ), et  $D$  est le coefficient de diffusion (en  $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ )

- Transport de quantité de mouvement, loi de Newton (voir §2.4)

Grandeur transportée = quantité de mouvement (vectorielle)  $\Rightarrow$  densité de **flux de quantité de mouvement** = tenseur des efforts visqueux  $\overline{\overline{T'}}$  ( $\frac{d^2 \vec{p}}{dt} = d\vec{F} = \overline{\overline{T'}} \cdot \overrightarrow{dS}$ ,  $d^2 \vec{p} = \overline{\overline{T'}} \cdot \overrightarrow{dS} dt$  et  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = \int_S \overline{\overline{T'}} \cdot \overrightarrow{dS}$ )

Fluide newtonien = **relation linéaire** entre le tenseur des efforts visqueux  $\overline{\overline{T'}}$  et le tenseur des taux de déformation  $\overline{\overline{S}}$  tel que  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow$  **loi de Newton** (généralisée) :  $T'_{ij} = -[L] \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  où  $[L]$  est la matrice des **coefficients de viscosité** (se réduit à deux coefficients : viscosité dynamique  $\eta$  et seconde viscosité  $\xi$ ).

Cas particulier de l'écoulement de Couette plan incompressible (écoulement le long de l'axe  $x$ , cisaillement dans la direction  $z$ ) :  $T'_{xz} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}$  (loi de Newton).

- Transport de charges, loi d'Ohm (voir §2.5)

**Loi d'Ohm** locale :  $\vec{j}_E = \sigma \vec{E} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V$  où  $\vec{j}_E$  est la densité de **flux de charges** (densité de courant électrique) ( $j_E = \frac{1}{S} \frac{\delta q}{\delta t} = \frac{I}{S}$  en  $\text{C.s}^{-1}.\text{m}^{-2} = \text{A.m}^{-2}$ ) et  $\sigma$  est la conductivité électrique (en  $\text{S.m}^{-1} = \Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$ ).

**Loi d'Ohm** globale :  $I = \int_S \vec{j}_E \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{1}{R} \Delta V$  où  $1/R = \sigma \frac{S}{l}$  est la conductance électrique (en S) (ou bien  $R = \rho \frac{l}{S}$  est la résistance électrique en  $\Omega$ , avec  $\rho =$  résistivité électrique en  $\Omega.\text{m}$ ) d'un conducteur de longueur  $l$  et de section  $S$  soumis à une différence de potentiel  $\Delta V$ .

Production de chaleur par **effet Joule** :  $\mathcal{P} = RI^2$  où  $\mathcal{P}$  est la puissance dissipée par effet Joule (en W) (irréversibilité de la conduction électrique, production locale d'entropie :  $-\vec{j}_E \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{j}_E \cdot \vec{E}$  en  $\text{W.m}^{-3}$ ).

Remarques :

- Cas des supraconducteurs (pas de dissipation)
- Conduction de la chaleur ( $\vec{j}_S \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = -\frac{\kappa}{T} (\overrightarrow{\text{grad}} T)^2$  en  $\text{W.m}^{-3}$ ) et de la charge ( $\vec{j}_E \cdot \vec{E} = -\sigma (\overrightarrow{\text{grad}} V)^2$  en  $\text{W.m}^{-3}$ ) dans un métal  $\Rightarrow$  argument dimensionnel pour la loi de Wiedemann-Franz : la quantité  $\mathcal{L} = \frac{\kappa/T}{\sigma} = \frac{\pi^2 k_B^2}{3e^2} \simeq 2.4 \cdot 10^{-8} \text{W}\Omega\text{K}^{-2}$ , appelée constante de Lorentz, est indépendante de  $T$ . La valeur exacte de la constante de Lorentz est donnée par une approche statistique quantique (voir §2.5.1).

- Réactions chimiques

L'**affinité chimique** est définie par  $\mathcal{A} = -\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{P,T} = -\sum_i \nu_i \mu_i$  où  $d\xi = \frac{dn_i}{\nu_i}$  est l'avancement de la réaction chimique  $\sum_i \nu_i A_i = 0$  entre espèces  $A_i$  de concentrations  $C_i(t)$ , de potentiels chimiques  $\mu_i$  et avec les coefficients stoechiométriques  $\nu_i$ . On a :  $\mathcal{A} = 0$  à l'équilibre et  $\mathcal{A} \neq 0$  hors équilibre.

Le flux défini par  $J = \frac{1}{V} \frac{dC_i}{dt}$  correspond à la vitesse de réaction en cinétique chimique et s'écrit  $J = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}$ , où  $V$  est le volume où se passe la réaction. Pour une réaction très lente ou très près de l'équilibre chimique, la réponse est linéaire et le flux  $J$  varie **linéairement** avec l'affinité  $\mathcal{A}$  :  $J = -\gamma \mathcal{A}$ .

## 1.2.2 Historique des lois phénoménologiques

Approche phénoménologique (Fourier 1822, Ohm 1827, Fick 1855, Onsager 1931) et approche statistique (Boltzmann 1872, Drude 1900). Vérification de la loi de Wiedemann-Franz.

## 1.2.3 Ordres de grandeur des coefficients de transport

Valeurs de la résistivité ( $\rho = 1/\sigma$ ) et de la conductivité thermique  $\kappa$  de quelques métaux.

## 1.3 Lois de conservation et bilans

### 1.3.1 Forme générale d'une loi de conservation

- Cas d'un milieu indéformable

➤ Soit une grandeur extensive (additive)  $X(t)$  et sa densité volumique  $x(\vec{r}, t)$  telle que  $X(t) = \int_{\mathcal{V}} x(\vec{r}, t) dV$ . Le volume  $\mathcal{V}$  contenant la quantité  $X(t)$  et la surface  $\mathcal{S}$  délimitant  $\mathcal{V}$  sont fixes (indépendants du temps).

**Bilan global** de  $X(t)$  :  $\frac{dX}{dt} + \int_{\mathcal{S}} \vec{j}_X \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{V}} \sigma_X dV$  où  $\vec{j}_X$  est la **densité de flux** de  $X$  travers  $\mathcal{S}$ , et  $\sigma_X$  est la **densité de sources** (ou puits) de  $X$  dans  $\mathcal{V}$  (= taux de production de  $X$  dans  $\mathcal{V}$ )

**Bilan local** de  $X(t)$  :  $\frac{\partial x}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_X = \sigma_X$

➤ Remarques :

- Densité **volumique**  $x(\vec{r}, t)$  vs. densité **massique**  $x_m(\vec{r}, t)$  de  $X$  :  $x(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)x_m(\vec{r}, t)$ . On peut alors écrire :  $X(t) = \int_{\mathcal{V}} x(\vec{r}, t) dV = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}, t)x_m(\vec{r}, t) dV = \int_{\mathcal{V}} x_m(\vec{r}, t) dm$ .

- **Grandeur conservée** = il n'y a pas de production de  $X$  dans le volume  $\mathcal{V}$ ,  $\sigma_X = 0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_X = 0$

- Cas des fluides (milieux déformables)

➤ Le volume  $\mathcal{V}$  contenant la quantité  $X(t)$  et la surface  $\mathcal{S}$  délimitant  $\mathcal{V}$  sont déformables et en mouvement (dépendent du temps) donc  $X(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} x(\vec{r}(t), t) dV = \int_{\mathcal{V}(t)} x_m(\vec{r}(t), t) \rho(\vec{r}(t), t) dV$ .  $X(t)$  varie à cause du **flux**  $\vec{j}_X$  de  $X$  à travers  $\mathcal{S}$  en mouvement avec le fluide et à cause des sources  $\sigma_X$  de  $X$  dans  $\mathcal{V}$  donc :  $\frac{dX}{dt} = - \int_{\mathcal{S}(t)} \vec{j}_X \cdot d\vec{S} + \int_{\mathcal{V}(t)} \sigma_X dV$ .

En utilisant le **théorème de transport**, la notion de **dérivée particulaire** et la **conservation de la masse** (voir cours d'acoustique, 2ème version du théorème de transport), on obtient :  $\frac{dX}{dt} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \frac{dx_m}{dt} dV = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \left( \frac{\partial x_m}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) x_m \right) dV$  (sans source de  $X$  dans  $\mathcal{V}$ ).

**Bilan global** de  $X(t)$  pour un fluide (avec sources  $\sigma_X$ ) :

$$\frac{dX}{dt} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \frac{dx_m}{dt} dV = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \left( \frac{\partial x_m}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) x_m \right) dV = - \int_{\mathcal{S}} \vec{j}_X \cdot d\vec{S} + \int_{\mathcal{V}} \sigma_X dV.$$

**Bilan local** de  $X(t)$  pour un fluide (avec sources  $\sigma_X$  et avec l'hypothèse que  $\rho$  varie peu localement) :

$\rho \frac{\partial x_m}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_X^{tot} = \sigma_X$  avec  $\vec{j}_X^{tot} = \vec{j}_X + \rho x_m \vec{v}$  donc le flux total est la somme du flux **diffusif** de  $X$  travers  $S(t)$  mobile et du flux **convectif d'entraînement** par le fluide à la vitesse  $\vec{v}$ .

➤ Remarque : interprétation de la divergence. On considère un élément de volume  $dV$  à l'instant  $t$  qui se déforme en un volume  $dV'$  à l'instant  $t + dt$  sous l'effet de la transformation  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{v} dt$ . On a alors :  $dV' = |J| dV$  où  $|J| = \det \left( \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right)_{i,j}$  est le jacobien de la transformation  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{v} dt$ . On a  $|J| = 1 + \text{div } \vec{v} dt$  (au premier ordre en  $dt$ ) et donc  $\text{div } \vec{v} = \frac{1}{dV} \frac{d(dV)}{dt}$ . Pour un fluide **incompressible** :  $\text{div } \vec{v} = \frac{1}{dV} \frac{d(dV)}{dt} = 0$ .

### 1.3.2 Approche générale d'un phénomène de transport

- Lois de conservations, bilan global, bilan local

$X = \int_{\mathcal{V}} x dV$  grandeur extensive; bilan **local** :  $\frac{\partial x}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_X = \sigma_X$  (0 si grandeur conservée); bilan **global** :  $\frac{dX}{dt} = - \int_{\mathcal{S}} \vec{j}_X \cdot d\vec{S} + \int_{\mathcal{V}} \sigma_X dV$ .

- Bilan d'entropie

Entropie  $S$  = grandeur extensive, non conservée

**Bilan global** d'entropie :  $\frac{dS}{dt} = - \int_S \vec{j}_S \cdot d\vec{S} + \int_V \sigma_S dV = \frac{dS_{ech}}{dt} + \frac{dS_{irr}}{dt}$  où  $\frac{dS_{ech}}{dt} = - \int_S \vec{j}_S \cdot d\vec{S}$  représente l'**échange** d'entropie entre le système et l'extérieur et  $\frac{dS_{irr}}{dt} = \int_V \sigma_S dV$  représente la **production** d'entropie ( $\sigma_S \geq 0$ ,  $\frac{dS_{irr}}{dt} \geq 0$ , si  $> 0$  alors il existe des **phénomènes dissipatifs** et le transport est irréversible).

**Bilan local** d'entropie :  $\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_S = \sigma_S$  où  $s$  est l'entropie massique.

- Relation entre flux, affinité et production d'entropie

➤ Cas d'un **système discret** :

- On considère deux sous-systèmes  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  qui échangent les quantités extensives **conservées**  $X_i$  ( $X_i + X'_i = X_{i\text{tot}} = \text{cte}$ ). On définit l'**affinité**  $\mathcal{A}_i$  associée aux échanges de  $X_i$  par

$$\mathcal{A}_i = \left. \frac{\partial S_{tot}}{\partial X_i} \right|_{X_{i\text{tot}}=\text{cte}} = \frac{\partial S}{\partial X_i} - \frac{\partial S'}{\partial X'_i} = F_i - F'_i$$

où  $F_i = \frac{\partial S}{\partial X_i}$  est la **force** (grandeur intensive conjuguée de  $X_i$ ).

- A l'équilibre :  $\mathcal{A}_i = 0$  et  $\frac{\partial S}{\partial X_i} = \frac{\partial S'}{\partial X'_i}$  (ou de façon équivalente,  $F_i = F'_i$ ) et  $S_{tot}$  est maximale.

- Remarque :  $\mathcal{A}_i$  est ici un scalaire.

- Exemples :  $X_i = U \Rightarrow F_i = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} \Rightarrow T = T'$  à l'équilibre (pas de flux de chaleur);  $X_i = V \Rightarrow F_i = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T} \Rightarrow p/T = p'/T'$  à l'équilibre (pas d'échanges de volume);  $X_i = N \Rightarrow F_i = \frac{\partial S}{\partial N} = -\frac{\mu}{T} \Rightarrow \mu/T = \mu'/T'$  à l'équilibre (pas de flux de particules).

- **Production d'entropie** : le flux de  $X_i$  étant défini par  $J_i = \frac{dX_i}{dt}$ , la **production d'entropie** est  $\frac{dS_{tot}}{dt} = \sum_i \frac{\partial S_{tot}}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial t} = \sum_i \mathcal{A}_i J_i$ .

➤ Cas d'un **système continu** :

- L'entropie du système dépend des quantités extensives **conservées**  $X_i$  :  $dS = \sum_i F_i dX_i$  (ici,  $X_i = U$  ou  $n$ ) où  $S = \int_V \rho s dV$  et  $X_i = \int_V \rho x_{im} dV$ ,  $F_i = \frac{\partial S}{\partial X_i}$  sont les grandeurs intensives conjuguées des quantités  $X_i$  et  $s$  et  $x_i$  sont les densités massiques d'entropie et de  $X_i$  respectivement.

- L'hypothèse d'ETL (les quantités  $F_i$  ont localement leurs valeurs d'équilibre) permet d'écrire  $d(\rho s) = \sum_i F_i d(\rho x_{im})$ . On définit alors la **densité de flux d'entropie** comme  $\vec{j}_S = \sum_i F_i \vec{j}_i$  où  $\vec{j}_i$  est la **densité de flux** de  $X_i$  (quantité supposée conservée) et  $F_i$  est la **grandeur intensive conjuguée** de  $X_i$ .

- **Bilan d'entropie** :  $\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_S = \sigma_S \Rightarrow$  **production d'entropie**  $\sigma_S = \sum_i \vec{A}_i \cdot \vec{j}_i$  où  $\vec{A}_i = \overrightarrow{\text{grad}} F_i$  est l'**affinité**.

Remarques:

1) La démonstration utilise l'hypothèse que la quantité  $X_i$  est conservée.

2)  $\vec{A}_i$  est ici un vecteur. Le vecteur gradient qui apparait dans le cas du système continu ( $\vec{A}_i = \overrightarrow{\text{grad}} F_i$ ) est l'équivalent de la différence  $\mathcal{A}_i = F_i - F'_i$  qui apparaissait dans le cas d'un système discret formé de deux sous-systèmes.

- Exemple : cas d'un **flux d'énergie**  $U$  et de **particules**  $N_i$ . On a  $dS = \frac{dU}{T} - \sum_i \frac{\mu_i}{T} dN_i$  donc  $F_U = \partial S / \partial U = 1/T$  et  $F_{N_i} = \partial S / \partial N_i = -\mu_i/T$ . La densité de flux d'entropie est

$\vec{j}_S = \frac{1}{T} \vec{j}_U - \sum_i \frac{\mu_i}{T} \vec{j}_{N_i}$  et la production d'entropie est  $\sigma_S = \vec{j}_U \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) - \sum_i \vec{j}_{N_i} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\mu_i}{T}\right)$ .

En utilisant  $\vec{j}_S$  à la place de  $\vec{j}_U$ , on peut réécrire la production d'entropie comme  $\sigma_S = -\frac{1}{T} \vec{j}_S \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T - \frac{1}{T} \sum_i \vec{j}_{N_i} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \mu_i$ .

- Réponse linéaire et matrice des coefficients cinétiques, relations d'Onsager

- Relation flux-affinités (voir §1.1.3) : avec l'hypothèse d'un milieu continu en ETL, les flux  $J_i$  des grandeurs extensives  $X_i$  dépendent **linéairement** des affinités  $\mathcal{A}_k \Rightarrow J_i(\vec{r}, t) = \sum_k L_{ik} \mathcal{A}_k(\vec{r}, t)$

où les coefficients cinétiques  $L_{ik}$  dépendent des grandeurs conjuguées  $F_i$  conjuguées des  $X_i$  et  $\mathcal{A}_k(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\text{grad}} F_k$ . On rappelle que, si  $J_i$  et  $\mathcal{A}_k$  sont des tenseurs d'ordre  $n$ , alors  $[L_{ik}] = L$  est un tenseur d'ordre  $n + 1$  appelé tenseur des coefficients cinétiques.

- **Production d'entropie** : en généralisant la relation vectorielle  $\sigma_S = \sum_i \vec{A}_i \cdot \vec{j}_i$  vue ci-dessus, la production d'entropie est  $\sigma_S = \sum_i \mathcal{A}_i J_i = \sum_{i,k} L_{ik} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_k$ . Puisque  $\sigma_S \geq 0$ , cela impose que  $L_{ii} \geq 0$

(condition pour les effets directs : **coefficients diagonaux positifs**) et  $L_{ii} L_{kk} \geq \frac{1}{4} (L_{ik} + L_{ki})$ .

- Remarque : on peut décomposer le tenseur  $L$  en parties symétrique et antisymétrique  $L = L^{sym} + L^{antisym}$  et seule la partie symétrique  $L^{sym}$  de  $L$  contribue à la production d'entropie de sorte que  $\sigma_S = \sum_{i,k} L_{ik}^{sym} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_k$ .

- **Relations d'Onsager** (1931) : symétrie temporelle (réversibilité des équations microscopiques du mouvement)  $\Rightarrow L_{ik} = L_{ki}$  (condition pour les effets indirects/croisés : **coefficients non diagonaux symétriques**). Ces relations permettent de simplifier la détermination des coefficients cinétiques.

- **Réponse linéaire** dans le cas de flux d'énergie  $U$  et de particules  $N$  (un seul type de particules):

$$\begin{cases} \vec{j}_N = L_{NN} \overrightarrow{\text{grad}}\left(-\frac{\mu}{T}\right) + L_{NU} \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) \\ \vec{j}_U = L_{UN} \overrightarrow{\text{grad}}\left(-\frac{\mu}{T}\right) + L_{UU} \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) \end{cases}$$

Les relations d'Onsager imposent  $L_{NU} = L_{UN}$ .

## 1.4 Classification des phénomènes de transport

- En fonction du mécanisme de transport et du milieu : **diffusion** (milieu matériel), **convection** (milieu matériel), **rayonnement** (pas de milieu matériel).

- En fonction des quantités transportées (grandeurs extensives, conservées ou non) :

Grandeurs **conservées** (énergie/chaleur, nombre de particules, quantité de mouvement, charge électrique)  $\Rightarrow$  grandeurs inchangées par les collisions microscopiques, nécessité de flux pour le retour à l'équilibre, loi de conservation locale ( $\frac{\partial x}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_X = 0$  où  $x$  est la densité locale de  $X$ , quantité conservée, et  $\text{div} \vec{j}_X$  représente les échanges de la quantité  $X$  avec le voisinage).

Grandeurs **non conservées** (entropie, nombre de neutrons en physique atomique)  $\Rightarrow$  bilan global ( $\frac{dX}{dt} + \Phi_{X \text{ Syst} \rightarrow \text{ext}} = \Phi_{X \text{ source}}$  où  $\Phi_{X \text{ Syst} \rightarrow \text{ext}}$  représente le flux de  $X$  échangé avec l'extérieur et  $\Phi_{X \text{ source}}$  représente les sources de  $X$  dans le système).

## Chapter 2

# Phénoménologie des phénomènes de transport

## 2.1 Aspects microscopiques

### 2.1.1 Notions de temps de collision et de libre parcours moyen

Rappel sur l'**équilibre thermodynamique local** (ETL, voir §1.1.2) : l'ETL impose des conditions sur les échelles spatiales  $\Delta x$  et temporelles  $\Delta t$  auxquelles les phénomènes de transport sont étudiés :

- dans le domaine temporel :  $\tau_{coll} \ll \Delta t$  où  $\tau_{coll}$  est le **temps de collision** (ou **temps de choc**) défini comme le temps moyen entre deux collisions.
- dans le domaine spatial :  $l \ll \Delta x$  où  $l$  est le **libre parcours moyen** défini comme la distance moyenne parcourue entre deux collisions.

On a la relation suivante entre le temps de collision  $\tau_{coll}$  et le libre parcours moyen  $l$  :  $l = v\tau_{coll}$  où on introduit  $v$ , la **vitesse moyenne** des particules (en général obtenue par une approche statistique, par exemple  $v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$  pour les molécules d'un gaz monoatomiques où  $k = k_B$  est la constante de Boltzmann,  $T$  est la température et  $m$  est la masse d'une molécule de gaz).

### 2.1.2 Section efficace de collision

- Modèles des sphères dures

Dans le modèle des **sphères dures**, on modélise le potentiel d'interaction entre deux particules  $\varphi_{int}(r)$  où  $r$  est la distance entre les deux particules (particules de rayon  $r_p$ ) de sorte que  $r < 2r_p$  soit impossible (particules impénétrables), pour  $r = 2r_p$  il y a répulsion des deux particules, pour  $r > 2r_p$  les interactions entre particules tendent vers zéro.

On définit la **section efficace** de choc  $\sigma$  par  $\sigma = 4\pi r_p^2$  (surface du disque de rayon  $2r_p$ ).

- Relation entre section efficace et libre parcours moyen

On trouve en moyenne une seule particule (un seul choc) dans le volume  $V_\sigma = \sigma v_r \tau_{coll}$  où  $v_r = \sqrt{\langle (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 \rangle} = \sqrt{2}v$  est la **vitesse relative** moyenne des particules, donc  $n\sigma v_r \tau_{coll} = 1$  où  $n = N/V$  est la densité de particules. On en déduit la relation entre section efficace et libre parcours moyen :  $l = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$ .

- Relation entre section efficace et flux

Définitions et notations pour les flux et densité de flux travers une surface  $\mathcal{S}$  : le **flux** de la quantité  $X$  est  $\Phi_X = \frac{dX}{dt}$  et la **densité de flux** associée est  $\left\| \vec{j}_X \right\| = \frac{d^2X}{dt d\mathcal{S}}$ . On a :  $d\Phi_X = \vec{j}_X \cdot d\vec{\mathcal{S}}$  et  $\Phi_X = \int_{\mathcal{S}} d\Phi_X = \int_{\mathcal{S}} \vec{j}_X \cdot d\vec{\mathcal{S}}$ .

Conséquence : si  $N_d$  est le nombre de particules diffusées par unité de temps et  $\Phi_{inc}$  est le flux de particules incidentes, la section efficace de choc  $\sigma$  est reliée au flux  $\Phi_{inc}$  par  $\sigma = \frac{N_d}{\Phi_{inc}}$ .

- Ordres de grandeur :  $l_{gaz} \sim 0.1 \mu\text{m}$  et  $l_{liq} \sim 0.1 \text{nm}$ .

## 2.2 Transport de chaleur, conduction thermique

➤ Quantité transportée : énergie.

➤ Modes de transport de l'énergie : diffusion, convection, rayonnement (on ne s'intéressera pas au rayonnement ici).

### 2.2.1 Aspects microscopiques, conductivité thermique

- Modèle 1D

On considère des particules de masse  $m$ , de vitesse moyenne  $v$ , et de densité  $n$  dans un cylindre de longueur  $2l$  et de section  $\sigma$  ( $l$  est le libre parcours moyen et  $\sigma$  est la section efficace). On suppose qu'il existe un déséquilibre de température entre les positions  $x-l$  et  $x+l$  :  $T(x-l) \neq T(x+l)$ . On suppose que le transport se fait de manière isotrope.

Le flux d'énergie par unité de surface **entrant** en  $x-l$  est  $\phi_e = \frac{1}{6}nvkT(x-l)$ .

Le flux d'énergie par unité de surface **sortant** en  $x+l$  est  $\phi_s = \frac{1}{6}nvkT(x+l)$ .

- Bilan d'énergie

Le flux **total** d'énergie par unité de surface (= densité de flux notée ici  $\phi$ ) est  $\phi = \phi_e - \phi_s = -\frac{1}{3}nvk \frac{\partial T}{\partial x}$ , proportionnel au **gradient de température** (= loi de Fourier).

- Expression de la conductivité thermique en fonction des paramètres microscopiques

La **loi de Fourier** s'écrit  $\phi = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$  et permet de définir la conductivité thermique  $\kappa$ . L'expression de la conductivité thermique en fonction du **libre parcours moyen** est donc :  $\kappa = \frac{1}{3}nvk$ .

- Conductivité thermique en fonction de la **section efficace** :  $\kappa = \frac{vk}{3\sqrt{2}\sigma} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \frac{k}{3\sqrt{2}\sigma} \Rightarrow \kappa \propto \sqrt{T}$

- Conductivité thermique en fonction du **temps de collision** :  $\kappa = \frac{n\tau_{coll}k^2T}{m}$

### 2.2.2 Loi de Fourier

- Densité d'énergie et loi de Fourier

A cause des chocs entre particules, il y a conservation de la densité locale d'énergie. Les inhomogénéités de température donnent naissance à des flux de chaleur dirigés des zones de température élevée vers les zones de températures plus faible (l'ETL permet de définir une température locale).

La **densité de flux de chaleur**  $\vec{j}_Q$  est telle que  $d^2Q = \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} dt$ . En régime linéaire, la densité de flux de chaleur est donnée par la **loi de Fourier** :  $\vec{j}_Q = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}} T$  où  $\kappa$  est la **conductivité thermique**.

Conditions de validité de la loi de Fourier : hypothèses d'ETL et de linéarité ( $\overrightarrow{\text{grad}} T$  'pas trop grand', c'est-à-dire  $\frac{\Delta T}{L} \ll \sqrt{\frac{k}{c_V}} \frac{T}{\delta r^{5/2}}$ , voir §1.1.2).

### 2.2.3 Conservation de l'énergie

En notant  $e(T(\vec{r}, t), n)$  l'énergie thermique volumique ( $de = du$  (énergie interne volumique) si  $V = \text{cte}$  ou  $de = dh$  (enthalpie volumique) si  $P = \text{cte}$ ), la **conservation de l'énergie** s'écrit :  $\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_Q = 0$ .

Cas d'un **solide** :  $V = \text{cte} \Rightarrow dU = \delta Q = C_V dT$  et  $de = du = \rho c_V dT$  avec  $c_V = C_V/m$  ( $C_V$  est la capacité calorifique à volume constant,  $c_V$  est la chaleur spécifique massique à volume constant) donc  $\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_Q = 0$

Cas d'un **fluide** :  $P = \text{cte} \Rightarrow dH = \delta Q = C_P dT$  et  $de = dh = \rho c_P dT$  avec  $c_P = C_P/m$  ( $C_P$  est la capacité calorifique à pression constante,  $c_P$  est la chaleur spécifique massique à pression constante) donc  $\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_Q = 0$

### 2.2.4 Coefficients cinétiques et coefficients de transport associés

Pour un **solide isolant**, la conduction de la chaleur s'effectue uniquement via les phonons. Pour un **conducteur**, la conduction de la chaleur s'effectue via les phonons et les électrons de conduction.

Pour un isolant, l'approche générale du transport (voir 1.3.2) donne  $\vec{j}_U = L_{UN} \overrightarrow{\text{grad}} \left(-\frac{\mu}{T}\right) + L_{UU} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{T}\right) = L_{UU} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{T}\right)$  car le nombre de phonons  $N$  est une grandeur non conservée, soit  $\vec{j}_U = -\frac{L_{UU}}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T$ . En identifiant  $\vec{j}_U$  et  $\vec{j}_Q$ , on en déduit la relation entre le coefficient cinétique  $L_{UU}$  et la conductivité thermique  $\kappa$  (coefficient de transport associé au flux de chaleur par la loi de Fourier) :  $\kappa = \frac{L_{UU}}{T^2}$ .

### 2.2.5 Equation de la chaleur

- Equation de diffusion de la chaleur

$$\begin{cases} \rho c_V \text{ ou } P \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_Q = 0 \\ \vec{j}_Q = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}} T \end{cases} \Rightarrow \text{Equation de la chaleur : la température } T \text{ vérifie l'équation}$$
 de diffusion  $\frac{\partial T}{\partial t} = D_{Th} \Delta T$  où  $D_{Th} = \frac{\kappa}{\rho c_V}$  est le **coefficient de diffusion thermique**.

Le temps caractéristique de diffusion de la chaleur sur une distance  $L$  est  $T_{diff Q} = L^2 / D_{Th}$ .

- Dimensions et ordres de grandeur

$$[\kappa] = MLT^{-3}\theta^{-1} \text{ en } W.m^{-1}.K^{-1}$$

$$[D_{Th}] = L^2T^{-1} \text{ en } m^2.s^{-1}$$

Pour des solides métalliques :  $\kappa \simeq 10 - 100 W.m^{-1}.K^{-1}$  et  $D_{Th} \simeq 10^{-5} m^2.s^{-1}$

Pour des solides non métalliques :  $\kappa \simeq 0.1 - 10 W.m^{-1}.K^{-1}$  et  $D_{Th} \simeq 10^{-7} m^2.s^{-1}$

Eau :  $\kappa \simeq 0.55 W.m^{-1}.K^{-1}$

Air sec :  $\kappa \simeq 0.024 W.m^{-1}.K^{-1}$

- Exemples de résolutions de l'équation de la chaleur et applications

- Régime **stationnaire 1D** : conducteur de longueur  $l$  de section  $\mathcal{S}$ ,  $\Delta T(x) = 0$  + conditions aux limites  $\Rightarrow T(x) = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{l}$  et  $\Delta T = T_1 - T_2 = R_{Th}I_Q$  (analogue de la loi d'Ohm) où  $R_{Th} = \frac{l}{S\kappa}$  est la résistance thermique et  $I_Q = Sj_Q$ .

- **Résistance thermique** : plaque de surface  $\mathcal{S}$  et de longueur  $l \Rightarrow R_{Th} = \frac{l}{S\kappa}$ , cylindre creux de longueur  $L$  et rayons interne  $R_1$  et externe  $R_2 \Rightarrow R_{Th} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi L\kappa}$

- Régime **stationnaire pour une plaque rectangulaire** de largeur  $l$  suivant  $(Ox)$  et semi-infinie suivant  $(Oy)$  pour  $y > 0$  :  $\Delta T(x) = 0$  + conditions aux limites  $T(x = 0 \text{ ou } l) = T_0$  (on prend  $T_0 = 0$  pour simplifier)  $\Rightarrow T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\pi\frac{y}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}$ . Si on impose  $T(y = 0) = T_1$ ,  $b_n = \frac{4T_1}{n\pi}$  si  $n$  est impair,  $b_n = 0$  si  $n$  est pair.

- Régime **sinusoïdal forcé** :  $\frac{\partial T}{\partial t} = D_{Th} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$  avec  $T(z = 0, t) = T_m + T \cos(\omega t) \Rightarrow T(z, t) = T_m + T_0 \cos(\omega t - k_z z) e^{-z/\Lambda}$  où  $\Lambda = \sqrt{\frac{2D_{Th}}{\omega}}$  est la **profondeur de pénétration** (ou longueur de diffusion thermique) et  $\lambda_{Th} = 2\pi\Lambda = 2\pi/k_z$  est la longueur d'onde de modulation (applications numériques pour le sol), analogie avec l'**effet de peau** en électromagnétisme  $v_\varphi = \omega/k_z = \sqrt{2D_{Th}\omega}$ .

- Autres exemples et applications : fusible, barre de cuivre en régime permanent, conduite d'eau, mur, choc thermique, température de contact et sensation de chaud/froid (notion d'effusivité thermique).

## 2.3 Transport de matière, diffusion

➤ Quantité transportée : particules (= soluté, transporté dans un milieu continu = solvant).

➤ Modes de transport de particules : diffusion, convection (libre ou forcée). Dans la suite de ce paragraphe, on ne considèrera que le transport par diffusion (voir §2.4.6 pour la convection).

### 2.3.1 Aspects microscopiques, coefficient de diffusion 2.4.6

On considère des particules de masse  $m$ , de vitesse moyenne  $v$ , et de densité  $n(x)$  dans un cylindre de longueur  $2l$  et de section  $\sigma$  ( $l$  est le libre parcours moyen et  $\sigma$  est la section efficace) avec un déséquilibre de densité de particules entre les positions  $x - l$  et  $x + l$  tel que  $n(x - l) \neq n(x + l)$ .

Le flux de particules par unité de surface **entrant** en  $x - l$  est  $\phi_e = \frac{1}{6}vn(x - l)$ .

Le flux de particules par unité de surface **sortant** en  $x + l$  est  $\phi_s = \frac{1}{6}vn(x + l)$ .

- Bilan de particules

Le flux **total** de particules par unité de surface (= densité de flux notée ici  $\phi$ ) est  $\phi = \phi_e - \phi_s = -\frac{1}{3}vl\frac{\partial n}{\partial x}$ , proportionnel au **gradient de densité** (= loi de Fick).

- Expression du coefficient de diffusion en fonction des paramètres microscopiques

La **loi de Fick** s'écrit  $\phi = -D\frac{\partial n}{\partial x}$  et permet d'exprimer le **coefficient de diffusion**  $D$  en fonction du **libre parcours moyen**  $D = \frac{1}{3}vl$ .

- Coefficient de diffusion en fonction de la **section efficace** :  $D = \frac{1}{3\sqrt{2}}\frac{v}{n\sigma}$
- Coefficient de diffusion en fonction du **temps de collision** :  $D = \frac{kT}{m}\tau_{coll}$

- Remarques

- Pour un gaz parfait :  $D = \frac{(kT)^{3/2}}{\sqrt{3m\rho\sigma}}$

- Pour un fluide, le coefficient de diffusion et la viscosité sont reliés par la **relation d'Einstein** :  $D = \mu kT = \frac{kT}{\alpha}$  où  $\alpha = 6\pi\eta r_P$  est le coefficient de **friction** visqueuse (en notant  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide et  $r_P$  le rayon des particules) et  $\mu = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{6\pi\eta r_P}$  est la **mobilité**.

- Pour un gaz parfait d'électrons, le coefficient de diffusion et la conductivité électrique sont reliés par :  $D = \mu_D \frac{kT}{-e}$  où  $\mu_D = \sigma/(-ne)$  où  $\sigma$  est la conductivité électrique.

### 2.3.2 Loi de Fick

- Densité de particules et loi de Fick

La **densité locale de particules**  $n(\vec{r}, t)$  est une grandeur conservée. Les inhomogénéités de densité donnent naissance à des flux de particules. A un flux de particule correspond une densité de flux de particules (densité de courant)  $\vec{j}_N$  telle que  $d^2N = \vec{j}_N \cdot \vec{dS} dt$ .

En régime linéaire, la **loi de Fick** est vérifiée :  $\vec{j}_N = -D\overrightarrow{\text{grad}} n(\vec{r}, t)$  où  $D$  est le **coefficient de diffusion**.

Conditions de validité de la loi de Fick : hypothèses d'ETL ( $n(t)$  évolue lentement) et de linéarité ( $\overrightarrow{\text{grad}} n$  pas trop grand), température uniforme, absence de convection.

- Dimensions et ordres de grandeur

$$[D] = L^2 T^{-1} \text{ en } \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Pour des gaz :  $D \simeq 10^{-5} - 10^{-4} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Pour des liquides :  $D \simeq 10^{-9} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

- Potentiel chimique

On peut aussi écrire la loi de Fick en remplaçant la densité de particules  $n(\vec{r}, t)$  par le **potentiel chimique**  $\mu(\vec{r}, t) = \mu(T, n(\vec{r}, t))$  :  $\vec{j}_N = -\alpha\overrightarrow{\text{grad}} \mu(\vec{r}, t)$  où  $\alpha(T, n)$  est le coefficient de transport reliant la densité de flux de particules et le gradient de potentiel chimique (voir ci-dessous). En utilisant  $\overrightarrow{\text{grad}} \mu = \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T \overrightarrow{\text{grad}} n(\vec{r}, t)$ , on a alors la relation suivante entre  $D$  et  $\alpha$  :

$$D = \alpha \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T.$$

Conditions de validité : hypothèses d'ETL ( $\mu(t)$  évolue lentement) et de linéarité ( $\overrightarrow{\text{grad}} \mu$  pas trop grand), température  $T$  uniforme, absence de convection.

### 2.3.3 Conservation du nombre de particules

La **conservation du nombre de particules** en absence de sources ou de puits de particules et si la température est uniforme s'écrit :  $\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_N = 0$ .

### 2.3.4 Coefficients cinétiques et coefficients de transport associés

L'approche générale du transport (voir §1.3.2) donne  $\vec{j}_N = L_{NN} \overrightarrow{\text{grad}}(-\frac{\mu}{T})$  d'où, si la température  $T$  est uniforme,  $\vec{j}_N = -\frac{L_{NN}}{T} \overrightarrow{\text{grad}} \mu$ . On en déduit la relation entre le coefficient cinétique  $L_{NN}$  et le coefficient de transport :  $\alpha = \frac{L_{NN}}{T}$ , et la relation entre  $L_{NN}$  et le coefficient de diffusion :  $D = \frac{L_{NN}}{T} \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T$ .

### 2.3.5 Equation de la diffusion

- Equation de la diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_N = 0 \\ \vec{j}_N = -D \overrightarrow{\text{grad}} n \end{cases} \Rightarrow \text{Equation de la diffusion : } \frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n \text{ où } D \text{ est le coefficient de diffusion } (D > 0).$$

Le temps caractéristique de la diffusion de particules sur une distance  $L$  est  $T_{diff N} = L^2/D$

- Exemples de résolutions de l'équation de la diffusion et applications

- Régime **stationnaire 1D** : profil linéaire  $n(x) = n_0(1 - x/L)$ .
- Régime **transitoire** d'étalement d'une distribution concentrée à  $t=0$  :  $n(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}$ , déplacement du front de diffusion  $\Delta x = \sqrt{2Dt}$ .
- Compétition diffusion/convection, ordres de grandeur pour l'oxygénation du sang

## 2.4 Transport de quantité de mouvement dans un fluide

➤ Quantité transportée : densité volumique de quantité de mouvement  $\vec{p} = \rho \vec{v}$  de la particule fluide, où  $\rho$  est la masse volumique du fluide. On suppose que le fluide est **homogène** : sa masse volumique  $\rho$  et donc sa densité  $n = \rho/m_P$  (où  $m_P$  est la masse d'une particule) ne dépendent pas de la position  $\vec{r}$ . On note  $\vec{P} = \int_V \vec{p} dV = \int_V \rho \vec{v} dV$  la quantité de mouvement totale du volume  $V$  de fluide.

➤ Modes de transport des particules fluides : diffusion et convection.

### 2.4.1 Aspects microscopiques, viscosité

On considère des particules fluides de vitesse moyenne  $v$  et de masse volumique  $\rho$  dans un cylindre de longueur  $2l$  et de section  $\sigma$  ( $l$  est le libre parcours moyen et  $\sigma$  est la section efficace) avec un déséquilibre de vitesse entre les positions  $x - l$  et  $x + l$  de sorte que  $v(x - l) \neq v(x + l)$ .

Le flux de quantité de mouvement par unité de surface **entrant** en  $x - l$  est  $\phi_e = \frac{1}{6} \rho v(x - l) \times v(x - l)$ .

Le flux de quantité de mouvement par unité de surface **sortant** en  $x + l$  est  $\phi_s = \frac{1}{6} \rho v(x + l) \times v(x + l)$ .

- Bilan de quantité de mouvement

Le flux **total** par unité de surface (= densité de flux notée ici  $\phi$ ) est  $\phi = \phi_e - \phi_s = -\frac{1}{3}\rho l v \frac{\partial v}{\partial x}$ , proportionnel au **gradient de vitesse** (= loi de Newton).

- Expression de la viscosité en fonction des paramètres microscopiques

La loi de Newton s'écrit  $\phi = -\eta \frac{\partial v}{\partial x}$  (loi de Newton) et permet d'exprimer la viscosité dynamique en fonction du **libre parcours moyen**  $\eta = \frac{1}{3}\rho l v$ .

- Viscosité dynamique en fonction de la **section efficace** :  $\eta = \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{\rho v}{n\sigma} = \frac{1}{3\sqrt{2}} m \frac{v}{\sigma}$ .
- Viscosité dynamique en fonction du **temps de collision** :  $\eta = nkT\tau_{coll}$ .

- Remarques

- Le modèle des sphères dures et la distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann permettent de montrer que  $\eta \propto \frac{\sqrt{mkT}}{r_P^2}$  pour un gaz.

- Aspects microscopiques pour la diffusion et la viscosité  $\Rightarrow D = \eta/\rho$ .

- **Relation d'Einstein** :  $D = \frac{kT}{6\pi\eta r_P} \Rightarrow \eta \propto \frac{\sqrt{mkT}}{r_P^2}$  (voir §2.3.1).

## 2.4.2 Loi de Newton

- Cas de l'écoulement de Couette plan (cisaillement) en régime permanent

On considère l'écoulement entre le plan  $z = 0$  fixe et le plan  $z = L$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{V} = V_x \vec{e}_x$ . Le fluide est mis en mouvement selon  $\vec{e}_x$  à la vitesse  $\vec{v}_x(z, t) = \vec{v}_x(z) = v_x(z) \vec{e}_x$  en régime permanent.

L'écoulement induit un **flux d'entraînement** des particules dans la direction  $\vec{e}_x$  auquel correspond la densité de flux d'entraînement de particules  $\vec{j}_N = n \vec{v}(\vec{r}, t) = n \vec{v}_x(z) = n v_x(z) \vec{e}_x$ . L'écoulement est de divergence nulle,  $\text{div} \vec{v}_x(z) = 0$ . Puisque le fluide est supposé homogène, la densité  $n$  est uniforme et on a aussi  $\text{div} \vec{j}_N = 0$  puis  $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$  par conservation de la masse.

Au flux de quantité de mouvement correspond une **densité de flux de quantité de mouvement** :  $\vec{j}_{P_x}$  tel que  $d^2 P_x = \vec{j}_{P_x} \cdot d\vec{S} dt$  où  $P_x$  est la composante de la quantité de mouvement  $\vec{P}$  sur  $\vec{e}_x$ . La densité de flux  $\vec{j}_{P_x}$  est donc homogène à une contrainte = force par unité de surface (en Pa) (comme le tenseur des efforts visqueux  $T'_{ij}$ , voir §1.2.1). La composante selon  $z$  de  $\vec{j}_{P_x}$ , notée  $j_{P_x}^z$ , correspond à la **contrainte de cisaillement** c'est-à-dire la force exercée par une couche inférieure de fluide sur une surface donnée de la couche supérieure.

- Loi de Newton

- Cas de l'écoulement de Couette plan (cisaillement) en régime permanent : en régime linéaire, la **loi de Newton** exprime la linéarité entre la contrainte de cisaillement et le gradient de vitesse dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. La composante suivant  $\vec{e}_z$  de  $\vec{j}_{P_x}$  vérifie alors  $j_{P_x}^z = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}$ , où  $\eta$  est le coefficient de **viscosité dynamique** ( $1^{er}$  coefficient de viscosité). Puisque  $\eta > 0$ , le transport de  $P_x$  d'effectue dans le sens des vitesses  $v_x$  décroissantes.

- Cas général : la **loi de Newton** s'écrit comme une relation linéaire entre le tenseur des efforts visqueux  $T'_{ij}$  et les déformations  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  :  $T'_{ij} = -[L] \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  où  $[L]$  est la matrice des **coefficients de viscosité**.

Conditions de validité : hypothèses d'ETL ( $v_x(t)$  évolue lentement) et de linéarité ( $\frac{\partial v_x}{\partial z}$  pas trop grand), température uniforme, absence de convection.

- Dimensions et ordres de grandeur

$[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$  en  $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1} = \text{Pa.s}$  (1 Pa.S=1 Pl (Poiseuille) et 1 Po (Poise) = 0.1 Pl.

Pour des gaz :  $\eta_{N_2} \simeq 2.10^{-5} \text{ Pa.s}$ . La viscosité d'un gaz augmente avec la température.

Pour des liquides :  $\eta_{eau} \simeq 10^{-3} \text{ Pa.s} = 1 \text{ cPo}$ ,  $\eta_{glycérine} \simeq 0.85 \text{ Pa.s}$  à  $25^\circ\text{C}$ . La viscosité d'un liquide diminue avec la température.

### 2.4.3 Conservation de la quantité de mouvement

La loi de **conservation de la quantité de mouvement** s'écrit dans le cas du cisaillement (Couette plan) :  $\frac{\partial p_x}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{P_x} = 0$  où  $p_x$  est la composante de la densité volumique de quantité de mouvement  $\vec{p} = \rho \vec{v}$  sur  $\vec{e}_x$ , soit :  $\frac{\partial p_x}{\partial t} + \frac{\partial j_{P_x}^z}{\partial z} = 0$ .

### 2.4.4 Equation de diffusion de la quantité de mouvement

- Equation de diffusion de la quantité de mouvement

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_x}{\partial t} + \frac{\partial j_{P_x}^z}{\partial z} = 0 \\ j_{P_x}^z = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \end{array} \right. \Rightarrow$  **Equation de la diffusion de la quantité de mouvement** :  $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$ . En généralisant à 3 dimensions, on obtient :  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v}$  où  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  est la **viscosité cinématique** (coefficient de diffusion de la quantité de mouvement).

Le temps caractéristique de diffusion de la quantité de mouvement sur une distance  $L$  est  $T_{diff} \vec{p} = L^2/\nu$ .

- Dimensions et ordres de grandeur

$[\nu] = L^2T^{-1}$  en  $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$

Pour des gaz :  $\nu_{air} \simeq 15.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ .

Pour des liquides :  $\nu_{eau} \simeq 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ .

- Application de la diffusion de la quantité de mouvement : mise en mouvement oscillatoire

On considère une plaque infinie dans le plan horizontal ( $Oxy$ ) et un fluide situé dans le demi-espace  $z > 0$ . La plaque a un mouvement oscillant horizontal. Ce régime **sinusoïdal forcé** induit un mouvement oscillant du fluide :  $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$  et  $v_x(z = 0, t) = v_0 e^{j\omega t} \Rightarrow v_x(z, t) = v_0 e^{j(\omega t - kz)} e^{-z/\delta}$  où  $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$  est l'**épaisseur de peau** ou **profondeur de pénétration** ( $\delta \sim \xi$  où  $\xi$  est l'épaisseur de la **couche limite**) et  $k = 1/\delta$ , analogue à l'**effet de peau thermique** (voir 2.2.5).

### 2.4.5 Equation de Navier-Stokes

- Equation de Navier-Stokes

L'équation de Navier-Stokes s'écrit :  $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v} + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{v})$  où  $p$  est la pression,  $\vec{f} = \rho \vec{F}$  sont les **forces volumiques externes** et  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$  est le **terme convectif**. Le terme convectif permet de définir un temps caractéristique de convection :  $T_{convection} = L/U$  où  $U$  est la vitesse typique de l'écoulement.

- Nombres adimensionnés, régime de Stokes

Avec  $U$  la vitesse caractéristique de l'écoulement et  $L$  une distance caractéristique, et en comparant les différents termes de l'équation de Navier-Stokes, on définit les nombres sans dimension suivants :

➤ Nombre de **Reynolds** :  $Re = \frac{|(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}|}{|\eta \Delta \vec{v}|} = \frac{T_{diff} \vec{p}}{T_{convection}} = \frac{UL}{\nu}$ .

➤ Nombre de **Strouhal** :  $St = \frac{|\frac{d\vec{v}}{dt}|}{|(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}|}$ .

On parlera d'**écoulement de Stokes** si  $Re \ll 1$  (la diffusion de  $\vec{p}$  domine la convection) et si  $N = Re \times St = \frac{|\frac{d\vec{v}}{dt}|}{|\eta \Delta \vec{v}|} \ll 1$  (écoulement stationnaire). L'équation de Navier-Stokes se réduit alors à l'**équation de Stokes** :  $\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p = \nu \Delta \vec{v}$ .

Application : écoulement de Poiseuille et **loi de Poiseuille**. On considère un cylindre de rayon  $r$ , de longueur  $L$ , soumis à une différence de pression  $\Delta P = P_e - P_s$  entre son entrée et sa sortie. Le débit volumique du fluide  $Q_V$  est tel que  $\Delta P = R_h Q_V$  où  $R_h = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$  est la **résistance hydraulique** (analogie avec la loi d'Ohm, perte de charge du fluide par frottements visqueux).

- Notions de turbulence et de couche limite

- Exemple de l'écoulement autour d'un cylindre : à bas nombre de Reynolds  $Re$ , l'écoulement est **laminaire**. Si  $Re$  augmente, l'écoulement reste laminaire dans la **couche limite** autour du cylindre, mais devient **turbulent** au-delà de la couche limite.

- Transport convectif (**convection forcée**) : le nombre de particules de fluide entraînées à la vitesse  $\vec{v}$  par l'écoulement pendant un temps  $dt$  à travers une surface  $dS$  est  $d^2N = \vec{j}_N \cdot dS dt$  avec  $\vec{j}_N = n \vec{v}$  (densité de flux d'entraînement convectif).

## 2.4.6 Couplage avec la chaleur, thermo-convection, applications

- Convection forcée

On rappelle l'expression du temps caractéristique de diffusion de la chaleur :  $T_{diff Q} = \frac{L^2}{D_{Th}}$  où  $D_{Th} = \frac{\kappa}{\rho c_V}$  (voir 2.2.5). On introduit alors deux nombres adimensionnés pour caractériser la convection forcée :

➤ le nombre de **Peclet** qui compare le terme convectif et la diffusion de la chaleur :  $Pe = \frac{T_{diff Q}}{T_{convection}} = \frac{UL}{D_{Th}}$  (si  $Pe \ll 1$  alors la diffusion de la chaleur domine la convection).

➤ le nombre de **Prandtl** qui compare la diffusion de la quantité de mouvement et la diffusion de la chaleur :  $Pr = \frac{T_{diff Q}}{T_{diff \vec{p}}} = \frac{\nu}{D_{Th}}$  (si  $Pr \ll 1$  alors la vitesse de l'écoulement a peu d'effet sur le profil de température).

- Convection naturelle, instabilité convective

On considère un fluide de masse volumique  $\rho$  chauffé par dessous dans le champ de pesanteur. Le fluide monte sous l'effet d'une différence de température  $\Delta T = T(z_1) - T(z_2) > 0$  avec  $z_2 - z_1 = h > 0$ . Le temps caractéristique de montée du fluide  $T_{montée}$  est tel que  $\rho \frac{h}{T_{montée}^2} = \delta \rho g = \alpha \rho \Delta T g$  (par application du PFD sur un volume de fluide) où  $\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$  est le coefficient de dilatation thermique du fluide.

- On introduit le nombre sans dimension suivant pour caractériser la convection naturelle :

➤ nombre de **Rayleigh** :  $Ra = \frac{T_{diff} \vec{p} \times T_{diff} Q}{T_{montée}^2} = \frac{h^3 \alpha \Delta T g}{D_{Th} \nu}$  (si  $Ra \ll 1$  alors les phénomènes diffusifs dominent la convection).

- Exemple : rouleaux de convection stationnaires dans une casserole ( $Ra \gg 1$ ). Les profils de  $T(z)$  et  $v(z)$  sont tels que :

➤ pour  $z < 0$ , il y a conduction dans le solide (métal de la casserole) :  $j_Q^z = -\kappa_{solide} \frac{dT}{dz} \Big|_{z=0^-}$  et  $T(z=0) = T_p$ .

➤ pour  $0 < z < \xi$  avec  $\xi$  l'épaisseur de la **couche limite laminaire**, il y a conduction et convection dans le fluide :  $j_Q^z = -\kappa_{fluide} \frac{dT}{dz} \Big|_{z=0^+} = h(T_p - T_m)$  où  $h = \frac{\kappa_{fluide}}{\xi}$  est le coefficient de transport convectif et  $T(z = \xi) = T_m$ .

➤ pour  $z > \xi$ , l'écoulement est turbulent, le fluide est mélangé et la température est homogène ( $T = T_m$ ).

## 2.5 Transport dans un conducteur, conduction électrique

➤ Quantité transportée : porteurs de charges (ici : électrons)

➤ Modes de transport des charges : diffusion/conduction, entraînement par le champ électrique

### 2.5.1 Aspects microscopiques, conductivité électrique

Le modèle de **Drude** (gaz classique d'électrons) permet d'exprimer la conductivité thermique  $\kappa = \frac{1}{3} C_V v^2 \tau_{coll}$  avec  $v^2 = \frac{3kT}{m}$  et  $C_V = \frac{3}{2} nk$  ( $\kappa = \frac{lnvk}{3}$ , voir 2.2.1).

- Bilan de charges

Le flux **total** de charges par unité de surface (= densité de flux notée ici  $\phi$ ) :  $\phi = \frac{1}{S} \frac{dq}{dt} = (-e)n \frac{dx}{dt}$ , proportionnel à la **vitesse des charges** (= loi d'Ohm).

On définit la densité de courant électrique par  $\vec{j} = -ne \vec{v}$ .

- Expression de la conductivité électrique en fonction des paramètres microscopiques

Le modèle de **Drude** classique donne  $\vec{v} = -\frac{e\tau_{coll}}{m} \vec{E}$ . On en déduit la **loi d'Ohm** :  $\vec{j} = -ne \vec{v} = \sigma \vec{E}$  et l'expression de la **conductivité électrique**  $\sigma = \frac{ne^2 \tau_{coll}}{m}$  en fonction des paramètres microscopiques.

- Loi de Wiedemann-Franz

Les expressions de la conductivité thermique et de la conductivité électrique obtenues par le modèle de Drude permettent de retrouver la **loi de Wiedemann-Franz** :  $\mathcal{L} = \frac{\kappa/T}{\sigma} = \text{cte}$ . La constante  $\mathcal{L}$  appelée constante de Lorentz est indépendante de  $T$ . Remarque : le modèle de Drude classique (donc incorrect) donne  $\mathcal{L} = \frac{3k_B^2}{2e^2} \simeq 1.1 \cdot 10^{-8} W\Omega K^{-2}$  alors que l'approche statistique quantique (correcte) donne  $\mathcal{L} = \frac{\kappa/T}{\sigma} = \frac{\pi^2 k_B^2}{3e^2} \simeq 2.4 \cdot 10^{-8} W\Omega K^{-2}$  (voir 1.2.1).

### 2.5.2 Loi d'Ohm

- Loi d'Ohm locale

La densité de courant électrique est définie par  $\vec{j} = -e \vec{j}_N$  où  $\vec{j}_N$  est la densité de courant de porteurs de charges (électrons), avec  $d^2N = \vec{j}_N \cdot d\vec{S} \cdot dt$  ( $N$  est le nombre d'électrons) et  $d^2q = \vec{j} \cdot d\vec{S} \cdot dt$  ( $q = -eN$  est la charge électrique).

En régime linéaire, la **loi d'Ohm locale** est vérifiée :  $\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V$  où  $\sigma$  est la **conductivité électrique** et  $V$  est le potentiel électrique.

- Potentiel électro-chimique.

La loi d'Ohm peut aussi s'écrire à l'aide du **potentiel électro-chimique**  $\bar{\mu} = \mu(T, n) - eV$ . On a alors :  $\vec{j}_N = -\alpha \overrightarrow{\text{grad}} \bar{\mu}(\vec{r}, t)$ , où  $\alpha(T, n)$  est le coefficient de transport reliant la densité de flux de particules (ici les porteurs de charge)  $\vec{j}_N$  et le gradient de potentiel chimique (ici électrochimique) introduit au § 2.3.2.

Si  $T$  et  $n$  sont uniformes, c'est-à-dire en absence de flux de chaleur et de diffusion des particules, le potentiel chimique  $\mu(T, n)$  est uniforme donc  $\overrightarrow{\text{grad}} \bar{\mu}(\vec{r}, t) = -e \overrightarrow{\text{grad}} V$ . On a alors  $\vec{j} = -e \vec{j}_N = e^2 \alpha \vec{E}$ . On en déduit la relation entre le coefficient de transport  $\alpha$  et la conductivité électrique  $\sigma$  :  $\sigma = e^2 \alpha$ .

Conditions de validité : hypothèses d'ETL ( $\bar{\mu}(t)$  évolue lentement) et de linéarité (le champ  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$  n'est pas trop grand).

### 2.5.3 Conservation de la densité de charge

- Conservation de la charge

L'équation de **conservation de la charge** s'écrit  $\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$  où  $\rho = -en$  est la densité de charge électrique et  $n$  est la densité de porteurs de charges.

- Mobilité électrique

On introduit  $\mu_D$  la **mobilité de dérivation** des électrons telle que  $\vec{v} = \mu_D \vec{E}$ . A partir de  $\vec{j} = -ne \vec{v} = \sigma \vec{E}$ , on en déduit la relation entre la mobilité et la conductivité électrique :  $\sigma = -ne \mu_D$ .

- Relation d'Einstein, relation entre coefficient de diffusion et mobilité

On a vu que  $D = \alpha \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T$  (voir 2.3.2) et, si  $T$  et  $n$  sont uniformes,  $\sigma = e^2 \alpha = -ne \mu_D$ . On en déduit  $D = -\frac{n}{e} \mu_D \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T$ . Pour un gaz parfait classique pour lequel  $\mu(T, n) = \mu_0 + k_B T \ln \frac{n}{n_0}$ , on a :  $D = \frac{kT}{e} \mu_D$  (**relation d'Einstein** : proportionnalité entre le coefficient de diffusion  $D$  et la mobilité  $\mu_D$ ).

### 2.5.4 Coefficients cinétiques et coefficients de transport associés

L'approche générale du transport (voir 1.3.2) donne  $\vec{j}_N = L_{NN} \overrightarrow{\text{grad}} \left( -\frac{\bar{\mu}}{T} \right)$  avec  $\bar{\mu} = \mu(T, n) - eV$  (potentiel électrochimique). Donc, si la température  $T$  et la densité de porteurs de charge  $n$  sont uniformes,  $\vec{j}_N = -\frac{e}{T} L_{NN} \vec{E}$  et  $\vec{j} = \frac{e^2}{T} L_{NN} \vec{E}$ . On en déduit la relation entre la conductivité électrique  $\sigma$  et le coefficient cinétique  $L_{NN}$  :  $\sigma = \frac{e^2}{T} L_{NN}$ .

### 2.5.5 Effets thermoélectriques

Contrairement à ce qui précède où on considérait chaque phénomène de transport indépendamment et on étudiait un seul flux à la fois, on s'intéresse ici au **couplage** entre le transport de charge et le transport de chaleur, c'est-à-dire aux **effets thermoélectriques** dans un conducteur. La température  $T(\vec{r})$  n'est plus forcément uniforme et peut donc dépendre de la position  $\vec{r}$ .

- **Réponse linéaire**

S'il existe un flux d'électrons (courant électrique) et un flux de chaleur dans un conducteur, on a (voir 1.3.2) :

$$\begin{cases} \vec{j}_N = L_{NN} \overrightarrow{\text{grad}} \left(-\frac{\bar{\mu}}{T}\right) + L_{NU} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{T}\right) \\ \vec{j}_U = L_{UN} \overrightarrow{\text{grad}} \left(-\frac{\bar{\mu}}{T}\right) + L_{UU} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{T}\right) \end{cases} \text{ avec } \bar{\mu} = \mu(T(\vec{r})) - eV(\vec{r}) \text{ (potentiel électrochimique)}$$

Les **relations d'Onsager** permettent d'écrire :  $L_{NU} = L_{UN}$ .

Le terme de **source d'entropie** est :  $\sigma_S = \vec{j}_U \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{T} + \vec{j}_N \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(-\frac{\bar{\mu}}{T}\right)$ .

En introduisant le **flux de chaleur**  $\vec{j}_Q^* = T \vec{j}_S = \vec{j}_U - \bar{\mu} \vec{j}_N$  puis en effectuant le changement de variables ( $\vec{j}_N, \vec{j}_U \rightarrow \vec{j}_N, \vec{j}_Q^*$ ), on obtient :

$$\sigma_S = \vec{j}_Q^* \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{T} - \frac{1}{T} \vec{j}_N \cdot \overrightarrow{\text{grad}} (\bar{\mu}) \text{ et } \begin{cases} \vec{j}_N = -L_{11} \frac{1}{T} \overrightarrow{\text{grad}} \bar{\mu} + L_{12} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{T}\right) \\ \vec{j}_Q^* = -L_{21} \frac{1}{T} \overrightarrow{\text{grad}} \bar{\mu} + L_{22} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{T}\right) \end{cases}$$

avec  $L_{12} = L_{21}$  (relations d'Onsager).

- **Conduction électrique isotherme, loi d'Ohm et effet Joule** (effet direct)

Si  $T$  est uniforme, on a  $\vec{j}_N = -L_{11} \frac{1}{T} \overrightarrow{\text{grad}} \bar{\mu}$  avec  $\overrightarrow{\text{grad}} \bar{\mu} = e \vec{E}$  et on retrouve la **loi d'Ohm** :  $\vec{j} = -e \vec{j}_N = \sigma \vec{E}$  avec  $\sigma = \frac{e^2}{T} L_{11}$  où  $\sigma$  est la **conductivité électrique**.

La puissance volumique dissipée par **effet Joule** est  $\left. \frac{dQ_{vol}}{dt} \right|_{Joule} = -\text{div} \vec{j}_U = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\sigma} j^2$  (toujours  $> 0$ ).

La production d'entropie est  $\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = \frac{1}{\sigma T} j^2$ .

- **Conduction thermique en circuit ouvert, loi de Fourier** (effet direct)

En circuit ouvert, le flux de particules est nul,  $\vec{j}_N = \vec{0}$  donc  $\frac{1}{T} \overrightarrow{\text{grad}} \bar{\mu} = \frac{L_{12}}{L_{11}} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{T}\right)$ . En remplaçant  $\frac{1}{T} \overrightarrow{\text{grad}} \bar{\mu}$  dans l'expression de  $\vec{j}_Q^*$ , on retrouve la **loi de Fourier** :  $\vec{j}_Q^* = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}} T$  avec  $\kappa = \frac{1}{T^2} \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}}{L_{11}}$  où  $\kappa$  est la **conductivité thermique**.

- **Effet Seebeck, pouvoir thermoélectrique** (effet croisé ou indirect)

- En circuit ouvert,  $\vec{j}_N = \vec{0}$  et il apparaît un gradient de température et un gradient de potentiel électrochimique tels que  $\frac{1}{-e} \overrightarrow{\text{grad}} \bar{\mu} = -Q \overrightarrow{\text{grad}} T$  où  $Q = \frac{1}{-eT} \frac{L_{12}}{L_{11}}$  est le **coefficient Seebeck** ou **pouvoir thermoélectrique** (en V.K<sup>-1</sup>). Le coefficient Seebeck  $Q$  est non nul si  $L_{12} \neq 0$  : on parle alors d'effet croisé ou d'effet indirect.

- Observation expérimentale de l'**effet Seebeck** : on mesure une différence de potentiel  $\Delta V$  en circuit ouvert aux jonctions de deux conducteurs de pouvoirs thermoélectriques différents  $Q$  et  $Q'$  et de températures différentes  $T_1$  et  $T_2$ . Cette différence de potentiel vaut  $\Delta V = V_2 - V_1 = \int_{T_1}^{T_2} (Q' - Q)dT$ .

- Applications : thermocouples (mesures de température), effet thermoélectrique (production d'électricité).

- Remarque : de manière générale, si  $\vec{j}_N \neq \vec{0}$ , le flux de chaleur  $\vec{j}_Q^*$  peut s'écrire  $\vec{j}_Q^* = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}} T - QeT \vec{j}_N$  (somme d'un terme de conduction thermique et d'un terme de convection lié à l'entraînement des charges). L'entropie transportée par un porteur de charge est  $s_P = -Qe$ .

• **Effet Peltier, coefficient Peltier** (effet croisé ou indirect)

- Si  $T$  est uniforme, le courant électrique  $\vec{j}$  s'accompagne d'un flux de chaleur  $\vec{j}_Q^*$  tel que  $\vec{j}_Q^* = \Pi \vec{j}$  où  $\Pi = \frac{1}{-e} \frac{L_{21}}{L_{11}}$  est le **coefficient Peltier** (en V). Le coefficient Peltier  $\Pi$  est non nul si  $L_{21} \neq 0$  : effet croisé ou indirect.

- Observation expérimentale de l'**effet Peltier** : on observe une absorption ou un dégagement de chaleur à la jonction isotherme de deux conducteurs de coefficients Peltier différents  $\Pi$  et  $\Pi'$ . La puissance échangée avec l'extérieur par effet Peltier est  $\left. \frac{dQ}{dt} \right|_{\text{Peltier}} = (\Pi - \Pi')J$  ( $> 0$  ou  $< 0$  en fonction du sens du courant  $J = S\vec{j}$ ).

- Applications : systèmes réfrigérants.

- Remarque : en conséquence des relations d'Onsager, on a la relation  $\Pi = QT$  entre les coefficients Seebeck et Peltier. C'est la **2<sup>ème</sup> relation de Kelvin**. Les quatre coefficients cinétiques  $L_{ij}$  s'expriment partir de trois coefficients de transport mesurables expérimentalement (par exemple  $\sigma$ ,  $\kappa$  et  $Q$ ).

• **Effet Thomson, coefficient Thomson**

- Si  $T(\vec{r})$  n'est pas uniforme, la température dépend de la position  $\vec{r}$  et il y a échange de chaleur avec l'extérieur. La puissance volumique dégagée à l'extérieur est alors  $\mathcal{P} = \left. \frac{dQ_{vol}}{dt} \right|_{tot} = -\text{div} \vec{j}_U = \left. \frac{dQ_{vol}}{dt} \right|_{conduction} + \left. \frac{dQ_{vol}}{dt} \right|_{Thomson} + \left. \frac{dQ_{vol}}{dt} \right|_{Joule}$  où

- le terme  $\left. \frac{dQ_{vol}}{dt} \right|_{conduction} = \text{div}(\kappa \overrightarrow{\text{grad}} T)$  correspond à la **conduction thermique**,
- le terme  $\left. \frac{dQ_{vol}}{dt} \right|_{Thomson} = -T \frac{\partial Q}{\partial T} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T$  correspond à l'**effet Thomson**,
- le terme  $\left. \frac{dQ_{vol}}{dt} \right|_{Joule} = \frac{1}{\sigma} \vec{j}^2$  correspond à l'**effet Joule** (on a supposé  $\vec{j}_N$  uniforme ici).

- **Effet Thomson** :  $\left. \frac{dQ_{vol}}{dt} \right|_{Thomson} = -\alpha_{Th} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T$  où  $\alpha_{Th} = T \frac{\partial Q}{\partial T}$  est le **coefficient Thomson**. L'effet Thomson  $\left. \frac{dQ_{vol}}{dt} \right|_{Thomson} = -\alpha_{Th} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T$  est linéaire en  $\vec{j}$  et correspond à une absorption ou à un dégagement de chaleur ( $> 0$  ou  $< 0$ ).

- Remarque : La 2<sup>ème</sup> relation de Kelvin  $\Pi = QT$  impose une relation entre les coefficients Seebeck, Peltier et Thomson :  $\alpha_{Th} = \frac{\partial \Pi}{\partial T} - Q$ . C'est la **1<sup>ère</sup> relation de Kelvin**.

## 2.6 Récapitulatif

➤ Tableau des analogies entre phénomènes de transport

## Bibliographie

- Physique statistique – B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet (Hermann 1997)
- Thermodynamique – B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet (Hermann 2007)
- Thermodynamique statistique, Equilibre et hors équilibre - M. Le Bellac, F. Mortessagne (Dunod 2001)
- Fundamentals of statistical and thermal physics - F. Reif (McGraw-Hill 1965)
- Au-delà de l'équilibre - C. Vidal, G. Dewel, P. Borckmans (Hermann 1994)
- Transferts thermiques, Introduction aux transferts d'énergie, 5e édition – J. Taine, F. Enguehard, E. Iacona (Dunod 2014)
- Transferts thermiques – J. Ouin (Casteilla 1998)
- Physique pour les sciences de la vie – A. Bouyssy, M. Davier, B. Gatty (Belin 1987)
- Transport Phenomena – R.B. Bird, W.E. Stewart, E.N. Lightfoot (John Wiley & Sons 1960)
- Hydrodynamique physique – E. Guyon, J-P. Hulin, L. Petit (EDP Sciences 2012)
- Ondes mécaniques et diffusion - C. Garing (Ellipses 1998)
- Dictionnaire de physique expérimentale tome 2 Thermo – L. Quaranta, J.M. Donnini (Pierron 2002)
- Dictionnaire de physique – R. Taillet, L. Villain, P. Fevbre (de Boeck 2018)
- Physique des solides – N.W. Ashcroft, N.D. Mermin (EDP Sciences 2002)
- La physique en applications – R. Carpentier, B. Dépret (Ellipses 2014)
- La physique par la pratique – B. Portelli, J. Barthes (H& K 2005)
- [+ Feynman, L Landau & E Lipschitz]
- + cours de Thierry Hocquet, Luc Mieussens (aspects statistiques), cours de Noëlle Pottier (hors équilibre), cours de Jean Bellissard (hors équilibre), cours de Sophie Mergui, Philippe Marty, Yves Jannot (transferts thermiques), cours de D. Flick (milieux continus), cours de Guillaume Penelet (viscothermie et acoustique)
- Livres de prépa*
- Toute la Thermodynamique et la mécanique des fluides - MPSI-PCSI, MP-PC-PSI – L. Bocquet, J.P. Faroux, J. Renault (Dunod 2002)
- Thermodynamique – M. Bertin, J.P. Faroux, J. Renault (Dunod 1998)
- HPrépa Thermodynamique 2ème Année – Brébec et al. (Hachette 2004)
- Physique Spé – H. Gié, J.P. Sarmant, S. Olivier, C. More (Tec & Doc 2000)
- Thermodynamique – J.P. Pérez (Dunod Masson 2001)
- Thermodynamique PC-PSI – N. Choimet (Bréal 2004)
- Thermodynamique, 1ère et 2ème année – S. Olivier, H. Gié (Tec& Doc Lavoisier 1998)
- Physique 1<sup>ère</sup> année PCSI – P. Grécias, J-P. Migeon (Coll. Référence Prépas Tec& Doc Lavoisier 2009)
- Physique 2<sup>ème</sup> année MP MP\* - PT PT\* – D. Augier, C. More (Coll. Référence Prépas Tec& Doc Lavoisier 2009)
- MP-MP\* , PC-PC\* - M.N. Sanz (Dunod)

1001 questions en prépa Physique – C. Garing (Ellipses 2013,2014)

### *BUPs*

962 - Approche expérimentale de l'équation de diffusion – R. Mathevet (2014)

944 - Diffusion de charge électrique à une dimension – W. Toutain et al. (2012)

929(2) - Un exemple de diffusion en électrocinétique sur une chaîne RC – A. Deiber, F. Paviet-Salomon (2010)

929(2) - Transitoire thermique dans une barre calorifugée – C. Jai, R. Wunenburger (2010)

827 - Lampe à incandescence, corps noir, loi de Stefan et filtre passe-bas thermique – A. Deiber, O. Kemp, GRESEP (2000)

827 – Etude d'une lampe à incandescence – F. Durand (2000)

845 – Marches aléatoires – J. Roussel (2002)

819 – Mesure du coefficient de diffusion du glycérol dans l'eau – ENS Montrouge (1999)

550 – Propriétés électroniques des solides - A. Guinier et al. (1972)

930 – Transport et dessalement de l'eau de mer : aqueduc dessalinisateur solaire à gradient thermique – G. Olive (2011)

899(2) – Transport diffusionnel de l'ion permanganate à travers une pseudo-membrane organique – R.E Eastes, F. Daumarie-Vedrenne (2007)

849 (1) – Cellules électrochimiques : aspects thermodynamiques et cinétiques – D. Devilliers, E. Mahé (2002)

841(2) – Chronoampérométrie et transport de matière par diffusion – F. Maquere, C. Frappart (2002)

797 - Le transfert et le transport d'électron à l'échelle du nanomètre – J.P. Launay, C. Joachim (1997)

793 - Diffusion dans une membrane liquide – M. Burgard, M. Deluzarche (1997)

## **Sujets**

2017 Composition 'Autour de la diffusion'

2013 Problème (électro-osmose)

2011 Problème (propagation dans les métaux)

2010 Composition (convection)

2008 Problème (conduction, effet Hall)

2007 Problème (magnétohydrodynamique, plasmas)

2004 Problème (conducteurs quantiques)

2002 Composition (transport)

## Leçons 2018-2019

- 17. Rayonnement d'équilibre thermique. Corps noir.
- 18. Phénomènes de transport.
- 19. Bilans thermiques : flux conductifs, convectifs et radiatifs.
- 44. Capacités thermiques : description, interprétations microscopiques.
- ? 45. Paramagnétisme, ferromagnétisme : approximation du champ moyen.
- ? 46. Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques.
- 47. Mécanismes de la conduction électrique dans les solides.
- 48. Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique.
- 49. Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités.

## Montages 2018-2019

- 5. Mesure de température.
- ? 17. Métaux.
- ? 18. Matériaux semi-conducteurs.
- ? 19. Effets capacitifs.
- 28. Instabilités et phénomènes non-linéaires.
- 31. Résonance.
- 32. Couplage des oscillateurs.
- 33. Régimes transitoires.
- 34. Phénomènes de transport.

## Sites Internet

<https://cpinettes.u-cergy.fr/S3-Transport.html>

<http://www.agregation-physique.org/>

<http://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/selections.php>

<http://www.physagreg.fr/>

<http://www.physagreg.fr/video.php>

<https://www.ph-suet.fr/agregation/>

Site Labo FAST UPMC : [http://www.fast.u-psud.fr/index\\_en.php](http://www.fast.u-psud.fr/index_en.php)

## Videos et exemples

- Vidéos diffusion, mouvement brownien

<https://www.dailymotion.com/video/x8x1dn>

<https://www.youtube.com/watch?v=qGIDz20hvKs>

<https://www.youtube.com/watch?v=H7QsDs8ZRMI&feature=related>

- Convection

<https://www.youtube.com/watch?v=BVM5WZimH0Y>

[https://www.youtube.com/watch?v=yt\\_K\\_bfKxTc&feature=related](https://www.youtube.com/watch?v=yt_K_bfKxTc&feature=related)

<https://www.youtube.com/watch?v=0BdRaWFR2IM>

<https://www.youtube.com/watch?v=LPvn9qhVFbM&NR=1>

- Dialyse, membranes

<https://www.youtube.com/watch?v=2Th0PuORsWY>

- Chaleur, conduction

<https://www.youtube.com/watch?v=Fw-xwWI06dg&feature=related>

<https://www.youtube.com/watch?v=oWjDnNr5T6A&feature=related>

<https://www.youtube.com/watch?v=pDuJFJB190k>

<https://www.youtube.com/watch?v=V7MacKjb670&feature=related>

<https://www.youtube.com/watch?v=qeDZQ9-gsjY&feature=related>

<http://phymain.unisciel.fr/la-flamme-suspendue/>

<http://phymain.unisciel.fr/leau-est-un-mauvais-conducteur-thermique/>

- Rayonnement

<https://www.youtube.com/watch?v=gNa0zjtGmN8&index=4&list=PL5ni4iEf8Z6WaBn5WgIa03NUOrUDyvtvz>

- Compléments : convection en milieu poreux, magnetoconvection, geodynamo, réaction-diffusion

<https://www.youtube.com/watch?v=saaE9FRiZ5U>

[https://www.youtube.com/watch?v=psxi\\_WZnkYg](https://www.youtube.com/watch?v=psxi_WZnkYg)

<https://www.youtube.com/watch?v=9AVy9weN8Oo>

<https://www.youtube.com/watch?v=O5CXGTqbU8g>

<https://vimeo.com/187117379>

<https://www.youtube.com/watch?v=mr9nIifM0Y0>

<https://www.youtube.com/watch?v=gNGFtNt16Sk>

<https://www.youtube.com/watch?v=SJDcyyY01p4>

<https://www.youtube.com/watch?v=PnOy1fSxBdI>

- Simulations de systèmes d'EDP, turbulence, vorticit 

<https://www.youtube.com/watch?v=AYUvo9kxAr4&list=PLsx0IxD0u9vJh68wkdTgyK8VtSELqdCoq&index=1>

[https://www.youtube.com/watch?v=PUUsQ\\_NgM1w](https://www.youtube.com/watch?v=PUUsQ_NgM1w)

<https://www.youtube.com/watch?v=6rPL-QkUFf8>

<https://www.youtube.com/watch?v=9MAs4yHeZyk>