

Mécanique - Compléments de mécanique du solide

Jean-Baptiste Manneville

Prépa Agreg ENS Paris-Saclay 2021-2022

Table des matières

1 Cinématique	4
1.1 Torseur cinématique	4
1.1.1 Vecteur rotation instantanée	4
1.1.2 Champ des vitesses et torseur cinématique	4
1.1.3 Champ des accélérations	5
1.2 Changement de référentiels, composition des mouvements	5
1.2.1 Dérivation dans R' , formule de Bour-Varignon	5
1.2.2 Composition des rotations	5
1.2.3 Composition des vitesses	6
1.2.4 Composition des accélérations	6
1.2.5 Cas particulier du référentiel barycentrique	6
1.3 Exemples de mouvement du solide	6
1.3.1 Translation	6
1.3.2 Rotation autour d'un axe fixe	6
1.3.3 Rotation autour d'un point fixe	7
1.3.4 Mouvement plan sur plan	8
1.3.5 Mouvement de deux solides en contact, glissement	8
1.4 Applications	8
2 Géométrie des masses	9
2.1 Centre d'inertie	9
2.1.1 Définition et symétries	9
2.1.2 Théorèmes de Guldin	9
2.1.3 Application à la détermination du centre d'inertie, exemples	9
2.2 Moments d'inertie	10
2.2.1 Définitions	10
2.2.2 Cas du moment d'inertie par rapport à un axe	10
2.2.3 Additivité du moment d'inertie	10
2.2.4 Moment d'inertie dans un référentiel lié au solide	10

2.2.5	Théorème de Huygens pour le moment d'inertie	10
2.3	Matrice d'inertie	11
2.3.1	Définition et expression de la matrice d'inertie	11
2.3.2	Propriétés de la matrice d'inertie	12
2.3.3	Théorème de Huygens pour la matrice d'inertie	12
2.3.4	Exemples de calculs de matrices d'inertie	12
3	Torseur cinétique et torseur dynamique du solide	14
3.1	Cinétique	14
3.1.1	Torseur cinétique	14
3.1.2	Moment cinétique en un point du solide	14
3.1.3	Energie cinétique	15
3.2	Dynamique	16
3.2.1	Torseur dynamique	16
3.2.2	Relation entre moment cinétique et moment dynamique	16
3.3	Rotation autour d'un point fixe (toupie/gyroscope)	17
3.3.1	Cinématique	17
3.3.2	Géométrie des masses	17
3.3.3	Dynamique	17
4	Théorèmes généraux de la dynamique des solides	18
4.1	Référentiels galiléens	18
4.1.1	Définitions, rôle des échelles de temps	18
4.1.2	Ordres de grandeur : cas du référentiel de Copernic	18
4.2	Principe fondamental de la dynamique des solides (PFD)	18
4.2.1	Torseur des actions extérieures :	18
4.2.2	Enoncé du PFD des solides :	19
4.3	Théorèmes généraux de la mécanique du solide	19
4.3.1	Théorème de la résultante dynamique	19
4.3.2	Théorème du moment dynamique	19
4.3.3	Solide à l'équilibre	20
4.3.4	Système isolé	20
4.3.5	Cas des forces de pesanteur	20
4.3.6	Cas des actions de contact	20
4.4	Théorème de l'énergie cinétique pour un solide	21
4.4.1	Théorème de l'énergie cinétique	21
4.4.2	Cas des solides en contact ponctuel	21

4.4.3	Cas des forces conservatives	21
4.5	Référentiels non galiléens	22
4.5.1	Composition des accélérations	22
4.5.2	Théorèmes généraux dans un référentiel non galiléen	22
4.5.3	Cas particulier du référentiel barycentrique	22
4.5.4	Exemple : pendule de Foucault	22
4.6	Exemples d'application des théorèmes fondamentaux	23
4.6.1	Exemples de SI	23
4.6.2	Machine d'Atwood	23
4.6.3	Toupie symétrique	23

Chapter 1

Cinématique

- Référentiels et notations

- On note \mathcal{R} le référentiel du laboratoire, $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ le repère associé et X, Y, Z les coordonnées d'un point M dans \mathcal{R} : $\vec{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$.

- On note \mathcal{S} un référentiel lié au solide \mathcal{S} , $(C, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère associé et x, y, z les coordonnées du point M dans \mathcal{S} : $\vec{CM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

- Le solide \mathcal{S} est indéformable : tout point M du solide \mathcal{S} est immobile dans \mathcal{S} et si A et B sont deux points de \mathcal{S} , alors le vecteur \vec{AB} est un vecteur constant (indépendant du temps t).

1.1 Torseur cinématique

1.1.1 Vecteur rotation instantanée

- Définition du vecteur rotation

Pour tout vecteur \vec{u} constant dans \mathcal{S} , il existe un vecteur $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R})$ tel que $\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \vec{u}$.

Le vecteur $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R})$, aussi noté $\vec{\Omega}$, est le **vecteur rotation instantanée** du solide \mathcal{S} par rapport au référentiel \mathcal{R} .

- Remarques

- $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R})$ dépend du temps

- Cas des vecteurs de base du repère $\mathcal{S}(C, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au solide : \vec{i} est fixe dans \mathcal{S} donc $\left. \frac{d\vec{i}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \vec{i}$ (idem pour \vec{j} et \vec{k}).

- Rotation du solide autour de l'axe vertical $\vec{K} = \vec{k}$: on a alors $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \psi \vec{K}$ où ψ est l'angle (\vec{I}, \vec{i}) .

1.1.2 Champ des vitesses et torseur cinématique

- Champ des vitesses

Soient A et B sont deux points fixes dans \mathcal{S} , les vitesses des points A et B par rapport au référentiel \mathcal{R} vérifient : $\vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \vec{AB}$. Cette relation définit le champ des vitesses

comme un torseur de résultante $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R})$ et de moment \vec{v} , appelé **torseur cinématique** ou torseur des vitesses noté $(\vec{v}, \vec{\Omega})$ ou $\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} \\ \vec{v} \end{array} \right\}$.

Cas où A est fixe dans \mathcal{R} : $\vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$.

- Compléments : torseurs, décomposition centrale d'un torseur et éléments de réduction du torseur cinématique

- Soit un champ vectoriel $M \mapsto \vec{m}(M)$. $M \mapsto \vec{m}(M)$ est un **torseur de moment** $\vec{m}(O)$ **en O** et de **résultante** \vec{R} , noté $(\vec{m}(O), \vec{R})$ (ou $\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{m}(O) \end{array} \right\}$) si

$$(1) \vec{m}(M) = \vec{m}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OM}$$

ou

$$(2) M \mapsto \vec{m}(M) \text{ est un } \mathbf{champ \acute{e}quiprojectif} : \forall A, B \vec{m}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{m}(B) \cdot \overrightarrow{AB}$$

(1) et (2) sont équivalents.

- On appelle **glisseur** un torseur de moment nul en un point au moins et de résultante non nulle et **couple** un torseur de moment non nul et de résultante nulle. Tout torseur peut se décomposer comme la somme d'un glisseur et d'un couple (décomposition centrale).

- Dans le cas du torseur cinématique, cette décomposition rend compte du **mouvement hélicoïdal tangent** : à chaque instant t , le mouvement du solide \mathcal{S} peut se décomposer comme un mouvement de rotation autour d'un axe appelé axe instantané de rotation (AIR) et d'une translation parallèlement à l'AIR.

1.1.3 Champ des accélérations

Soient A et B sont deux points fixes dans \mathcal{S} , les accélérations des points A et B par rapport au référentiel \mathcal{R} vérifient : $\vec{a}(B/\mathcal{R}) = \vec{a}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB})$. Cette relation définit le champ des accélérations de \mathcal{S} . Ce champ n'est pas un torseur. En introduisant le point H projeté de B sur l'axe parallèle à $\vec{\Omega}$ et passant par A , le terme $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB})$ s'écrit aussi : $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}) = -\Omega^2 \overrightarrow{HB}$.

1.2 Changement de référentiels, composition des mouvements

On considère un référentiel \mathcal{R}' de repère $(C, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire \mathcal{R} .

1.2.1 Dérivation dans \mathcal{R}' , formule de Bour-Varignon

L'opérateur d/dt dépend du référentiel : $\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{u}$ où $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ est le vecteur rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .

Remarque : $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = -\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}')$

1.2.2 Composition des rotations

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}''/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}''/\mathcal{R}') + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

1.2.3 Composition des vitesses

Soit un point M mobile dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}' .

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(M/\mathcal{R}') + \vec{v}(C/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{CM}$$

ou bien

$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ avec $\vec{v}_a = \vec{v}(M/\mathcal{R})$ la **vitesse absolue**, $\vec{v}_r = \vec{v}(M/\mathcal{R}')$ la **vitesse relative** (nulle si M est fixe dans \mathcal{R}') et $\vec{v}_e = \vec{v}(C/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{CM}$ la **vitesse d'entraînement** (correspond à la vitesse d'un point fictif M' fixe dans \mathcal{R}' qui occupe la position de M à l'instant t , appelé **point coïncidant**).

1.2.4 Composition des accélérations

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{a}(C/\mathcal{R}) + \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{CM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM}) + 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}')$$

ou bien

$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C$ avec $\vec{a}_a = \vec{a}(M/\mathcal{R})$ l'**accélération absolue**, $\vec{a}_r = \vec{a}(M/\mathcal{R}')$ l'**accélération relative**, $\vec{a}_e = \vec{a}(C/\mathcal{R}) + \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{CM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM})$ l'**accélération d'entraînement** et $\vec{a}_C = 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}')$ l'**accélération de Coriolis**.

1.2.5 Cas particulier du référentiel barycentrique

- Dans le cas d'un solide de centre d'inertie (= centre de gravité) G , on définit le **référentiel barycentrique** \mathcal{R}^* comme le référentiel ayant pour origine G et d'axes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ parallèles aux axes $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ du référentiel \mathcal{R} . On a alors $\vec{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et donc \mathcal{R}^* est en translation à la vitesse $\vec{v}(G/\mathcal{R})$ (pas forcément uniforme) par rapport à \mathcal{R} .

- Dans \mathcal{R}^* , la composition des vitesses s'écrit simplement : $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(M/\mathcal{R}^*) + \vec{v}(G/\mathcal{R})$.

- Dans \mathcal{R}^* , la composition des accélérations s'écrit simplement : $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}^*) + \vec{a}(G/\mathcal{R})$.

1.3 Exemples de mouvement du solide

1.3.1 Translation

Pour un mouvement de translation, on a $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{0}$.

1.3.2 Rotation autour d'un axe fixe

- Notations

- On considère un solide \mathcal{S} en rotation autour d'un axe fixe Δ par rapport à un référentiel \mathcal{R} . Si il existe deux points A et B du solide \mathcal{S} (ou du solide 'prolongé') fixes dans $\mathcal{R} \forall t$, alors l'axe Δ coïncide avec la droite (AB) . Les deux points A et B sont alors fixes à la fois dans le référentiel \mathcal{S} lié au solide et dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} .

- On note $\mathcal{R}(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ le référentiel du laboratoire et $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le référentiel lié au solide. O est fixe dans \mathcal{R} et dans \mathcal{S} . L'axe de rotation Δ est vertical : $\Delta = (O, \vec{K}) = (O, Z) = (O, \vec{k}) = (O, z)$. ψ est l'angle (\vec{I}, \vec{i}) : $\psi = (\vec{I}, \vec{i}) = (\vec{OX}, \vec{Ox})$. On considère un point M et

son projeté H sur l'axe vertical Δ . On note (\vec{u}_T, \vec{u}_N) le repère local de Frenet au point M (vecteurs unitaires respectivement normal et parallèle à \overrightarrow{HM}) et $r = HM$ ($\vec{u}_N = -\overrightarrow{HM}/r$ et $d\vec{u}_T/dt = \dot{\psi}\vec{u}_N$).

voir schéma).

- Vecteur rotation

Le vecteur rotation est $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \dot{\psi}\vec{K} = \dot{\psi}\vec{k}$ (noté $\vec{\Omega}$ dans la suite).

- Champ des vitesses

$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \Omega HM \vec{u}_T = r\dot{\psi}\vec{u}_T = v\vec{u}_T$ (le point M décrit un cercle de centre H , de rayon r , dans le plan perpendiculaire à l'axe Δ).

- Champ des accélérations

$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = r\ddot{\psi}\vec{u}_T + r\dot{\psi}^2\vec{u}_N = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{r}\vec{u}_N$

1.3.3 Rotation autour d'un point fixe

- Angles d'Euler (voir schéma)

Le solide \mathcal{S} tourne autour d'un point O fixe dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ et dans le référentiel lié au solide $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On passe du référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ au référentiel $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par trois rotations successives :

- Précession d'angle ψ = rotation autour de $(OZ) = \vec{K} : \mathcal{R}(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}) \rightarrow \mathcal{T}(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{K})$ avec

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos \psi \vec{I} + \sin \psi \vec{J} \\ \vec{v} = -\sin \psi \vec{I} + \cos \psi \vec{J} \end{cases}$$

- Nutation d'angle θ = rotation autour de \vec{u} (ligne des noeuds) : $\mathcal{T}(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{K}) \rightarrow \mathcal{T}'(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{k})$ avec

$$\begin{cases} \vec{w} = \cos \theta \vec{v} + \sin \theta \vec{K} \\ \vec{k} = -\sin \theta \vec{v} + \cos \theta \vec{K} \end{cases}$$

- Rotation propre d'angle φ = rotation autour de $\vec{k} : \mathcal{T}'(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{k}) \rightarrow \mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos \varphi \vec{u} + \sin \varphi \vec{w} \\ \vec{j} = -\sin \varphi \vec{u} + \cos \varphi \vec{w} \end{cases}$$

- Composition des rotations et expression du vecteur rotation

- Le vecteur rotation est $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{T}') + \vec{\Omega}(\mathcal{T}'/\mathcal{T}) + \vec{\Omega}(\mathcal{T}/\mathcal{R}) = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\vec{K}$ (noté $\vec{\Omega}$ dans la suite).

- Expression dans le repère $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au solide \mathcal{S} (indispensable en cinétique pour relier le moment cinétique au vecteur rotation grâce à la matrice d'inertie, cf §2.3.1) : $\vec{\Omega} =$

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{matrix}$$

- Exemples, voir §3.3.

1.3.4 Mouvement plan sur plan

- Définition et notations

Il existe un plan Π lié au solide \mathcal{S} (3 points non alignés de \mathcal{S}) qui reste confondu avec un plan du repère fixe \mathcal{R} au cours du temps. On choisit le repère lié au solide $\mathcal{S}(C, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que l'origine C soit dans le plan Π et tel que les vecteurs de base \vec{i} et \vec{j} restent dans le plan Π au cours du temps (donc $\vec{k} = \vec{K}$ est perpendiculaire au le plan Π , cf schéma). On note θ l'angle entre \vec{I} et \vec{i} : $\theta = (\vec{I}, \vec{i})$.

- Vecteur rotation et champ des vitesses

Pour un mouvement plan sur plan, on a pour tout point M du solide \mathcal{S} : $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(C/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \vec{CM}$ où $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \dot{\theta} \vec{K} = \dot{\theta} \vec{k}$ est perpendiculaire au plan Π .

- Centre instantané de rotation

- Le point d'intersection du plan Π et de l'axe instantané de rotation (AIR = axe central du torseur cinématique, cf. §1.1.2) est noté I et appelé **centre instantané de rotation**.

- Le point I est fixe dans \mathcal{R} : $\vec{v}(I/\mathcal{R}) = \vec{0} \Rightarrow$ pour tout point M du solide, $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \vec{IM}$ et le mouvement instantané (mouvement hélicoïdal tangent) de M est une rotation pure autour du point I .

1.3.5 Mouvement de deux solides en contact, glissement

- Point de contact entre deux solides

A l'instant t , le point de contact I entre deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 est le point fictif coïncidant avec les points matériels $I_{\mathcal{S}_1} \in \mathcal{S}_1$ et $I_{\mathcal{S}_2} \in \mathcal{S}_2$ appartenant respectivement à \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 (et donc suivant les mouvements de \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2). Les trajectoires de I , I_1 et I_2 dans \mathcal{R} sont différentes (exemple de la roue de vélo).

- Glissement et non glissement

- **Vitesse de glissement** de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 : $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{v}(I_{\mathcal{S}_1}/\mathcal{R}) - \vec{v}(I_{\mathcal{S}_2}/\mathcal{R}) = \vec{v}(I_{\mathcal{S}_1}/\mathcal{S}_2) \in \Pi$ plan tangent en I aux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 .

- Condition de **non glissement** à l'instant t : $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{0}$ (remarque : si \mathcal{S}_2 est fixe dans \mathcal{R} : non glissement $\Rightarrow \vec{v}(I_{\mathcal{S}_1}/\mathcal{R}) = \vec{0}$).

- Roulement, pivotement, champ des vitesses

- Vecteur rotation : $\vec{\Omega}(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{\Omega}(\mathcal{S}_1/\mathcal{R}) - \vec{\Omega}(\mathcal{S}_2/\mathcal{R})$. Le vecteur rotation se décompose en une composante normale au plan tangent Π (mouvement de **pivotement**) et une composante tangentielle au plan tangent Π (mouvement de **roulement**) : $\vec{\Omega}(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{\Omega}_n(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) + \vec{\Omega}_t(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)$

- Vitesse d'un point M de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 : $\vec{v}(M \in \mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{v}_g + \vec{\Omega}(\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_1) \wedge \vec{IM}$

1.4 Applications

(0) Le bisseil

(1) Le Clever, véhicule à 3 roues (sujet SI A PT 2013) : questions 1 et 2 (voir aussi §4.6.1)

(2) Le Segway (sujet PSI Centrale 2005) : questions II.B.3) et II.B.4) (voir aussi §4.6.1)

Chapitre 2

Géométrie des masses

2.1 Centre d'inertie

2.1.1 Définition et symétries

- Le centre d'inertie du solide \mathcal{S} de masse volumique ρ et de masse $M(\mathcal{S}) = \int_{M \in \mathcal{S}} \rho d\tau$ est le point G tel que $\int_{M \in \mathcal{S}} \overrightarrow{GM} dm = \int_{M \in \mathcal{S}} \overrightarrow{GM} \rho(M) d\tau = \vec{0}$.

- Position du centre de masse : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M(\mathcal{S})} \int_{M \in \mathcal{S}} \overrightarrow{OM} dm = \frac{1}{M(\mathcal{S})} \int_{M \in \mathcal{S}} \overrightarrow{OM} \rho(M) d\tau$.

- Si le solide \mathcal{S} possède un plan de symétrie, alors G est dans ce plan de symétrie.

Si le solide \mathcal{S} possède deux plans de symétrie, alors G est sur l'intersection de ces deux plans symétrie (axe de symétrie de \mathcal{S}).

Si le solide \mathcal{S} possède trois plans de symétrie, alors G est le point d'intersection de ces trois plans symétrie.

2.1.2 Théorèmes de Guldin

- 1^{er} théorème de Guldin

L'aire S engendrée par rotation d'une courbe plane Γ autour d'un axe (Ox) ne la traversant pas est égale au produit de la longueur de Γ (notée $L(\Gamma)$) et de la circonférence décrite par le centre de gravité G de Γ autour de l'axe (Ox) , soit $S = L(\Gamma) \times 2\pi y_G$, où y_G est la coordonnée de G sur l'axe (Oy) .

On en déduit la position de G sur l'axe (Oy) : $y_G = \frac{S}{2\pi L(\Gamma)}$.

- 2^{ème} théorème de Guldin

Le volume V engendré par rotation d'une surface plane Σ autour d'un axe (Ox) ne la traversant pas est égale au produit de la surface de Σ (notée $S(\Sigma)$) et de la circonférence décrite par le centre de gravité G de Σ autour de l'axe (Ox) , soit $V = S(\Sigma) \times 2\pi y_G$, où y_G est la coordonnée de G sur l'axe (Oy) .

On en déduit la position de G sur l'axe (Oy) : $y_G = \frac{V}{2\pi S(\Sigma)}$.

2.1.3 Application à la détermination du centre d'inertie, exemples

- Demi-cercle de rayon a : $y_G = \frac{2a}{\pi}$
- Demi-disque de rayon a : $y_G = \frac{4a}{3\pi}$
- Surface et volume d'un tore de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e : $S_{tore} = \pi^2(R_e^2 - R_i^2)$ et $V_{tore} = \frac{\pi^2}{4}(R_e - R_i)^2(R_e + R_i)$.

2.2 Moments d'inertie

2.2.1 Définitions

- Moment d'inertie d'un solide \mathcal{S} par rapport à un point O : $I(O) = \int_{M \in \mathcal{S}} OM^2 dm$.
- Moment d'inertie d'un solide \mathcal{S} par rapport à un axe Δ : $I(\Delta) = \int_{M \in \mathcal{S}} HM^2 dm$ où H est la projection de M sur l'axe Δ .
- Moment d'inertie d'un solide \mathcal{S} par rapport à un plan Π : $I(\Pi) = \int_{M \in \mathcal{S}} PM^2 dm$ où P est la projection de M sur le plan Π .
- Dimensions : $[I] = ML^2$.

2.2.2 Cas du moment d'inertie par rapport à un axe

- Expression du moment d'inertie d'un solide \mathcal{S} par rapport à un axe Δ

On peut montrer que $I(\Delta) = \int_{M \in \mathcal{S}} HM^2 dm = \int_{M \in \mathcal{S}} (\vec{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{KM})^2 dm$ où \vec{u}_Δ est le vecteur unitaire de l'axe Δ et K est un point quelconque de l'axe Δ .

- Rayon de giration = rayon \bar{r} de l'anneau fictif centré sur l'axe Δ de même moment d'inertie $I(\Delta)$ par rapport à Δ que le solide \mathcal{S} , donc $I(\Delta) = M(\mathcal{S})\bar{r}^2$.

2.2.3 Additivité du moment d'inertie

Si un solide \mathcal{S} peut être décomposé en deux sous-systèmes \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , alors $I_{\mathcal{S}} = I_{\mathcal{S}_1} + I_{\mathcal{S}_2}$.

2.2.4 Moment d'inertie dans un référentiel lié au solide

- En pratique, on calcule les moments d'inertie $I(O)$ ou $I(\Delta)$ dans le référentiel $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au solide. Dans ce cas, $I(O)$ ou $I(\Delta)$ sont constants (indépendants du temps t) et sont caractéristiques de la répartition des masses du solide \mathcal{S} .

- Dans le référentiel $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au solide, on a les propriétés suivantes :

$$I(Ox) = \int (y^2 + z^2) dm, \quad I(Oy) = \int (x^2 + z^2) dm, \quad \text{et} \quad I(Oz) = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$I(O) = \frac{1}{2} [I(Ox) + I(Oy) + I(Oz)]$$

$$I(Ox) = I(xOz) + I(xOy) \dots$$

- Cas particulier d'un solide bidimensionnel contenu dans le plan $z = 0$: $I(Oz) = I(Ox) + I(Oy)$.

2.2.5 Théorème de Huygens pour le moment d'inertie

- Le moment d'inertie $I(\Delta)$ d'un solide \mathcal{S} par rapport à un axe Δ se calcule à partir du moment d'inertie $I(\Delta_G)$ de \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ_G parallèle à Δ et passant par G , centre de gravité de \mathcal{S} , selon :

$$I(\Delta) = M(\mathcal{S})d^2 + I(\Delta_G) \quad \text{où } d \text{ est la distance entre les axes } \Delta \text{ et } \Delta_G \text{ et } M(\mathcal{S}) \text{ est la masse du solide } \mathcal{S}.$$

- Conséquences :

➤ $I(\Delta)$ est minimal si $d = 0$ donc si l'axe Δ passe par G .

➤ $I(\Delta_1) = I(\Delta_2) + M(\mathcal{S})(d_1^2 - d_2^2)$ où $d_{1,2}$ est la distance entre les axes $\Delta_{1,2}$ et Δ_G .

2.3 Matrice d'inertie

Le but est ici définir la matrice (ou tenseur) d'inertie $[J(O)]$ d'un solide \mathcal{S} en un point O à partir du moment d'inertie de \mathcal{S} par rapport à un axe Δ passant par O , puis d'en montrer les propriétés.

2.3.1 Définition et expression de la matrice d'inertie

- Définition, relation entre le moment d'inertie $I(\Delta)$ du solide \mathcal{S} par rapport à un axe Δ et la matrice d'inertie $[J(O)]$ du solide en un point O

- On se place dans un référentiel $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (O, x, y, z)$. On considère un axe Δ lié au solide et O un point de Δ (donc aussi lié au solide). On note $\vec{u}_\Delta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ le vecteur unitaire de Δ et ses coordonnées dans \mathcal{S} .

- Le moment d'inertie $I(\Delta)$ du solide \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ s'exprime alors comme :

$$I(\Delta) = \int_{M \in \mathcal{S}} (\vec{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM})^2 dm = \vec{u}_\Delta \cdot ([J(O)] \vec{u}_\Delta) = \vec{u}_\Delta^T [J(O)] \vec{u}_\Delta$$

où $[J(O)]$ est la **matrice d'inertie du solide \mathcal{S}** au point O telle que

$$[J(O)] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

où $I_{xx} = \int_{M \in \mathcal{S}} (y^2 + z^2) dm$, $I_{yy} = \int_{M \in \mathcal{S}} (x^2 + z^2) dm$, $I_{zz} = \int_{M \in \mathcal{S}} (x^2 + y^2) dm$,

et $I_{xy} = \int_{M \in \mathcal{S}} xy dm$, $I_{xz} = \int_{M \in \mathcal{S}} xz dm$, $I_{yz} = \int_{M \in \mathcal{S}} yz dm$

- Les quantités I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} sont les **moments d'inertie** par rapport aux axes $\vec{i} = (Ox)$, $\vec{j} = (Oy)$, et $\vec{k} = (Oz)$, respectivement et les quantités I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} sont les **produits d'inertie** par rapport aux plans (O, \vec{i}, \vec{j}) , (O, \vec{i}, \vec{k}) , et (O, \vec{j}, \vec{k}) , respectivement.

- Remarque : $[J(O)]$ est exprimée dans le repère $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au solide donc $[J(O)]$ est caractéristique du solide, indépendante du temps t : $[J(O)] = \text{cte}$.

- Calcul direct de $[J(O)]$ (méthode 1)

On calcule $(\vec{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM})^2 = (\vec{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM}) \cdot (\vec{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM})$ avec les coordonnées de $\vec{u}_\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ et de $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$ en remarquant que $(\vec{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM})$ est linéaire en \vec{u}_Δ et peut être représenté par une matrice 3×3 dépendant de x, y, z .

- Calcul par les propriétés du produit vectoriel (méthode 2), opérateur d'inertie

- On utilise la propriété du produit vectoriel $(\vec{A} \wedge \vec{B})^2 = \vec{A} \cdot ((\vec{B} \wedge \vec{A}) \wedge \vec{B})$ pour montrer que le moment d'inertie $I(\Delta)$ du solide \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ peut s'écrire :

$I(\Delta) = \vec{u}_\Delta \cdot \int_{M \in \mathcal{S}} (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}_\Delta) \wedge \overrightarrow{OM} dm = \vec{u}_\Delta \cdot ([J(O)] \vec{u}_\Delta)$ où l'application linéaire $\vec{u}_\Delta \mapsto \int_{M \in \mathcal{S}} (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}_\Delta) \wedge \overrightarrow{OM} dm$ est appelée **opérateur (ou tenseur, ou matrice) d'inertie** du solide \mathcal{S} au point O et est notée $[J(O)]$ (rappel : O est un point de l'axe Δ et \vec{u}_Δ est le vecteur unitaire de Δ).

- Le calcul de $(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}_\Delta) \wedge \overrightarrow{OM}$ donne ensuite $[J(O)]$.

2.3.2 Propriétés de la matrice d'inertie

- Diagonalisation de $[J(O)]$

- $[J(O)]$ est symétrique réelle donc diagonalisable \Rightarrow il existe une base orthonormée liée au solide appelée **base principale d'inertie du solide \mathcal{S}** , dans laquelle $[J(O)]$ est diagonale. Les trois axes de la base principale d'inertie sont appelés **axes principaux d'inertie (API)**. La base principale d'inertie (aussi appelée base des APIs) sera notée $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

- Dans la base principale d'inertie, la matrice d'inertie s'écrit $[J(O)] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$ où I_1, I_2, I_3

sont les **moments principaux d'inertie**.

- Remarques :

➤ Si l'axe Δ passe par O point d'intersection des APIs, alors $I(\Delta) = \alpha^2 I_1 + \beta^2 I_2 + \gamma^2 I_3$ où \vec{u}_Δ vecteur unitaire de Δ a pour coordonnées (α, β, γ) dans la base principale d'inertie.

➤ Le repère $(G, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ ayant pour origine le centre d'inertie du solide \mathcal{S} est appelé **repère central d'inertie**.

- Elements de symétrie et détermination des axes principaux d'inertie

➤ \mathcal{S} possède **un plan** de symétrie (par exemple (O, \vec{x}, \vec{y})) : tout axe perpendiculaire au plan de symétrie est un API $\Rightarrow (O\vec{z})$ est un API et $I_{xz} = I_{yz} = 0$

➤ \mathcal{S} possède **un axe** de symétrie (par exemple $(O\vec{z})$) : l'axe de symétrie est un API $\Rightarrow I_{xz} = I_{yz} = 0$

➤ \mathcal{S} possède **deux plans** de symétrie (forcément perpendiculaires, deux parmi (O, \vec{x}, \vec{y}) , (O, \vec{x}, \vec{z}) et (O, \vec{y}, \vec{z})) : la matrice d'inertie est diagonale et $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est la base principale d'inertie.

➤ \mathcal{S} possède **deux axes** de symétrie (forcément perpendiculaires, deux parmi (O, \vec{x}) , (O, \vec{y}) et (O, \vec{z})) : la matrice d'inertie est diagonale et $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est la base principale d'inertie.

➤ \mathcal{S} possède une symétrie de **révolution** (par exemple autour de $(O\vec{z})$) : la matrice d'inertie est diagonale dans $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et on a $I_{xx} = I_{yy} = I$ avec $2I = I_{zz}$.

2.3.3 Théorème de Huygens pour la matrice d'inertie

Dans le repère $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au solide, la matrice d'inertie $[J(O)]$ d'un solide \mathcal{S} par rapport à un point O se calcule à partir de la matrice d'inertie $[J(G)]$ de \mathcal{S} par rapport au point G , centre de gravité de \mathcal{S} , selon :

$$[J(O)]_{\mathcal{S}} = [J(G)]_{\mathcal{S}} + M(\mathcal{S}) \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \text{ où } (a, b, c) \text{ sont les coordonnées de } G$$

dans $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (soit $\vec{OG} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$) et $M(\mathcal{S})$ est la masse du solide.

2.3.4 Exemples de calculs de matrices d'inertie

- Cercle homogène de centre O , de rayon R , dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) : $[J(O)] = MR^2 \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Disque homogène de centre O , de rayon R , dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) : $[J(O)] = MR^2 \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$
- Sphère de rayon R de centre O : $[J(O)] = \frac{2}{5}MR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Chapitre 3

Torseur cinétique et torseur dynamique du solide

Voir aussi le chapitre 2 du cours de Mécanique (§2.4 et 2.5)

3.1 Cinétique

3.1.1 Torseur cinétique

- **Quantité de mouvement** du solide \mathcal{S} dans $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ référentiel du laboratoire (fixe)

$\vec{P}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M \in \mathcal{S}} \vec{v}(M/\mathcal{R}) dm = M(\mathcal{S})\vec{v}(G/\mathcal{R})$ où $M(\mathcal{S})$ est la masse du solide.

- **Moment cinétique** (ou moment angulaire) du solide \mathcal{S} en un point A par rapport à $\mathcal{R}(O, x, y, z)$

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M \in \mathcal{S}} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}) dm$$

$\Rightarrow (\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}), \vec{P}(\mathcal{S}/\mathcal{R})) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \\ \vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \end{array} \right\}_A$ est un torseur appelé **torseur des quantités de**

vitesse ou **torseur cinétique** : $\vec{\sigma}_B(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) + \vec{P}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$.

3.1.2 Moment cinétique en un point du solide

- Définition

Si A est un point du solide \mathcal{S} , alors $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AM}$ pour tout point M de \mathcal{S} où $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R})$ (aussi noté plus simplement $\vec{\Omega}$ dans la suite) est le vecteur rotation de \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R} (voir §1.1.2).

Le **moment cinétique du solide \mathcal{S}** en un point A par rapport à $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ s'écrit alors (en faisant intervenir le centre d'inertie G tel que $\int_{M \in \mathcal{S}} \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$) :

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AG} \wedge M(\mathcal{S})\vec{v}(A/\mathcal{R}) + \int_{M \in \mathcal{S}} \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AM}) dm$$

Par définition de la matrice d'inertie de \mathcal{S} au point A dans le référentiel $\mathcal{S}(A, x, y, z)$ lié au solide : $[J(A)]\vec{u} = \int_{M \in \mathcal{S}} (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}) \wedge \overrightarrow{AM} dm$ (voir §2.3.1), on peut aussi écrire :

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AG} \wedge M(\mathcal{S})\vec{v}(A/\mathcal{R}) + [J(A)]\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R})$$

- Remarque sur la base de projection

La matrice d'inertie $[J(A)]$ et le vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R})$ doivent être exprimés dans la **même base** de projection, donc dans le référentiel $\mathcal{S}(A, x, y, z)$ lié au solide.

- Deux cas particuliers importants en pratique

- Cas où $A = G$:

$$\vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = [J(G)] \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}).$$

Si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, axes de $\mathcal{S}(G, x, y, z)$, sont des APIs, alors : $\vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = I_1^G \Omega_x \vec{i} + I_2^G \Omega_y \vec{j} + I_3^G \Omega_z \vec{k}$

- Cas où A est fixe dans \mathcal{R} :

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = [J(A)] \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R})$$

- Rotation autour d'un axe fixe Δ

- Le solide \mathcal{S} est en **rotation autour d'un axe fixe** Δ de vecteur directeur \vec{u}_Δ et passant par O (O est un point fixe du solide). Le vecteur rotation de \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R} est $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \Omega \vec{u}_\Delta$. On a donc : $\vec{\sigma}_O(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = [J(O)] \Omega \vec{u}_\Delta$.

- On appelle le moment cinétique de \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ (noté σ_Δ) la projection de $\vec{\sigma}_O$ sur l'axe Δ , soit : $\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_O \cdot \vec{u}_\Delta$. On a alors la relation suivante entre le moment cinétique de \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ (σ_Δ) et son moment d'inertie par rapport à Δ ($I(\Delta)$) :

$$\sigma_\Delta = I(\Delta)\Omega, \text{ avec } I(\Delta) = \vec{u}_\Delta \cdot ([J(O)] \vec{u}_\Delta) = \vec{u}_\Delta^T [J(O)] \vec{u}_\Delta \text{ (voir §2.3.1).}$$

- Dans la base principale d'inertie (base des APIs, voir §2.3.2), où la matrice d'inertie $[J(O)]$

est diagonale ($[J(O)] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$) et $\vec{u}_\Delta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ dans cette base, on a : $\sigma_\Delta = (\alpha^2 I_1 + \beta^2 I_2 + \gamma^2 I_3)\Omega$.

- Premier théorème de Koenig (= pour le moment cinétique)

- Référentiel barycentrique (voir §1.2.5) : \mathcal{R}^* en translation à la vitesse $\vec{v}(G/\mathcal{R})$ par rapport à \mathcal{R} donc $\vec{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*)$.

- Dans \mathcal{R}^* : $\vec{P}(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*) = M(\mathcal{S}) \vec{v}(G/\mathcal{R}^*) = \vec{0}$ donc le moment cinétique est **indépendant du point** où on le calcule : $\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*) = \vec{\sigma}_B(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*) = \vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*) = \vec{\sigma}^*$.

- Dans \mathcal{R} : au point G , on a $\vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}^*$.

- **Théorème de Koenig** pour le moment cinétique : $\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}^* + M(\mathcal{S}) \vec{v}(G/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{GA} = \vec{\sigma}^* + \vec{P}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{GA}$

3.1.3 Énergie cinétique

- Définition

- L'**énergie cinétique** du solide \mathcal{S} est définie par : $E_C(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \int_{M \in \mathcal{S}} v^2(M/\mathcal{R}) dm$

- En utilisant le champ des vitesses au point A (voir §1.1.2), on peut écrire l'énergie cinétique de \mathcal{S} comme

$$E_C(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \vec{P}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \cdot \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \cdot \vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R})$$

Remarque : énergie cinétique = moitié du produit (ou **comoment**) du torseur des vitesses

(torseur cinématique) et du torseur cinétique, $E_C(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \left(\vec{v}, \vec{\Omega} \right) \odot \left(\vec{\sigma}, \vec{P} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega} \\ \vec{v} \end{matrix} \right\} \odot \left\{ \begin{matrix} \vec{P} \\ \vec{\sigma} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} M(\mathcal{S}) v^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}$

- Expression de l'énergie cinétique à l'aide de la **matrice d'inertie** : $E_C(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}M(\mathcal{S})v^2(A/\mathcal{R}) + \frac{1}{2}M(\mathcal{S})\vec{v}(A/\mathcal{R}) \cdot (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AG}) + \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot [J(A)]\vec{\Omega}$

- Deux cas particuliers importants en pratique

- Cas où $A = G$:

$$E_C(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}M(\mathcal{S})v^2(G/\mathcal{R}) + \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}),$$

avec $\frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = I_1^G\Omega_x^2 + I_2^G\Omega_y^2 + I_3^G\Omega_z^2$ dans la base principale d'inertie.

- Cas où A est fixe dans \mathcal{R} :

$$E_C(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot [J(A)]\vec{\Omega},$$

soit $E_C(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = I_1'\Omega_x^2 + I_2'\Omega_y^2 + I_3'\Omega_z^2$ dans la base principale d'inertie.

- Deuxième théorème de Koenig (= pour l'énergie cinétique)

Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique : $E_C(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = E_c^* + \frac{1}{2}M(\mathcal{S})v^2(G/\mathcal{R})$ où $E_c^* = E_C(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*)$ est l'énergie cinétique dans le référentiel barycentrique

3.2 Dynamique

3.2.1 Torseur dynamique

- Résultante dynamique du solide \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R}

$$\vec{Q}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M \in \mathcal{S}} \vec{a}(M/\mathcal{R}) dm = M(\mathcal{S})\vec{a}(G/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{P}(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt}$$

- Moment dynamique du solide \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R} au point A

$$\vec{D}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M \in \mathcal{S}} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}(M/\mathcal{R}) dm$$

$\Rightarrow \left(\vec{D}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}), \vec{Q}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \right) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{Q}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \\ \vec{D}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \end{array} \right\}_A$ est un torseur appelé **torseur des quantités**

d'accélération ou **torseur dynamique** : $\vec{D}_B(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{D}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) + \vec{Q}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$.

3.2.2 Relation entre moment cinétique et moment dynamique

- Relation entre dérivée temporelle du moment cinétique et moment dynamique

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} = \vec{D}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) + M(\mathcal{S})\vec{v}(G/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{D}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) + \vec{P}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(A/\mathcal{R})$$

- Deux cas particuliers importants en pratique

- Cas où $A = G$:

$$\frac{d\vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} = \vec{D}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}).$$

- Cas où A est fixe dans \mathcal{R} :

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} = \vec{D}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R})$$

- Troisième théorème de Koenig (= pour le moment dynamique)

- Dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , le moment dynamique **est indépendant** du point : $\forall A, \vec{D}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*) = \vec{D}_B(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*) = \vec{D}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*) = \vec{D}^*$

- Dans \mathcal{R} : au point G , on a $\vec{D}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{D}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*) = \vec{D}^*$.

- **Théorème de Koenig** pour le moment dynamique : en A , point du solide \mathcal{S} , $\vec{D}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{D}^* + \vec{Q}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{GA}$ avec $\vec{Q}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = M(\mathcal{S})\vec{a}(G/\mathcal{R})$.

3.3 Rotation autour d'un point fixe (toupie/gyroscope)

3.3.1 Cinématique

- Rappels sur les angles d'Euler (voir §1.3.3)

- On passe du référentiel du laboratoire $\mathcal{R}(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ au référentiel lié au solide $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par trois rotations successives :

$\mathcal{R}(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}) \rightarrow \mathcal{T}(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{K})$ par rotation d'angle ψ (précession) autour de \vec{K}

$\mathcal{T}(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{K}) \rightarrow \mathcal{T}'(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{k})$ par rotation d'angle θ (nutation) autour de \vec{u}

$\mathcal{T}'(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{k}) \rightarrow \mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par rotation d'angle φ (rotation propre) autour de \vec{k}

- Le vecteur rotation du solide par rapport à \mathcal{R} est : $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{k} + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\psi} \vec{K}$

- Dans la base des angles d'Euler $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au solide \mathcal{S} , le vecteur rotation s'écrit :

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{matrix}$$

3.3.2 Géométrie des masses

- On considère un solide \mathcal{S} de révolution autour de (Oz) (toupie symétrique). Dans le repère $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'axes (Ox) , (Oy) et (Oz) , lié au solide, les plans (xOz) et (yOz) sont plans de symétrie et l'axe (Oz) est un axe de symétrie de révolution donc (Ox) , (Oy) et (Oz) sont les APIs et la matrice d'inertie en O est diagonale dans $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et s'écrit (voir §2.3.2) :

$$[J(O)] = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}.$$

- Remarque : $[J(O)]$ et $\vec{\Omega}$ sont bien exprimés dans la même base liée au solide $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3.3.3 Dynamique

- Expression du moment dynamique

O est fixe dans \mathcal{R} donc, le moment dynamique du solide \mathcal{S} en O s'écrit : $\vec{D}_O(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{\sigma}_O(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt}$ avec $\vec{\sigma}_O(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = [J(O)] \vec{\Omega}$.

- Expression de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique de \mathcal{S} s'écrit : $E_C(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_O(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot [J(O)] \vec{\Omega}$.

Le calcul donne : $E_C(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{I}{2} (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_{zz}}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2$.

Chapitre 4

Théorèmes généraux de la dynamique des solides

4.1 Référentiels galiléens

4.1.1 Définitions, rôle des échelles de temps

- Un **référentiel galiléen** est un référentiel dans lequel les lois de la mécanique classique (lois de Newton) sont valables. Deux référentiels galiléens sont en **translation rectiligne uniforme** l'un par rapport à l'autre.

- Il existe uniquement des **approximations** de référentiels galiléens pour lesquels l'accélération et les forces d'inertie sont faibles, en fonction de l'**échelle de temps** considérée. Le référentiel terrestre (resp. géocentrique, resp. de Copernic) peut être considéré comme galiléen pour des expériences de durée de l'ordre de la minute (resp. journée, resp. année).

4.1.2 Ordres de grandeur : cas du référentiel de Copernic

- Les étoiles 'lointaines, fixes' du référentiel de Copernic suivent en fait le mouvement d'expansion de l'Univers, donc l'échelle de temps sur laquelle se fait une expérience dans ce référentiel considéré comme galiléen doit donc être inférieure à celle du temps caractéristique d'expansion de l'Univers donné par H_0^{-1} où H_0 est la constante de Hubble (de sorte que le déplacement Δd de l'étoile 'lointaine' pendant un temps Δt soit faible devant la distance d entre la Terre et l'étoile). On a $\Delta d = v\Delta t$ où $v = H_0 d$ est la vitesse d'éloignement de l'étoile 'lointaine' donc $\frac{\Delta d}{d} = H_0 \Delta t$.

- Ordre de grandeur de $\frac{\Delta d}{d}$: si on prend $\Delta t = 1000$ ans et $H_0 = 7410^3 \text{m.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1} \simeq 25 \cdot 10^{-19} \text{s}^{-1}$ (où $1 \text{Mpc} = 3.26 \cdot 10^6 \text{a.l.}$), on trouve $\frac{\Delta d}{d} = 10^{-7}$, soit un déplacement de l'étoile 'lointaine' négligeable.

4.2 Principe fondamental de la dynamique des solides (PFD)

4.2.1 Torseur des actions extérieures :

- Forces et moments

- **Force** \vec{F}_{ext} extérieure (forces ponctuelles $\vec{F}_{ext} = \sum_{P_i \in \mathcal{S}} \vec{F}_{ext}(P_i)$ ou volumiques $\vec{F} = \int_{P \in \mathcal{S}} \vec{f}_{ext}(P) d\tau$)

- **Moment** \vec{M}_A^{ext} au point A :

forces ponctuelles $\vec{M}_A^{ext} = \sum_{P_i \in S} \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_{ext}(P_i)$

forces volumiques $\vec{M}_A^{ext} = \int_{P \in S} (\vec{AP} \wedge \vec{f}_{ext}(P)) d\tau$

$\Rightarrow (\vec{M}_A^{ext}, \vec{F}_{ext})$ est un torseur appelé **torseur des actions extérieures** (ou torseur d'effort,

aussi noté $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{ext} \\ \vec{M}_A^{ext} \end{array} \right\}$: $\vec{M}_B^{ext} = \vec{M}_A^{ext} + \vec{F}_{ext} \wedge \vec{AB}$.

• Cas particuliers

$\vec{M}_A^{ext} \cdot \vec{F}_{ext} = 0$: force unique si $(\vec{M}_A^{ext} = 0, \vec{F}_{ext})$; couple si $(\vec{M}_A^{ext}, \vec{F}_{ext} = 0)$.

4.2.2 Enoncé du PFD des solides :

- Dans un **référentiel galiléen**, le torseur dynamique est égal au torseur des actions extérieures :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{Q}(S/\mathcal{R}) \\ \vec{D}_A(S/\mathcal{R}) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{ext} \\ \vec{M}_A^{ext} \end{array} \right\}$$

- Remarques :

➤ En fonction de la définition du système, une action peut être **extérieure ou intérieure**.

➤ Principe d'**action/réaction** : $\vec{F}_{int} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \vec{0}$ et $\vec{M}_A^{int} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{M}_A^{ji} = \vec{0}$ (valable uniquement en mécanique classique où les interactions se propagent instantanément).

4.3 Théorèmes généraux de la mécanique du solide

4.3.1 Théorème de la résultante dynamique

Dans un référentiel **galiléen** \mathcal{R} , on a pour le solide \mathcal{S} de masse $M(\mathcal{S})$ et de quantité de mouvement $\vec{P}(S/\mathcal{R})$: $\vec{Q}(S/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{P}(S/\mathcal{R})}{dt} = M(\mathcal{S})\vec{a}(G/\mathcal{R}) = \vec{F}_{ext}$ (caractérise le mouvement de translation du centre d'inertie G).

4.3.2 Théorème du moment dynamique

Dans un référentiel **galiléen** \mathcal{R} , on a, en un point A : $\vec{D}_A(S/\mathcal{R}) = \vec{M}_A^{ext}$ donc $\frac{d\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})}{dt} = \vec{M}_A^{ext} + \vec{P}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{M}_A^{ext} + M(\mathcal{S})\vec{v}(G/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(A/\mathcal{R})$

• Deux cas particuliers importants en pratique

- Cas où $A = G$:

$$\frac{d\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R})}{dt} = \vec{M}_G^{ext}$$

(caractérise le mouvement de rotation du solide, donc son mouvement dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^*).

- Cas où A est fixe dans \mathcal{R} :

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})}{dt} = \vec{M}_A^{ext}$$

4.3.3 Solide à l'équilibre

- Un solide \mathcal{S} est à l'équilibre dans un référentiel \mathcal{R} à un temps t donné, si pour tout point A du solide \mathcal{S} , le torseur **cinématique** est nul, soit : $\vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{0}$.

- \mathcal{S} reste à l'équilibre $\forall t$ si le torseur **dynamique** est nul, soit : $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\vec{M}_A^{ext} = \vec{0}$.

4.3.4 Système isolé

Pour un système isolé, $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\vec{M}_G^{ext} = \vec{0} \Rightarrow$ **conservation** de la quantité de mouvement $\vec{P}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{c}t\vec{e}$ et du moment cinétique en G $\vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{c}t\vec{e}$.

4.3.5 Cas des forces de pesanteur

- La force de pesanteur est une force répartie telle que $d\vec{f}_P = \vec{g}(M)\rho(M)d\tau$.

- Si $\vec{g}(M) = \vec{g}$ est uniforme, alors on a $\vec{F}_P = \int_{\mathcal{S}} d\vec{f}_P = M(\mathcal{S})\vec{g}$ et $\vec{M}_A^P = \vec{AG} \wedge M(\mathcal{S})\vec{g}$, ce qui permet d'identifier le **centre d'inertie** G défini par $\int_{\mathcal{S}} \vec{GM} dm = \vec{0}$ avec le **centre de gravité** défini comme le point d'application de la résultante des forces de pesanteur de sorte que $\vec{M}_A^P = \vec{AG} \wedge \vec{F}_P$.

4.3.6 Cas des actions de contact

Voir aussi le cours de Mécanique §2.6.2 pour l'origine microscopique des forces de frottement et §2.6.3 pour les lois du frottement solide d'Amontons-Coulomb.

On considère le contact (supposé ponctuel) de deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 . On note, à l'instant t , I le point de contact entre les deux solides et Π le plan tangent aux deux solides en I (voir §1.3.5). Les actions de contact au point I sont caractérisées par la force de réaction $\vec{R}_{2/1} = -\vec{R}_{1/2} = \vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$ qui se décompose en réaction normale \vec{R}_N et réaction tangentielle (frottement) \vec{R}_T . Le moment de la force \vec{R} en I est nul : $\vec{M}_I \vec{R} = \vec{0}$.

- Glissement ('slip') : la vitesse de glissement est non nulle $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) \neq \vec{0}$ et on a alors $\|\vec{R}_T\| = \mu_d \|\vec{R}_N\|$ où μ_d est le coefficient de frottement dynamique (indépendant de la vitesse de glissement \vec{v}_g).
- Adhérence (non glissement, 'stick') : la vitesse de glissement est nulle $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{0}$ et on a alors $\|\vec{R}_T\| < \mu_s \|\vec{R}_N\|$ où μ_s est le coefficient de frottement statique ($\mu_s > \mu_d$).
- Remarques

➤ Hypothèse avec/sans glissement à vérifier *a posteriori*.

➤ Sans glissement n'implique pas $\|\vec{R}_T\| = 0$.

➤ Théorème du moment cinétique en I point de contact : on a $\vec{M}_I \vec{R} = \vec{0}$ donc seul le moment des forces extérieures autres que les forces de contact contribue et $\frac{d\vec{\sigma}_I(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} = \vec{M}_I^{ext} + M(\mathcal{S})\vec{v}(G/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(I/\mathcal{R})$

➤ Cas d'un contact non ponctuel : il existe des moments de résistance au roulement \vec{M}_{roul} et de résistance au pivotement \vec{M}_{piv} .

4.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

4.4.1 Théorème de l'énergie cinétique

- Sous sa forme 'puissance', le théorème de l'énergie cinétique s'écrit pour un solide \mathcal{S} soumis aux actions extérieures \vec{F}_{ext} et \vec{M}_G^{ext} :

$$\mathcal{P} = \frac{dE_c}{dt} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}(G/\mathcal{R}) + \vec{M}_G^{ext} \cdot \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}).$$

- Remarques :

➤ Force pure ($\vec{M}_G^{ext} = \vec{0}$) : $\mathcal{P} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}(G/\mathcal{R})$; moment pur ($\vec{F}_{ext} = \vec{0}$) : $\mathcal{P} = \vec{M}_G^{ext} \cdot \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R})$.

➤ Puissance = produit (ou **comoment**) du torseur des vitesses (torseur cinématique) et du torseur des actions extérieures : $\mathcal{P} = (\vec{v}_G, \vec{\Omega}) \odot (\vec{M}_G^{ext}, \vec{F}_{ext}) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} \\ \vec{v}_G \end{array} \right\} \odot \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{ext} \\ \vec{M}_G^{ext} \end{array} \right\} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_G + \vec{M}_G^{ext} \cdot \vec{\Omega}$. La puissance \mathcal{P} ne dépend pas du point où on la calcule.

➤ En pratique, on calcule la puissance de toutes les forces extérieures comme la somme des puissances de chaque force individuelle calculée en son point d'application (où le moment est nul).

4.4.2 Cas des solides en contact ponctuel

On considère deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 en contact (supposé ponctuel) au point I .

- Puissance des actions de contact

- La puissance des actions de contact exercée sur \mathcal{S}_1 est donnée par : $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_1} = \frac{\delta W(\mathcal{S}_1)}{dt} = \vec{R}_{2/1} \cdot \vec{v}(I_1/\mathcal{R})$ (idem pour \mathcal{S}_2 : $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_2} = \frac{\delta W(\mathcal{S}_2)}{dt} = \vec{R}_{1/2} \cdot \vec{v}(I_2/\mathcal{R})$)

- La puissance des actions de contact exercée sur le système $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}$ est donnée par : $\mathcal{P} = \frac{\delta W(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2)}{dt} = \vec{R}_{2/1} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) < 0$

- Cas où la puissance est nulle

- Il y a deux cas où la puissance des actions de contact est nulle : si il n'y a **pas de frottement** ($R_{T2/1} = 0$) ou si il y a **roulement sans glissement** ($v_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = 0$).

- Remarque : contact non ponctuel, $\vec{M}_I^{\vec{R}} \neq \vec{0}$ (frottements de roulement et de pivotement) $\Rightarrow \mathcal{P} = \frac{\delta W(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2)}{dt} = \vec{R}_{2/1} \cdot \vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) + \vec{M}_I^{\vec{R}_{2/1}} \cdot \vec{\Omega}(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)$ où $\vec{\Omega}(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)$ est la vitesse angulaire relative entre les deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 .

4.4.3 Cas des forces conservatives

Voir aussi le cours de Mécanique §2.5.3.

- Si toutes les forces dérivent d'une énergie potentielle U telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U$, alors l'énergie mécanique totale $E_m (= \text{Hamiltonien } \mathcal{H})$ est **conservée** : $E_m = E_c + U = \text{cte}$.

- L'énergie mécanique est conservée ($E_m = E_c + U = \text{cte}$) si le système est **isolé** ($\vec{F}_{ext} = \vec{0}$) ou si le système est **conservatif** ($W_{F_{liaison}} = 0$).

4.5 Référentiels non galiléens

On considère un référentiel \mathcal{R}' de repère $(C, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (coordonnées d'un point M notées x, y, z) en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire \mathcal{R} de repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ supposé galiléen (coordonnées d'un point M notées X, Y, Z).

4.5.1 Composition des accélérations

Voir §1.2.4

$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{a}(C/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{CM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM}) + 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}')$
 ou bien $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C$ avec $\vec{a}_a = \vec{a}(M/\mathcal{R})$ l'**accélération absolue**, $\vec{a}_r = \vec{a}(M/\mathcal{R}')$ l'**accélération relative**, $\vec{a}_e = \vec{a}(C/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{CM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM})$ l'**accélération d'entraînement** et $\vec{a}_C = 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}')$ l'**accélération de Coriolis**.

Remarque : si $\vec{a}(C/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et si $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0}$ alors \mathcal{R}' est en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} ; \mathcal{R}' est donc aussi galiléen et $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}')$.

4.5.2 Théorèmes généraux dans un référentiel non galiléen

Dans le référentiel non galiléen \mathcal{R}' , il faut ajouter les forces et moments d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

- Théorème de la résultante dynamique dans \mathcal{R}'

$\vec{Q}(\mathcal{S}/\mathcal{R}') = \left. \frac{d\vec{P}(\mathcal{S}/\mathcal{R}')}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_C$ où $\vec{F}_e = - \int_{\mathcal{S}} dm \vec{a}_e(M)$ est la force d'entraînement et $\vec{F}_C = - \int_{\mathcal{S}} dm \vec{a}_C(M)$ est la force de Coriolis.

- Théorème du moment dynamique dans \mathcal{R}'

En un point A fixe dans \mathcal{R}' : $\vec{D}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}') = \left. \frac{d\vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}')}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \vec{M}_A^{ext} + \vec{M}_A^e + \vec{M}_A^C$ où \vec{M}_A^e et \vec{M}_A^C sont respectivement les moments associés aux forces d'entraînement et de Coriolis.

4.5.3 Cas particulier du référentiel barycentrique

Si le référentiel non galiléen \mathcal{R}' est le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , alors la force de Coriolis est nulle ($\vec{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}) = \vec{0}$) et le moment associé aux forces d'entraînement est nul ($\vec{M}_G^e = \vec{0}$). On a donc : $\left. \frac{d\vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*)}{dt} \right|_{\mathcal{R}^*} = \vec{M}_G^{ext}$.

4.5.4 Exemple : pendule de Foucault

Résolution en complexes : $\eta(t) = x(t) + iy(t)$ où $M(x, y)$ est la position du pendule de Foucault dans le plan horizontal. La coordonnée $\eta(t)$ vérifie l'équation différentielle : $\ddot{\eta} + 2i\Omega_z \dot{\eta} + \omega_0^2 \eta = 0$ avec $\omega_0^2 = g/l$ et $\Omega_z = \Omega \cos \theta$ où Ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre et θ est la colatitude du point où se trouve le pendule. Avec les conditions initiales $x(t=0) = A$, $y(t=0) = 0$, $\dot{x}(t=0) = 0$, $\dot{y}(t=0) = 0$, on trouve : $\eta(t) = Ae^{-i\Omega_z t} \cos \omega_0 t$.

4.6 Exemples d'application des théorèmes fondamentaux

4.6.1 Exemples de SI

- (1) Le Clever, véhicule à 3 roues (sujet SI A PT 2013) : questions 3 à 12. Voir §1.4
- (2) Le Segway (sujet PSI Centrale 2005) : voir correction et §1.4

4.6.2 Machine d'Atwood

Schéma, trois façons d'obtenir l'équation du mouvement $\ddot{z} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + J/a^2} g$:

- Mécanique newtonienne : PFD ou théorème de l'énergie cinétique
- Formalisme lagrangien : équations de Lagrange ou multiplicateurs de Lagrange
- Formalisme hamiltonien

4.6.3 Toupie symétrique

- Mécanique newtonienne, voir §1.3.3,3.3
- Formalisme lagrangien, voir cours 'Mécanique' §3.2.5
- Formalisme Hamiltonien, voir cours 'Mécanique' §3.3.4