

# Mécanique

Jean-Baptiste Manneville

Prépa Agreg ENS Paris-Saclay 2021-2022

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels de mécanique newtonienne</b>	<b>5</b>
1.1	Systèmes et référentiels . . . . .	5
1.1.1	Espace/temps, référentiels et repères . . . . .	5
1.1.2	Système et actions . . . . .	5
1.2	Lois de Newton, principe fondamental de la dynamique (PFD) . . . . .	5
1.2.1	Lois de Newton . . . . .	5
1.2.2	Remarques, conditions d'application des lois de Newton . . . . .	6
1.3	Lois de conservation, principes fondamentaux, intégrales premières du mouvement	6
1.3.1	Quantité de mouvement . . . . .	6
1.3.2	Moment cinétique . . . . .	7
1.3.3	Energie . . . . .	7
1.4	Mouvement à un degré de liberté . . . . .	8
1.4.1	Profils d'énergie potentielle . . . . .	8
1.4.2	Stabilité de l'équilibre . . . . .	8
1.4.3	Solution du mouvement . . . . .	8
1.4.4	Exemples, applications . . . . .	8
1.5	Forces centrales . . . . .	9
1.5.1	Définition et propriétés . . . . .	9
1.5.2	Théorème de Bertrand . . . . .	9
1.5.3	Problème à deux corps . . . . .	9
1.6	Mécanique dans les référentiels non galiléens (non inertiels) . . . . .	9
1.6.1	Référentiels accélérés non tournants . . . . .	10
1.6.2	Forces de marée . . . . .	10
1.6.3	Référentiels tournants . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Mécanique du solide</b>	<b>11</b>
2.1	Généralités . . . . .	11
2.1.1	Repérage d'un solide indéformable . . . . .	11
2.1.2	Centre d'inertie et moment d'inertie . . . . .	11

2.1.3	Champs et tenseurs . . . . .	12
2.2	Cinématique du solide . . . . .	12
2.2.1	Vecteur rotation . . . . .	12
2.2.2	Champ des vitesses . . . . .	13
2.2.3	Champ des accélérations . . . . .	13
2.2.4	Composition des mouvements . . . . .	13
2.3	Actions sur un solide : forces et couples . . . . .	13
2.3.1	Torseur des forces extérieures . . . . .	13
2.3.2	Actions de contact entre solides . . . . .	14
2.4	Cinétique du solide . . . . .	14
2.4.1	Torseur cinétique (torseur des quantités de vitesse) . . . . .	14
2.4.2	Mouvement dans le référentiel barycentrique . . . . .	15
2.4.3	Rotation autour d'un point ou d'un axe . . . . .	15
2.5	Dynamique du solide, théorèmes généraux, principe fondamental (TRD) . . . . .	16
2.5.1	Torseur 'dynamique' (torseur des quantités d'accélération) . . . . .	16
2.5.2	Théorèmes de la résultante dynamique et du moment dynamique . . . . .	16
2.5.3	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	17
2.6	Frottements, actions de contact . . . . .	18
2.6.1	Forces et couples de frottements . . . . .	18
2.6.2	Origine microscopique du frottement solide . . . . .	18
2.6.3	Lois du frottement solide d'Amontons-Coulomb . . . . .	19
2.7	Solide en rotation . . . . .	20
2.7.1	Rotation autour d'un axe fixe . . . . .	20
2.7.2	Rotation autour d'un point fixe . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Mécanique analytique</b> . . . . .	<b>22</b>
3.1	Calcul variationnel . . . . .	22
3.1.1	Exemples . . . . .	22
3.1.2	Système à une fonction . . . . .	22
3.1.3	Système à deux fonctions . . . . .	22
3.1.4	Equations de Lagrange . . . . .	23
3.2	Mécanique lagrangienne . . . . .	23
3.2.1	Système sans contrainte <sup>3</sup> . . . . .	23
3.2.2	Systèmes contraints, holonomes ou non holonomes . . . . .	24
3.2.3	Equations de Lagrange pour un système contraint holonome . . . . .	24
3.2.4	Equations de Lagrange pour un système contraint non holonome, multiplicateurs de Lagrange . . . . .	25

3.2.5	Exemples d'utilisation des équations de Lagrange . . . . .	25
3.3	Mécanique hamiltonienne . . . . .	25
3.3.1	Symétries et invariances, grandeurs conservées . . . . .	26
3.3.2	Hamiltonien et transformation de Legendre . . . . .	26
3.3.3	Crochet de Poisson . . . . .	27
3.3.4	Exemples d'utilisation du formalisme hamiltonien . . . . .	27
3.3.5	Avantages du formalisme hamiltonien . . . . .	28
3.3.6	Orbites dans l'espace des phases, théorème de Liouville . . . . .	28
3.3.7	Compléments . . . . .	29

# Introduction

Prérequis : mécanique du point, lois de Newton, changement de référentiel, composition vitesses/accélérations...

Historique rapide :

Mécanique classique (échelle spatiale  $\gg$  tailles des particules,  $v \ll c$ ) = 3 formulations

- Galilée (1564-1642) + Newton (1642-1727)
- Lagrange (1736-1813)
- Hamilton (1805-1865)

Mécanique relativiste (  $v \sim c$  ) (1905-1915)

Mécanique quantique (échelle spatiale  $\sim$  taille des particules) (1905-1925)

Plus récemment : théorie du chaos, applications de la mécanique aux milieux granulaires, aux systèmes/fluides complexes, en biologie...

# Chapter 1

## Rappels de mécanique newtonienne

### 1.1 Systèmes et référentiels

#### 1.1.1 Espace/temps, référentiels et repères

- Espace (3D) = référentiel + repère + système de coordonnées
- **Référentiel** = système de  $N \geq 4$  points fixes non coplanaires par rapport auquel on étudie le mouvement (exemples : référentiel terrestre, référentiel géocentrique, référentiel héliocentrique ou de Kepler ou de Copernic, référentiel lié à un solide indéformable, référentiel barycentrique) + repère de temps
- **Repère** = origine + 3 vecteurs qui peuvent dépendre du temps :  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (O, \vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$  (pas forcément orthonormé)
- Système de **coordonnées** = cartésiennes  $(x, y, z)$  cylindriques  $(r, \theta, z)$ , sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ , angles d'Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$ 
  - Temps = **absolu** en mécanique classique, paramètre unique et universel
  - Référentiel **galiléen** (ou **inertiel**) = référentiel dans lequel la 1ère loi de Newton (loi d'inertie) est vérifiée («un système isolé est en translation uniforme»)

#### 1.1.2 Système et actions

- **Systèmes** étudiés en mécanique classique :
  - 'Point matériel' = modèle, masse ponctuelle
  - Systèmes de points
  - Répartition/densités de masse : linéique ( $dm = \lambda(l) dl$ ), surfacique ( $dm = \sigma(S) dS$ ), volumique ( $dm = \rho(\tau) d\tau$ ), systèmes fermés ou ouverts
  - Solide indéformables
    - **Actions** exercées sur le système : forces intérieures/extérieures, forces à distance/de contact

### 1.2 Lois de Newton, principe fondamental de la dynamique (PFD)

#### 1.2.1 Lois de Newton

- **1<sup>ère</sup> loi de Newton** = loi d'inertie, définit les référentiels galiléens (=inertiels) :

Pour un système isolé,  $\sum_{syst} \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = cte$  («un système isolé est en translation uniforme»)

- **2<sup>ème</sup> loi de Newton** = Théorème de la résultante dynamique (TRD) = Principe fondamental de la dynamique (PFD) :

Dans un référentiel galiléen :  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{syst} \vec{F}$  où  $\vec{p} = m\vec{v}$  est la quantité de mouvement (impulsion).

Si le système est fermé,  $m = cte$ ,  $\sum_{syst} \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$  où  $\vec{a}$  est l'accélération.

Référentiel non galiléen : ajouter force d'entraînement et force de Coriolis.

- **3<sup>ème</sup> loi de Newton** = action/réaction :  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$

## 1.2.2 Remarques, conditions d'application des lois de Newton

- 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> lois de Newton définissent le modèle classique de la mécanique, elles sont valides dans les référentiels galiléens.
- Equivalence entre 3<sup>ème</sup> loi de Newton et conservation de la quantité de mouvement pour un **système de points** isolé :

3<sup>ème</sup> loi de Newton  $\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{syst} \vec{F} = \sum \vec{F}_{ext} + \sum \vec{F}_{int} = \sum \vec{F}_{ext}$  car les forces intérieures s'annulent deux à deux. Si  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$  (système isolé), alors la 3<sup>ème</sup> loi de Newton implique la conservation de la quantité de mouvement (réciproque vraie, donc la 3<sup>ème</sup> loi de Newton est équivalente à la conservation de la quantité de mouvement).

- **Cas des ondes électromagnétiques :**

- La partie magnétique de la force de Lorentz (force de Laplace)  $\vec{F}_{magn} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$  n'obéit pas à la 3<sup>ème</sup> loi de Newton (schéma exemple)  $\Rightarrow$  non conservation de la quantité de mouvement (l'onde électromagnétique possède une impulsion).

$$- \left\| \vec{F}_{elec} \right\| = \left\| q\vec{E} \right\| = q \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2} \text{ et } \left\| \vec{F}_{magn} \right\| = \left\| q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \right\| = \left\| q\vec{v} \wedge \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q}{r^3} (\vec{v} \wedge \vec{r}) \right) \right\| = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q^2 v^2}{r^2}$$

d'où  $F_{magn}/F_{elec} \sim v^2/c^2$  : les forces magnétiques sont négligeables si  $v \ll c$  (cas de la mécanique classique).

## 1.3 Lois de conservation, principes fondamentaux, intégrales premières du mouvement

### 1.3.1 Quantité de mouvement

- Définition de la **quantité de mouvement** (ou impulsion): pour un point matériel  $\vec{p} = m\vec{v}$  ; pour un système de points  $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ .
- **Conservation** de la quantité de mouvement : pour un système isolé,  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}$  est conservée.
- Exemples et ordres de grandeur :
  - recul d'un fusil (vidéo)
  - fusée (système ouvert)
  - collisions élastiques et inélastiques, transfert de quantité de mouvement : pendule de Newton (vidéo), marteau/clou, chocs...

### 1.3.2 Moment cinétique

- Définition du **moment cinétique** : pour un point matériel M de masse  $m$ , le moment cinétique de M par rapport au point O ('en O') est  $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$  (aussi noté  $\vec{L}_O$ ).
- Dimensions : moment cinétique en mécanique  $[\sigma_O] = ML^2T^{-1}$ , moment cinétique orbital en mécanique quantique  $[L_z] = [n\hbar] = ML^2T^{-1}$
- Cas du mouvement de rotation autour d'un axe  $\Delta = (O, \vec{e}_z)$  passant par O, en coordonnées cylindriques :  $\vec{\sigma}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$ 
  - **Théorème du moment cinétique** : 2<sup>ème</sup> loi de Newton (PFD)  $\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_{ext,O}$  où  $\vec{M}_{ext,O} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$  est le moment par rapport au point O ('en O') de la résultante des forces extérieures.
  - **Conservation** du moment cinétique : pour un système isolé  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_O$  est conservé.
  - Exemples et ordres de grandeur :
    - pulsar milliseconde
    - pendule simple
    - forces centrales, conservation du moment cinétique  $\vec{L}$
    - tabouret inertiel (vidéo), chat retombant sur ses pattes (vidéo), plongeon (vidéo), danse/patinage

### 1.3.3 Energie

- Définition de l'**énergie cinétique**  $T = E_c$  (notation lagrangienne) : pour un point matériel M de masse  $m$ ,  $T = \frac{1}{2}mv^2$  (système de points  $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$ )
- **Théorème de l'énergie cinétique** : 2<sup>ème</sup> loi de Newton, dans un référentiel galiléen  $\Rightarrow$
- Forme différentielle (travail élémentaire) :  $dT = \sum \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = \delta W_{ext}$ .
- Forme variationnelle (travail) :  $\Delta T_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 = \int_1^2 \sum \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = W_{ext 1 \rightarrow 2}$  où  $W_{ext 1 \rightarrow 2}$  est le **travail** des forces extérieures..
- Forme puissance :  $\frac{dT}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} = \mathcal{P}_{ext}$  où  $\mathcal{P}_{ext}$  est la **puissance** des forces extérieures.
  - **Energie potentielle et forces conservatives** : les forces conservatives 'dérivent d'une énergie potentielle', deux conditions définissent une force conservative :
    - (1) La force ne dépend que de la position  $\vec{F}(\vec{r}, t, \vec{v}, \dots) = \vec{F}(\vec{r})$
    - (2) Le travail de la force entre deux points est indépendant du chemin suivi
      - $\Rightarrow$  il existe  $U(\vec{r})$  énergie potentielle telle que  $U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = -\int_{r_0}^r \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -W_{Fr_0 \rightarrow r}$ 
        - où  $W_F$  est le **travail** de la force  $\vec{F}$ .
      - $\Rightarrow$  il existe  $U(\vec{r})$  énergie potentielle telle que  $\vec{F} = -\overrightarrow{grad} U(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$  ( $\vec{F}$  dérive d'une énergie potentielle).
    - $\Rightarrow$  l'énergie totale (= énergie mécanique ou hamiltonien) est conservée au cours du temps  $E = E_m = H = T + U = cte$  (indépendante du temps),  $\Delta E = E(t_2) - E(t_1) = 0$
- ou, de façon équivalente,
  - (2) Le rotationnel de la force  $\vec{F}$  est nul :  $\overrightarrow{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ .
    - Exemples de forces conservatives : force centrale en  $-1/r^2$  (voir § 1.5), force élastique en  $-kr$ , force électrostatique, force de pesanteur, force centrifuge.

- **Forces non conservatives** : forces de frottements, forces de viscosité, forces de Laplace/Lorentz, forces de déformation au cours d'un choc inélastique
- **Energie totale et conservation de l'énergie** :
  - Forme différentielle :  $\frac{dE}{dt} = \mathcal{P}_{non\ conserv}$  ou bien  $dE = \mathcal{P}_{non\ conserv} dt$ , où  $\mathcal{P}_{non\ conserv}$  est la **puissance** des forces non conservatives.
  - Forme variationnelle :  $\Delta E = E(t_2) - E(t_1) = W_{non\ conserv}$  où  $W_{non\ conserv}$  est le **travail** des forces non conservatives.
  - Même si l'énergie est conservée, les forces ne sont pas nécessairement toutes conservatives.
    - Exemples, applications :
      - systèmes de deux particules : forces intérieures (forces d'interaction)  $\vec{F}_{int}$  conservatives (dérivent d'une énergie potentielle d'interaction  $U_{int}$ ) + particules éloignées  $\Rightarrow$  conservation de l'énergie cinétique (collision élastique)
      - saut à la perche (vidéo)

## 1.4 Mouvement à un degré de liberté

Notion de **degré de liberté** (ddl) : en mécanique du point, 3 ddl (coordonnées  $(x, y, z)$ ,  $(r, \theta, z)$ , etc.); en mécanique du solide, 6 ddl (coordonnées du centre de gravité correspondant à 3 translations par rapport à une origine + 3 rotations autour d'axes fixes).

Ici on considère le cas particulier du mouvement à 1 ddl (noté  $q$ ) et d'une force conservative dérivant d'une énergie potentielle  $U \Rightarrow$  l'énergie potentielle  $U(q)$  ne dépend que de  $q$ .

### 1.4.1 Profils d'énergie potentielle

**Profil d'énergie potentielle** = tracé de  $U(q)$ .

La conservation de l'énergie totale (hamiltonien)  $H = T + U = cte$  avec  $T \geq 0$  permet de définir **états liés** et **états libres** et **positions d'équilibre** du système (extrema de  $U(q)$ ).

### 1.4.2 Stabilité de l'équilibre

Equilibre **stable** en  $q = q_{eq}$  si  $U(q_{eq})$  est minimale ( $\frac{dU}{dq} = 0$  et  $\frac{d^2U}{dq^2} > 0$ ).

Equilibre **instable** en  $q = q_{eq}$  si  $U(q_{eq})$  est maximale ( $\frac{dU}{dq} = 0$  et  $\frac{d^2U}{dq^2} < 0$ ).

### 1.4.3 Solution du mouvement

Equation du mouvement de la particule de masse  $m$  dans le profil d'énergie potentielle  $U(q)$  :

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_0}^q \frac{dq'}{\sqrt{H - U(q')}}.$$

### 1.4.4 Exemples, applications

- Pendule simple
- Force centrale (voir §1.5), énergie potentielle efficace
- Masse ponctuelle liée à un ressort
- Régulateur à boules (=machine de Watt), exemple de bifurcation (voir Cours de Physique Non Linéaire)
- Corps liés et systèmes contraints (plus facile en formulation lagrangienne)

## 1.5 Forces centrales

### 1.5.1 Définition et propriétés

Force centrale :  $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{e}_r$

Exemples : force de Coulomb, gravitation

Propriété : force centrale conservative ( $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{e}_r = -\vec{\nabla}U(r)$ )  $\iff$  force centrale à symétrie sphérique ( $\vec{F}(r) = f(r) \vec{e}_r$ )

### 1.5.2 Théorème de Bertrand

Si  $f(r) = \frac{1}{r^n}$  alors les trajectoires seront **fermées** seulement si  $n = -1$  (loi de Hooke) ou si  $n = -2$  (force en  $1/r$ , Coulomb ou gravitation)

### 1.5.3 Problème à deux corps

A priori, 6 ddl mais se ramène à 1 ddl et intégrable (contrairement au problème à trois corps).

#### • Réduction du problème à deux corps

- Hypothèses : système isolé, masses  $m_1$  et  $m_2$ , positions  $M_1(\vec{r}_1)$  et  $M_2(\vec{r}_2)$ , force  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{F}$

- Problème équivalent à une particule de masse  $M = m_1 + m_2$  située au centre de masse G (en translation uniforme) et une particule de masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  (**masse réduite**) située en  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  (galiléen) et soumise à  $\vec{F}$ .

$\Rightarrow$  3 ddl

• Cas d'une force centrale  $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{e}_r$

- Conservation du **moment cinétique**  $L$  (intégrale première)

$\Rightarrow$  2 ddl

• Cas d'une force centrale et conservative,  $F(r)$  conservative dérive de l'énergie potentielle  $U(r)$

- Energie potentielle effective  $U_{eff}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$ , barrière centrifuge

- Conservation de l'**énergie totale** (intégrale première)

$\Rightarrow$  1 ddl

- Lois de Kepler, états liés et états libres, orbites de Kepler

## 1.6 Mécanique dans les référentiels non galiléens (non inertiels)

Cf. Mécanique du solide (chp. 2) et cours 'Compléments de Mécanique du Solide'

**Référentiel non galiléen (ou non inertiels)** = référentiel qui n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport un référentiel galiléen (translation non uniforme et/ou rotation)

Vecteur rotation

Formule de Bour/Varignon (dérivée par rapport au temps)

Composition des vitesses et des accélérations

PDF, théorème du moment cinétique, théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen

### 1.6.1 Référentiels accélérés non tournants

- Référentiel en accélération  $A$  par rapport à un référentiel galiléen: PFD = ajouter la force d'inertie  $-mA$
- Exemples et applications : effets d'une accélération sur la gravité, pendule, microgravité

### 1.6.2 Forces de marée

- Marées = effet différentiel
- Cas des satellites : limite de Roche

### 1.6.3 Référentiels tournants

- PFD dans un référentiel tournant = ajouter **force de Coriolis** et **force centrifuge**
- Exemples : déviation vers l'Est, courants atmosphériques et météo, pendule de Foucault (vidéo)

## Chapter 2

# Mécanique du solide

## 2.1 Généralités

### 2.1.1 Repérage d'un solide indéformable

- Solide **indéformable** = la distance entre deux points du solide reste constante au cours du temps.
- Repérage d'un solide : **6 degrés de liberté** (3 ddl pour la position du centre de masse, 3 ddl pour l'orientation)
- **Angles d'Euler** (schéma) et notations :

- Repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  lié au référentiel  $\mathcal{R}$  et système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$

- Trois changements de repères successifs qui définissent les angles d'Euler  $\psi, \theta$  et  $\varphi$  :

**précession**  $\psi$  = rotation autour de  $\vec{e}_z$ , vecteur rotation  $\dot{\psi}\vec{e}_z$ , définit un nouveau repère  $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_z)$

**nutation**  $\theta$  = rotation autour de  $\vec{u}$  (ligne des nœuds), vecteur rotation  $\dot{\theta}\vec{u}$ , définit un nouveau repère  $(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{e}_z)$

**giration ou rotation propre**  $\varphi$  = rotation autour de  $\vec{e}'_z$ , vecteur rotation  $\dot{\varphi}\vec{e}'_z$ , définit un nouveau repère (vecteurs non orthogonaux, dépendent du temps)  $(O, \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$  lié au solide  $\mathcal{S}$  (référentiel  $\mathcal{R}_s$ )

- Blocage de Cardan  $\theta = 0$  (contrainte),  $\varphi$  et  $\psi$  sont équivalents  $\Rightarrow$  un ddl en moins

### 2.1.2 Centre d'inertie et moment d'inertie

On considère un solide  $\mathcal{S}$  de masse volumique  $\rho(r)$  et de masse  $M = \int_{P \in \mathcal{S}} \rho(P) d\tau$  (pour un solide homogène,  $\rho(P) = \rho = \text{cte}$ ).

- **Centre de gravité/centre d'inertie/centre de masse**

- Position du centre de masse :  $\vec{OG} = \frac{1}{M} \int_{P \in \mathcal{S}} \rho(P) \vec{OP} d\tau$

- **Théorème de Guldin** : détermination de la position du centre de masse

➤ d'une courbe de longueur  $l$  dans le plan  $(O, x, y)$  : la courbe  $l$  génère une surface  $S_x$  (resp.  $S_y$ ) par rotation autour de  $(O, x)$  (resp.  $(O, y)$ ) et la position du centre de masse  $(x_G, y_G)$  est donnée par  $x_G = \frac{S_y}{2\pi l}$ ,  $y_G = \frac{S_x}{2\pi l}$ .

➤ d'une surface  $S$  dans le plan  $(O, x, y)$  : la surface  $S$  génère un volume  $V_x$  (resp.  $V_y$ ) par rotation autour de  $(O, x)$  (resp.  $(O, y)$ ) et la position du centre de masse  $(x_G, y_G)$  est donnée par  $x_G = \frac{V_y}{2\pi S}$ ,  $y_G = \frac{V_x}{2\pi S}$ .

• **Moment d'inertie**

- Moment d'inertie par rapport à un point  $O$  :  $J_o = \int_{P \in \mathcal{S}} \rho(P) OP^2 d\tau$
- Moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$  :  $J_\Delta = \int_{P \in \mathcal{S}} \rho(P) d(\Delta, P)^2 d\tau$
- Dimensions :  $[J] = ML^2$

- **Théorème de Huygens** :

➤ Moment d'inertie par rapport à un point  $O$  :  $J_o = J_G + MOG^2$  où  $J_G$  est le moment d'inertie du solide par rapport au centre de masse

➤ Moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$  :  $J_\Delta = J_{\Delta_G} + Ma^2$  où  $J_{\Delta_G}$  est le moment d'inertie rapport à un axe  $\Delta_G$  passant par  $G$  et parallèle à  $\Delta$  et  $a = d(\Delta, G)$  est la distance entre l'axe  $\Delta$  et l'axe  $\Delta_G$ .

- Rayon de giration :  $R_g^2 = J_G/M$

### 2.1.3 Champs et torseurs

• Définitions

Soit un champ vectoriel  $M \mapsto \vec{m}(M)$ ,  $M \mapsto \vec{m}(M)$  est un **torseur** de **moment**  $\vec{m}(O)$  en  $O$  et de **résultante**  $\vec{R}$ , noté  $(\vec{m}(O), \vec{R})$  (ou  $\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{m}(O) \end{array} \right\}$ ) si

$$(1) \vec{m}(M) = \vec{m}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OM}$$

ou

$$(2) M \mapsto \vec{m}(M) \text{ est un champ équijectif : } \forall A, B \vec{m}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{m}(B) \cdot \overrightarrow{AB}$$

(1) et (2) sont équivalents.

• Cas particuliers

Couple : si  $\vec{R} = \vec{0}$ .

Glisseur : si il existe un point  $O$  tel que  $\vec{m}(O) = \vec{0}$ .

## 2.2 Cinématique du solide

### 2.2.1 Vecteur rotation

Référentiel  $\mathcal{R}_s$  lié au solide de repère  $(O, \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$ , et référentiel  $\mathcal{R}$  (de référence) de repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

• Vecteur rotation

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}), \text{ avec les angles d'Euler : } \vec{\Omega} = \dot{\psi} \vec{e}'_z + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{e}'_z$$

• Formule de Bour/Varignon

- L'opérateur  $d/dt$  dépend du référentiel :  $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_s} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}$

- Cas particulier vecteurs de base du repère un nouveau repère  $(O, \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$  lié au solide

$$\left. \frac{d\vec{e}'_i}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}) \wedge \vec{e}'_i.$$

### 2.2.2 Champ des vitesses

- Champ des vitesses

Soient  $O$  et  $M$  deux points du solide indéformable  $\mathcal{S}$  ( $OM^2 = cte$ ), fixes dans  $\mathcal{R}_S$  :

$\Rightarrow (\vec{v}_O, \vec{\Omega})$  est un **torseur** (torseur des vitesses ou torseur cinématique, aussi noté  $\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} \\ \vec{v}_O \end{array} \right\}$ )

$$: \vec{v}(M, t)|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(O, t)|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}$$

Si  $O$  est fixe dans  $R$  :  $\vec{v}(M, t)|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}$

- Cas particuliers

$\vec{v}_O \cdot \vec{\Omega} = 0$  : translation instantanée si  $\vec{\Omega} = \vec{0}$ , rotation pure instantanée si  $\vec{v}_O = \vec{0}$ , rotation propre si  $\vec{v}_O \perp \vec{\Omega}$

$\vec{v}_O \cdot \vec{\Omega} \neq 0$  : vissage instantané

### 2.2.3 Champ des accélérations

- Champ des accélérations

$$\vec{a}(M, t)|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(O, t)|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}) \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$\vec{a}(M, t)$  n'est pas un torseur.

### 2.2.4 Composition des mouvements

Référentiel  $\mathcal{R}'$  (d'origine  $O'$ ) mobile par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  (d'origine  $O$ ), vecteur rotation :  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$

- Composition des vitesses

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(M/\mathcal{R}') + \left[ \vec{v}(O'/\mathcal{R}') + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \right]$$

Vitesse absolue = vitesse relative + vitesse d'entraînement

- Vitesse d'entraînement = vitesse du **point coïncidant** à  $M$  fixe dans  $\mathcal{R}'$

- Remarque : si  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_S$ ,  $O = O'$  et  $M$  fixes dans  $\mathcal{R}_S$ , on retrouve  $\vec{v}(M, t)|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}$

- Composition des accélérations

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \left[ \vec{a}(O'/\mathcal{R}') + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} \right] + \left[ 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}') \right]$$

Accélération absolue = accélération relative + accélération d'entraînement + accélération de Coriolis

## 2.3 Actions sur un solide : forces et couples

### 2.3.1 Torseur des forces extérieures

- Forces et moments

- **Force**  $\vec{F}$  extérieure (forces ponctuelles  $\vec{F}_{ext} = \sum_{P_i \in S} \vec{F}_{ext}(P_i)$  ou volumiques  $\vec{F} = \int_{P \in S} \vec{f}_{ext}(P) d\tau$ )

- **Moment**  $\vec{M}_O$  au point O :

forces ponctuelles  $\vec{M}_{Oext} = \sum_{P_i \in S} \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_{ext}(P_i)$

forces volumiques  $\vec{M}_{Oext} = \int_{P \in S} (\vec{OP} \wedge \vec{f}_{ext}(P)) d\tau$

$\Rightarrow (\vec{M}_{Aext}, \vec{F}_{ext})$  est un torseur appelé **torseur des forces extérieures** (ou torseur d'effort,

aussi noté  $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{ext} \\ \vec{M}_{Aext} \end{array} \right\}$  :  $\vec{M}_{Aext} = \vec{M}_{Oext} + \vec{F}_{ext} \wedge \vec{OA}$ .

- Cas particuliers

$\vec{M}_{Aext} \cdot \vec{F}_{ext} = 0$  : force unique si  $(\vec{M}_{Aext} = 0, \vec{F}_{ext})$  ; couple si  $(\vec{M}_{Aext}, \vec{F}_{ext} = 0)$ .

### 2.3.2 Actions de contact entre solides

- **Contacts** entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$

- Différents types de mouvements relatifs (schéma) = glissement, pivotement  $\vec{\Omega}_n$ , roulement  $\vec{\Omega}_t$ , mouvement plan sur plan

- Vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{S_2/S_1} = \vec{\Omega}_{S_2/R} - \vec{\Omega}_{S_1/R} = \vec{\Omega}_t + \vec{\Omega}_n$

- **Point de contact**

- Plan tangent  $\mathcal{P}$

- Notion de point de contact  $I$  et point coïncidant  $I^* = I(t)$

- **Vitesse de glissement** :  $\vec{u}(t) = \vec{v}(I \in S_2/R) - \vec{v}(I \in S_1/R) \in \mathcal{P}$

Cas particulier où le référentiel  $\mathcal{R}$  est lié au solide  $S_1$  (noté  $\mathcal{R}_{S_1}$ ) : la vitesse de glissement est  $\vec{u}(t) = \vec{v}(I \in S_2/\mathcal{R}_{S_1})$  et la vitesse d'un point  $M$  de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  est  $\vec{v}(M \in S_2/\mathcal{R}_{S_1}) = \vec{u} + \vec{\Omega}_{S_2/S_1} \wedge \vec{IM}$

- Condition de **non glissement** :  $\vec{u}(t) = \vec{0}$

Cas où le solide  $S_1$  est fixe dans  $\mathcal{R}$  : non glissement  $\Rightarrow \vec{v}(I \in S_2/\mathcal{R}_{S_1}) = \vec{0}$

→ exemple : roulement sans glissement d'un cylindre sur un plan

- Actions de contact et **degrés de liberté**

- Le contact implique une contrainte et donc une diminution du nombre de ddl (cf. systèmes contraints en mécanique lagrangienne au chp. 3 et §2.6 et 2.7)

liaison unilatérale = 1 ddl en moins

liaison bilatérale = 2 ddl en moins

- Réaction et couple de frottement (cf. §2.6).

## 2.4 Cinétique du solide

### 2.4.1 Torseur cinétique (torseur des quantités de vitesse)

- **Quantité de mouvement** du solide dans  $\mathcal{R}$

$\vec{p}(t) = \int_{P \in S} \rho(P) \vec{v}(P, t) d\tau = M \vec{v}_G$

- **Moment cinétique** (ou moment angulaire) en  $A$

$$\vec{\sigma}_A(t) = \int_{P \in \mathcal{S}} \overrightarrow{AP} \wedge \rho(P) \vec{v}(P, t) d\tau$$

$\Rightarrow (\vec{\sigma}_A(t), \vec{p}(t))$  est un torseur appelé **torseur des quantités de vitesse** (ou torseur cinétique, aussi noté  $\left\{ \begin{array}{c} \vec{p}(t) \\ \vec{\sigma}_A(t) \end{array} \right\}$ ) :  $\vec{\sigma}_A(t)|_{\mathcal{R}} = \vec{\sigma}_O(t)|_{\mathcal{R}} + \vec{p} \wedge \overrightarrow{OA}$

## 2.4.2 Mouvement dans le référentiel barycentrique

- **Référentiel barycentrique**

$\mathcal{R}^*$  en translation à la vitesse  $\vec{v}_G(t)|_{\mathcal{R}}$  (pas nécessairement uniforme,  $\mathcal{R}^*$  pas nécessairement galiléen). Dans  $\mathcal{R}^*$ ,  $\vec{v}_G(t)|_{\mathcal{R}^*} = \vec{0}$  et  $\vec{p}|_{\mathcal{R}^*} = \vec{0}$ .

- **Théorème de Koenig pour le moment cinétique**

- Dans  $\mathcal{R}^*$ , le moment cinétique est **indépendant du point** :  $\forall A, \vec{\sigma}_A|_{\mathcal{R}^*} = \vec{\sigma}_G|_{\mathcal{R}^*} = \vec{\sigma}^*$  (= moment cinétique dans le référentiel barycentrique = moment cinétique propre, analogue au spin)

- Dans  $\mathcal{R}$ , **théorème de Koenig** : en  $A$ , point du solide  $\mathcal{S}$ ,  $\vec{\sigma}_A(t) = \vec{\sigma}^* + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}$  (= moment cinétique propre + moment cinétique orbital) avec  $\vec{p} = M \vec{v}_G$ .

## 2.4.3 Rotation autour d'un point ou d'un axe

- Expression du moment cinétique du solide  $\mathcal{S}$  en  $A$

$$\vec{\sigma}_A(t) = M \overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}(A, t) + \int_{P \in \mathcal{S}} \rho(P) \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP}) d\tau \text{ (second terme = linéaire en } \vec{\Omega} \text{, } M \text{ = masse du solide)}$$

- **Rotation autour de A point fixe** du solide  $\mathcal{S}$

$\vec{v}(A) = \vec{0} \Rightarrow$  le moment cinétique en  $A$   $\vec{\sigma}_A(t)|_{\mathcal{R}}$  est linéaire en  $\vec{\Omega}$  :

$\exists$  **matrice /opérateur/tenseur d'inertie en A**  $[J_A]$  telle que  $\vec{\sigma}_A = [J_A] \vec{\Omega}$

$$\text{avec } [J_A] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \text{ où } I_{xx} = \int_{M \in \mathcal{S}} \rho(M) (y^2 + z^2) d\tau, I_{xy} = \int_{M \in \mathcal{S}} \rho(M) (xy) d\tau$$

... avec  $\overrightarrow{AM}(x, y, z)$  dans  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  sont les **moments d'inertie** par rapport à  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ , et  $\vec{e}_z$ .

$I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  sont les **produits d'inertie**.

$[J_A]$  est caractéristique du solide, indépendante du temps  $t$ .

- **Axes principaux d'inertie**

$[J_A]$  est symétrique réelle donc diagonalisable  $\Rightarrow$  il existe 3 axes perpendiculaires entre eux liés

$$\text{au solide tels que } [J_A] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \text{ soit diagonale : } I_1, I_2, I_3 \text{ sont les } \mathbf{moments principaux}$$

**d'inertie**, les 3 axes sont les **axes principaux d'inertie**.

- Détermination des axes principaux d'inertie

- Symétries (par rapport à un plan ou à un axe passant par A)
- **Rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  passant par A** :  $\vec{\sigma}_A = J_\Delta \vec{\Omega}$  avec  $J_\Delta = \int_{P \in S} \rho(P) d(\Delta, P)^2 d\tau$ , si  $\Delta$  est axe principal d'inertie
- **Théorème de Huygens** : soient  $\Delta_G$  un axe passant par  $G$  et  $\Delta$  un axe parallèle à  $\Delta_G$  :  $J_\Delta = Md(\Delta, G)^2 + J_{\Delta_G}$  où  $d(\Delta, G)$  est la distance entre  $G$  et l'axe  $\Delta$ .
- Exemples de calculs de moments d'inertie

## 2.5 Dynamique du solide, théorèmes généraux, principe fondamental (TRD)

### 2.5.1 Torseur 'dynamique' (torseur des quantités d'accélération)

- **Résultante dynamique**

$$\vec{Q}(S/R)(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt}$$

Pour un système fermé  $M = cte$ , masse volumique  $\rho = cte$  indépendante du temps :  $\vec{Q}(S/R)(t) = \int_{P \in S} \rho(P) \vec{a}(P, t) d\tau = M \vec{a}_G$

- **Moment dynamique en A**

$$\vec{D}(S/R)(t) = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \rho(P) \vec{a}(P, t) d\tau$$

⇒  $(\vec{D}_A(t), \vec{Q}(t))$  est un torseur appelé **torseur des quantités d'accélération** (aussi noté  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{Q}(t) \\ \vec{D}_A(t) \end{array} \right\}$ ) :  $\vec{D}_A(t)|_{\mathcal{R}} = \vec{D}_O(t)|_{\mathcal{R}} + \vec{Q} \wedge \overrightarrow{OA}$

- Théorème de Koenig pour le moment dynamique

- Dans  $\mathcal{R}^*$ , le moment dynamique **est indépendant** du point  $\forall A$ ,  $\vec{D}_A|_{\mathcal{R}^*} = \vec{D}_G|_{\mathcal{R}^*} = \vec{D}^*$

- Dans  $\mathcal{R}$ , **théorème de Koenig** : en A, point du solide S,  $\vec{D}_A(t) = \vec{D}^* + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{Q}$  avec  $\vec{Q} = M \vec{a}_G$ .

- Relation entre moment cinétique et moment dynamique

$$\vec{D}_A|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} + M \vec{v}_A \wedge \vec{v}_G$$

Cas particuliers (importants en pratique) :

- Si A **est un point fixe** ( $\vec{v}(A) = \vec{0}$ ) ou si  $A = G$  ou si  $\vec{v}(A) \parallel \vec{v}(G)$ , alors  $\vec{D}_A|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt}$ .
- Contact entre deux solides  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  avec  $\mathcal{S}_1$  fixe dans  $\mathcal{R}$  (référentiel  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathcal{S}_1}$  lié à  $\mathcal{S}_1$ ), **sans glissement**  $\vec{u}(t) = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_2/\mathcal{R}_{\mathcal{S}_1}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{D}_I|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{\sigma}_I}{dt}$ .

### 2.5.2 Théorèmes de la résultante dynamique et du moment dynamique

- Théorèmes fondamentaux

Ils traduisent l'égalité entre le **torseur des quantités d'accélération** et le **torseur des forces extérieures**  $(\vec{D}_A(t), \vec{Q}(t)) = (\vec{M}_{Aext}, \vec{F}_{ext})$ .

Hypothèses : système fermé, A est un point fixe ou bien  $A = G$ , alors :

- **Théorème de la résultante dynamique (TRD = PFD)** :  $\vec{Q}(S/\mathcal{R})(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}_{ext}$
- **Théorème du moment dynamique (TMD)** (A fixe ou  $A = G$ ) :  $\vec{D}_A(t) = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \vec{M}_{Aext}$
- **Actions réciproques** :  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  en interaction et  $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$  isolé  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  et  $\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{M}_{2 \rightarrow 1}$

- Cas particuliers :

Dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$ ,  $\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{M}_{Gext}$

Cas d'une rotation autour d'un axe  $\Delta$  passant par A :  $\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = J_\Delta \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{M}_{Aext}$

- **Méthode générale** de résolution d'un problème de mécanique du solide :

- Définition du système
  - Référentiel, repère, système de coordonnées (symétries du problème)
  - Coordonnées du solide  $\mathcal{S}$
  - Inventaire des forces
  - Hypothèse sur le contact (avec/sans glissement)
  - Choix du point d'application des théorèmes fondamentaux : point A fixe, ou  $A = G$ , ou  $A = I$  point de contact
- Exemples : yoyo, marteau

### 2.5.3 Théorème de l'énergie cinétique

- **Energie cinétique** d'un solide

- Définition :  $T = \frac{1}{2} \int_{P \in S} \rho(P) v^2(P, t) d\tau$

- Remarque : énergie cinétique = moitié du produit (ou comoment) du torseur des vitesses et du torseur cinétique en un point A du solide,  $T = \frac{1}{2} \left( \vec{v}_A, \vec{\Omega} \right) \odot \left( \vec{\sigma}_A, \vec{p} \right) = \frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{v}_A + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_A$

- **Théorème de Koenig** pour l'énergie cinétique :  $T = T^* + \frac{1}{2} M v_G^2$  où  $T^*$  est l'énergie cinétique dans le référentiel barycentrique

- Cas du solide en **rotation autour d'un point fixe A** :  $T = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_A = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot [J_A] \vec{\Omega}$

- Cas du solide en **rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$**  passant par A :  $T = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2$

- **Puissance et travail** des forces

- Puissance des actions intérieures et extérieures au point A,  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\Omega}$

- Remarque : puissance = produit (ou comoment) du torseur des forces et du torseur des vitesses,  $\mathcal{P} = \left( \vec{M}_A, \vec{F} \right) \odot \left( \vec{v}_A, \vec{\Omega} \right)$

- **En G**, centre de gravité :  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_G + \vec{M}_G \cdot \vec{\Omega}$

- Cas des **forces de contact**, en I point de contact :  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{u} = 0$  si il n'y a pas de frottement (réaction tangentielle  $\vec{R}_T = 0$ , voir §2.6) ou si il n'y a pas de glissement ( $\vec{u} = \vec{0}$ )

- Cas des forces intérieures : solide indéformable  $\mathcal{P}_{int} = 0$

- **Travail** :  $W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$

- Théorème de l'énergie cinétique

- Forme différentielle (travail élémentaire) :  $dT = \delta W$  (toutes les forces)

- Forme puissance :  $\frac{dT}{dt} = P$  (toutes les forces)

- **Forces conservatives** (cf §1.3.3)

(1) La force ne dépend que de la position  $\vec{F}(\vec{r}, t, \vec{v}, \dots) = \vec{F}(\vec{r})$

et

(2) Le travail de la force entre deux points est indépendant du chemin suivi

$\Rightarrow$  il existe  $U(r)$  énergie potentielle telle que  $U(r) = -\int_{r_0}^r F(r') dr' = -W_{Fr_0 \rightarrow r}$

$\Rightarrow$  il existe  $U(r)$  énergie potentielle telle que  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r)$

ou

(2) Le rotationnel de la force  $F$  est nul :  $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

$\Rightarrow$  Energie totale (hamiltonien) conservée :  $H = T + U = cte$  (indépendante du temps)

- Méthodes énergétiques et **intégrales premières** du mouvement

$\triangleright$  1 ddl : cf §1.4

$\triangleright$   $N > 1$  ddl :

- si système conservatif, conservation de  $H = T + U$

- projection du TRD sur un vecteur constant  $\vec{u}_x$  :  $\vec{F} \cdot \vec{u}_x = 0 \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{u}_x = cte$

- projection du théorème du moment cinétique sur un vecteur constant  $\vec{u}_x$  :  $\vec{M}_{Oext} \cdot \vec{u}_x = 0 \Rightarrow \vec{\sigma}_O \cdot \vec{u}_x = cte$

$\rightarrow$  **Exemples** : mouvements de roulements, chaînette, pendule conique, pendule sphérique

## 2.6 Frottements, actions de contact

### 2.6.1 Forces et couples de frottements

- 3 types de mouvements

Glissement, pivotement, roulement actions associées (voir aussi §2.3.2): forces et moments des actions de contact

- **Forces et couples** de frottements (schéma)

- Forces : réaction normale  $R_N$  et réaction tangentielle (frottement)  $R_T$

- Moments : résistance au pivotement et résistance au roulement (négligeables si contact quasi ponctuel)

- **Puissance** des actions de contact :  $\mathcal{P} = \vec{R}_T \cdot \vec{u}$

### 2.6.2 Origine microscopique du frottement solide

- **Réaction normale**  $\vec{R}_N$  : modélisation de la rugosité de surface, contact élastique de **Hertz** (schéma)

- Solide élastique de rayon  $R$  de module d'Young  $E$

- Contact sur une surface  $a^2$ , enfoncement  $\delta$ , déformation  $= \delta/a$

- Force répulsive élastique qui s'oppose à l'enfoncement : contrainte  $\sigma = \frac{R_N}{a^2} \propto E\delta/a$  (en Pa)

- Petites déformations  $\delta \ll R$  et  $\delta \ll a \Rightarrow a \sim \sqrt{2\delta R}$  d'où  $R_N \propto E\sqrt{R}\delta^{3/2}$

- Remarques :

➤ Ordres de grandeur pour l'acier

➤ Raideur =  $\frac{R_N}{\delta} \propto \sqrt{\delta}$  augmente avec  $\delta$

➤ Si non élastique, par exemple :  $\sigma_N = \frac{R_N}{a^2} = cte.H$  où  $H$  est la dureté  $R_N \propto HR\delta$

• **Réaction tangentielle**  $\vec{R}_T$  :

- Expérience de **Léonard de Vinci** (schéma) = 3 masses superposées ou à la file mises en mouvement

- Résultats :

(1) La même force est nécessaire pour mettre en mouvement (faire glisser) les masses la force de frottement solide est indépendante de la surface de contact  $S$

(2)  $R_T \propto R_N$

(3)  $R_{T,d} < R_{T,s}$  : force plus importante pour mettre en mouvement les masses (frottement statique) que pour maintenir le glissement (frottement dynamique)

- Interprétation et **origine microscopique** du résultat (2) :

Rugosité microscopique des solides (schéma) contacts uniquement sur les aspérités des surfaces donc la surface de contact réelle est **petite** :  $S_{réelle} \ll S_{apparente}$  et  $S_{réelle} = N_{contacts} s_{contact}$  où  $N_{contacts}$  est le nombre de contacts et  $s_{contact}$  est la surface d'un contact.

Contraintes sur les aspérités très fortes : la contrainte normale  $\sigma_N$  atteint la **limite de plasticité** du matériau (constante) et  $\sigma_N = \frac{R_N}{S_{réelle}} = H = \sigma_{plast} = cte$ .

Pour faire glisser les deux surfaces, il faut 'ouvrir' les contacts par cisaillement donc  $R_T \propto N_{contacts}$  et  $R_T \propto S_{réelle}$  : la contrainte tangentielle atteint la **limite en cisaillement** du matériau  $\sigma_T = \frac{R_T}{S_{réelle}} = \sigma_{cis} = cte$ .

Conséquence :  $\frac{R_T}{R_N} = \frac{\sigma_{cis}}{\sigma_{plast}} = cte = \mu$  coefficient de frottement et  $R_T \propto R_N$ .

### 2.6.3 Lois du frottement solide d'Amontons-Coulomb

• **Lois d'Amontons (1699)-Coulomb (1785)** :

- **Statique** : la réaction tangentielle  $R_T$  est indéterminée et telle que  $|R_T| \leq \mu_s |R_N|$ ,  $R_T \in$  cône de frottement d'angle  $\phi_s = \text{Arctg}(\mu_s)$  où  $\mu_s$  est le **coefficient de frottement statique**.

- **Dynamique** : mise en mouvement si  $|R_T| = \mu_s |R_N|$  puis  $|R_T| = \mu_d |R_N|$  dès qu'il y a glissement (i.e. vitesse de glissement  $u \neq 0$ ) avec  $\mu_d$  **coefficient de frottement dynamique**, tel que  $\mu_d < \mu_s$  (graphe  $\mu$  en fonction de  $u$ ).

→ Ordres de grandeur de  $0.1 < \mu_d < \mu_s < 1$  en fonction du matériau

• **Hystérésis lors du frottement solide**

- Contact avec glissement (dynamique =  $|R_T| = \mu_s |R_N|$  et  $u \neq 0$ ) devient sans glissement (statique =  $|R_T| \leq \mu_s |R_N|$  et  $u = 0$ ) si  $u$  s'annule, mais le contact sans glissement devient avec glissement si  $|R_T| = \mu_s |R_N|$

- Remarque : mêmes lois pour le couple de frottement sur un axe

→ Exemples : statique sur plan incliné, cône de frottement, vis bois/métal, stick-slip, archet de violon (vidéo), cabestan (vidéo)

## 2.7 Solide en rotation

- Différents types de liaisons : pivot (ou rotoïde)/glissière/rotule (ou sphérique)/hélicoïdale,
- Liaison parfaite/idéale = sans frottement

### 2.7.1 Rotation autour d'un axe fixe

- **Rotation autour d'un axe fixe**

- Rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe et passant par  $O$  : axe vertical ( $Oz$ ) de vecteur directeur  $\vec{e}_z = \vec{e}'_z$ .
- Référentiel fixe  $\mathcal{R}$  (repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ), référentiel tournant lié au solide  $\mathcal{R}_s$  (repère  $(O, \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$ )
- Vecteur rotation  $\mathcal{R}_s / \mathcal{R}$  :  $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$
- Moment cinétique par rapport  $O$  :  $\vec{\sigma}_O = [J_O] \vec{\Omega} = \dot{\theta} (-I_{xz} \vec{e}'_x - I_{yz} \vec{e}'_y + I_{zz} \vec{e}'_z)$  dans  $\mathcal{R}_s$   
(  $I_{zz} = J$ ,  $-I_{xz} = A$ ,  $-I_{yz} = B$  )
- Théorèmes fondamentaux :

**TRD** :  $m \begin{pmatrix} -a\dot{\theta}^2 \\ a\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{P} + \vec{F}_{contact}$  où  $a$  est la distance entre  $O$  et  $G$ .

**Théorème du moment cinétique** :  $m \begin{pmatrix} A\ddot{\theta} - B\dot{\theta}^2 \\ B\ddot{\theta} + A\dot{\theta}^2 \\ J\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \vec{M}_P + \vec{M}_{contact}$

**Théorème de l'énergie cinétique** :  $T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \Rightarrow \frac{dT}{dt} = J\dot{\theta}\ddot{\theta} = \vec{M}_O \cdot \vec{\Omega} \Rightarrow J\ddot{\theta} = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_z = \mathcal{M}_{O,z}$ .

- **Cas d'une liaison idéale**

$\mathcal{M}_{O,z,contact} = 0$  et puissance des actions de contact  $\mathcal{P}_{contact} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cte$ .

- **Equilibrage** d'une machine tournante

- Equilibrage statique :  $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow a = 0$ ,  $G$  est sur l'axe de rotation.
- Equilibrage dynamique :  $\sum \mathcal{M}_{x,y} = 0 \Rightarrow A = B = 0$  et ( $Oz$ ) est axe principal d'inertie.

### 2.7.2 Rotation autour d'un point fixe

- **Angles d'Euler**

- Angles d'Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$  tels que les trois directions  $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{e}'_z)$  sont axes principaux d'inertie, point fixe  $O$

- La matrice d'inertie  $[J_O]$  est diagonale dans la base des axes principaux d'inertie :  $[J_O] =$

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}.$$

- Expression du **vecteur rotation** :

- Dans la base  $(e_z, u, e'_z)$  :  $\vec{\Omega} = \dot{\psi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{e}'_z$

- Dans la base  $(u, w, e'_z)$  :  $\Omega = \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\psi} \sin \theta \vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{e}'_z$

• **Energie cinétique**

-  $T = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot [J_O] \vec{\Omega}$

- Cas de la **toupie symétrique** :  $I_1 = I_2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2$

• **Equations d'Euler**

- Cas général sans symétrie particulière avec  $I_1 < I_2 < I_3$ , dans la base des axes principaux d'inertie  $(\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$  :  $\vec{\Omega} = \omega_1 \vec{e}'_x + \omega_2 \vec{e}'_y + \omega_3 \vec{e}'_z$  et  $\vec{\sigma}_O = [J_O] \vec{\Omega} = I_1 \omega_1 \vec{e}'_x + I_2 \omega_2 \vec{e}'_y + I_3 \omega_3 \vec{e}'_z$

- Théorème du moment cinétique en  $O$  :  $\left. \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \right|_{\mathcal{R}_S} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_S/\mathcal{R}} \wedge \vec{\sigma}_O = \vec{M}_o$ .

$$\Rightarrow \text{Equations d'Euler} \begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = \mathcal{M}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = \mathcal{M}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = \mathcal{M}_3 \end{cases}$$

• **Cas où le moment des forces extérieures est nul** (mouvement de Poinsot)

$\vec{M}_o = \vec{0}$  : cas du mouvement de Poinsot

- **Symétrie sphérique** :  $I_1 = I_2 = I_3 = I \Rightarrow \vec{\Omega} = c\vec{t}\vec{e}$  et  $\vec{\sigma}_O = I\vec{\Omega} = ct\vec{e} = \vec{L}$ .

- **Toupie symétrique** :  $I_1 = I_2 \neq I_3 \Rightarrow \omega_3 = cte$

➤  $\tilde{\omega} = \omega_1 + i\omega_2$  vérifie  $\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = i\lambda\tilde{\omega}$  avec  $\lambda = \omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1}$  d'où **précession de  $\vec{\Omega}$  autour de  $\vec{e}'_z$**  à la vitesse angulaire  $\lambda$  (schéma) = mouvement de **précession libre**.

➤ **Cône du corps** (mouvement dans  $\mathcal{R}_S$ ) : précession de  $\vec{\Omega}$  et précession de  $\vec{\sigma}_O = \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_1 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix}$

dans  $(\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$  autour de  $\vec{e}'_z$  à la vitesse angulaire  $\Omega_c = \lambda$ .

➤ **Cône d'espace** (ou cône de base) (mouvement dans  $\mathcal{R}$ ) :  $\vec{\sigma}_O = c\vec{t}\vec{e}$  car  $\vec{M}_o = \vec{0}$ ,  $\vec{\Omega}$  et  $\vec{e}'_z$  précessent autour de  $\vec{\sigma}_O$  à la vitesse angulaire  $\Omega_s = \sigma_O / I_1$ .

→ Exemple de la Terre : oscillation de Chandler de période  $T=300-400$  jours.

• **Cas où le moment des forces extérieures est non nul  $\vec{M}_o \neq 0$**  :

- **Toupie symétrique dans l'approximation gyroscopique** : le moment du poids est faible donc  $\dot{\varphi} \gg \dot{\psi}, \dot{\theta}$  (schéma)

Théorème du moment cinétique :  $\left. \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{M}_{\vec{P},o} = \vec{OG} \wedge M\vec{g}$  avec  $\vec{OG} = R\vec{e}'_z$  et  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$

**Approximation gyroscopique** : le moment du poids est faible,  $\vec{\sigma}_O$  varie peu donc  $\vec{\sigma}_O \sim L\vec{e}'_z = c\vec{t}\vec{e}$

$\frac{d\vec{e}'_z}{dt} = \frac{MgR}{I_3\omega} \vec{e}_z \wedge \vec{e}'_z$  où  $L = I_3\omega$  (avec  $\vec{\Omega} \sim \omega \vec{e}'_z$  et  $\vec{\sigma}_O \sim L\vec{e}'_z = I_3\vec{\Omega}$ ), soit :  $\frac{d\vec{e}'_z}{dt} = \vec{\Omega}_P \wedge \vec{e}'_z$

⇒ **Précession** de l'axe de la toupie  $\vec{e}'_z$  autour de  $\vec{e}_z$  ( $\theta = cte$ ) à la vitesse angulaire  $\Omega_P = \frac{MgR}{I_3\omega}$

→ Exemple de la Terre : précession des équinoxes de période  $T=26\ 000$  ans

- **Toupie symétrique soumise à son poids** (cas du mouvement de Lagrange-Poisson = moment du poids, pas forcément faible)

Traité en formalisme lagrangien (précession) et hamiltonien (précession + nutation) Cf. Chp 3

→ Exemples (cf. Chp 3) : pendule simple, pendule pesant, gyroscope/toupie symétrique (vidéo)

# Chapter 3

## Mécanique analytique

### 3.1 Calcul variationnel

Formulations Lagrangienne ou Hamiltonienne = plus simples que la mécanique newtonienne

Généralité des principes variationnels en physique, formulation unifiée

#### 3.1.1 Exemples

- Notations : dérivée d'une fonction  $y(x)$  notée  $y'(x) = \frac{dy}{dx}$
- Plus court chemin
- Principe de Fermat

#### 3.1.2 Système à une fonction

On définit  $S = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx$

Problème variationnel = trouver  $y(x)$  telle que  $S$  soit **stationnaire**  $\iff dS = 0$

Remarque : si on veut que  $S$  soit minimale/maximale, on impose le signe de la dérivée seconde

- **Equation d'Euler-Lagrange** (1756)

$S$  stationnaire,  $dS = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$

- Exemples d'application :

- Chemin le plus court
- Courbe brachistochrone

#### 3.1.3 Système à deux fonctions

On définit  $S = \int_{u_1}^{u_2} f(x(u), y(u), x'(u), y'(u), u) dx$  (représentation paramétrique  $x(u), y(u)$ )

$S$  stationnaire,  $dS = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{du} \frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{du} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \end{cases}$  avec  $x'(u) = \frac{dx}{du}$  et  $y'(u) = \frac{dy}{du}$  (2 équations

d'Euler-Lagrange).

### 3.1.4 Equations de Lagrange

Généralisation à  $n$  degrés de liberté (ddl).

→ Exemple :  $N$  particules dans un espace à 3 dimensions :  $3N$  coordonnées  $q_i$  avec  $i = 1 \dots 3N$

On considère  $n$  degrés de liberté (1 point dans un espace  $n$  dimensions) :

$q_i$  avec  $i = 1 \dots n$  sont les **coordonnées généralisées** et  $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$  avec  $i = 1 \dots n$  sont leurs dérivées par rapport au temps.

Soit  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$  le **Lagrangien du système** (cf. §3.2), on définit l'**intégrale d'action** ou **action** par :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

$S$  stationnaire,  $dS = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0$  ( $n$  **équations de Lagrange**).

## 3.2 Mécanique lagrangienne

- Avantages de la formulation lagrangienne de la mécanique classique :

- La forme des équations de Lagrange est indépendante du système de coordonnées.
- Les équations de Lagrange éliminent les forces dues aux contraintes.
- Formulation plus simple que la deuxième loi de Newton.

- Hypothèses : forces conservatives et référentiel inertiel (galiléen)  $\Rightarrow$  pas d'avantage si le système est dissipatif.

### 3.2.1 Système sans contrainte

- **Principe de d'Alembert**

2<sup>ème</sup> loi de Newton, Principe de d'Alembert (1743) :  $\sum_i \left( \frac{d\vec{p}_i}{dt} - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$  lors d'un déplacement  $\delta r$

- **Définition du Lagrangien**

$\mathcal{L} = T - U$  avec  $T = \frac{1}{2}mv^2$  énergie cinétique et  $U = U(r)$  énergie potentielle.  $\mathcal{L}$  est une fonction des coordonnées  $q_i$  et de leurs dérivées  $\dot{q}_i$ .

- **Principe de Hamilton** (ou principe d'action stationnaire ou 1<sup>er</sup> principe variationnel ou principe de moindre action)

L'action  $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt$  est **stationnaire le long de la trajectoire réelle**.

$$\Leftrightarrow \delta S = 0$$

$\Leftrightarrow$  **Equations de Lagrange** :  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ , où  $q_i$  sont les **coordonnées généralisées** (équations différentielles du 2<sup>ème</sup> ordre).

$\Leftrightarrow$  **Equations de Lagrange** :  $\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ , où  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  sont les **moments conjugués** (ou impulsions généralisées ou quantités de mouvement généralisées) et  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$  est la **force généralisée**

- Généralisation à un système de plusieurs particules sans contraintes
- Exemples

→ Mouvement à 2D  $(x, y)$  dans un champ conservatif  $\Rightarrow$  2<sup>ème</sup> loi de Newton  $(x)$

→ Mouvement à 2D en polaires  $(r, \theta) \Rightarrow$  2<sup>ème</sup> loi de Newton  $(r)$  et théorème du moment cinétique  $(\theta)$

### 3.2.2 Systèmes contraints, holonomes ou non holonomes

- Exemple : pendule simple, contrainte  $r = l = cte$  perte d'un ddl
- Nombre de **coordonnées généralisées**

➤ Système à  $N$  particules de coordonnées  $\vec{r}_i$  avec  $i = 1 \dots N$  et de coordonnées généralisées  $q_i$  avec  $i = 1 \dots n$ , où  $n$  est le nombre minimal de coordonnées généralisées permettant de décrire complètement la configuration du système (espace de configuration) :

$q_i(\vec{r}_i, t)$  avec  $i = 1 \dots N$  au maximum  $3N$  coordonnées

$\vec{r}_i(q_i, t)$  avec  $i = 1 \dots n$

Cas particulier : les coordonnées sont dites '**naturelles**' lorsqu'elles sont indépendantes du temps  $t$ .

➤ **Contraintes**  $\Rightarrow$  **diminution du nombre de coordonnées généralisées** :  $n \leq 3N$  ( $n = 3N$  : système sans contrainte,  $n < 3N$  : système avec contraintes)

- Nombre de **degrés de liberté** (ddl) = nombre de coordonnées généralisées  $n$  qui peuvent varier indépendamment au cours d'un 'petit' déplacement.
- **Systèmes holonomes**

Système holonome = système pour lequel le nombre de ddl est **égal** au nombre de coordonnées généralisées = système dont les **contraintes sont toutes holonomes** (il existe une relation entre les  $\vec{r}_i$  (ou entre les  $q_i$ ), telle que  $g(\vec{r}_i, t) = 0$ )

$\Rightarrow$  s'il y a  $s$  contraintes holonomes, le système possède  $n = 3N - s$  ddl et  $n = 3N - s$  coordonnées généralisées.

$\rightarrow$  Exemples : pendule simple ( $n = 1$ ), pendule double ( $n = 2$ ).

- **Systèmes non holonomes**

Système non holonome = système pour lequel le nombre de ddl est **différent** du nombre de coordonnées généralisées = systèmes qui possèdent des **contraintes non holonomes** (il existe une relation entre les  $\vec{r}_i$  ou entre les  $q_i$ , telle que par exemple  $g(\vec{r}_i, t) > 0$  ou  $\frac{\partial g}{\partial t}(\vec{r}_i, t) = 0$ )

$\rightarrow$  Exemple : boule sur un plan.

### 3.2.3 Equations de Lagrange pour un système contraint holonome

- Hypothèses sur les forces : forces liées aux contraintes et forces actives (ou d'interaction)

- **Forces liées aux contraintes**  $\vec{F}_{contr i}$  : elles peuvent être non conservatives mais sont perpendiculaires à la surface de déplacement (liaisons sans frottement, **pas de dissipation**), donc  $\delta \vec{r}_i \cdot \vec{F}_{contr i} = 0$  (on dit que le déplacement compatible avec les contraintes)

- **Forces actives**  $\vec{F}_i$  : elles dérivent d'une énergie potentielle mais sont **non conservatives** car peuvent dépendre du temps  $t$ , donc  $\vec{F}_i = -\vec{\nabla} U_i(\vec{r}_i, t)$

- **Force totale** :  $\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{contr i}$ , vérifie la 2<sup>ème</sup> loi de Newton.

- **Principe de d'Alembert**

Le déplacement  $\delta \vec{r}_i$  est compatible avec les contraintes i.e.  $\delta \vec{r}_i \cdot \vec{F}_{contr i} = 0 \Rightarrow \sum_i \left( \frac{d\vec{p}_i}{dt} - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$

- **Principe de Hamilton** pour un système contraint holonome

- Définition du **Lagrangien** :  $\mathcal{L} = T - U$  exclut les forces liées aux contraintes

- L'action  $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt$  est **stationnaire le long de la trajectoire réelle** (respecte les contraintes)

$$\Leftrightarrow \delta S = 0$$

$\Leftrightarrow$  **Equations de Lagrange** :  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  où  $q_i$  avec  $i = 1 \dots n = 3N - s$  sont les **coordonnées généralisées**

$\Leftrightarrow$  **Equations de Lagrange** :  $\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$  où  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  sont les **moments conjugués** (ou impulsions généralisées ou quantités de mouvement généralisées) et  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$  est la **force généralisée**

- **Coordonnées cycliques**

Si le Lagrangien  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$  **ne dépend pas** de la coordonnée  $q_j$ , on dit que  $q_j$  est **cyclique** (ou muette, ou ignorable) et la quantité de mouvement généralisée correspondante est **conservée** :  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$  (invariance de  $\mathcal{L}$  en  $q_j$ )  $\Rightarrow p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \text{cte}$  ( $p_j$  est conservée).

### 3.2.4 Equations de Lagrange pour un système contraint non holonome, multiplicateurs de Lagrange

- Exemple de multiplicateur de Lagrange pour une contrainte holonome sur un système 2D à 1ddl, interprétation du multiplicateur de Lagrange
- Cas général : système à  $s$  contraintes holonomes et  $r$  contraintes non holonomes

-  $3N - s$  coordonnées généralisées :  $q_k$  avec  $k = 1 \dots 3N - s$

-  $r$  relations de contraintes non holonomes :  $\sum_{k=1}^{3N-s} \gamma_{lk} q_k + \gamma_l = 0$

$\Rightarrow 3N - s$  équations de Lagrange généralisées :  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \sum_{l=1}^r \lambda_l \gamma_{lk} = 0$  où les  $r$  coefficients  $\lambda_l$  sont les **multiplicateurs de Lagrange**.

- Remarques

- applicable à des contraintes holonomes s'écrivant sous forme d'égalités  $g_l(q_k, t) = 0$  avec  $\gamma_{lk} = \frac{\partial g_l}{\partial q_k}$  et  $\gamma_l = \frac{\partial g_l}{\partial t}$ .

- pas applicable à des contraintes non holonomes s'écrivant sous forme d'inégalités.

### 3.2.5 Exemples d'utilisation des équations de Lagrange

→ Perle sur cerceau tournant

→ Machine d'Atwood

→ Problème à deux corps

→ Toupie symétrique soumise à son poids (mouvement de Lagrange-Poisson)

→ Force centrale

## 3.3 Mécanique hamiltonienne

**1687** Newton 'Principia Mathematica' : 2<sup>ème</sup> loi de Newton, coordonnées cartésiennes

**1788** Lagrange 'Mécanique analytique' : équations de Lagrange, coordonnées généralisées

Formulation Lagrangienne pas adaptée aux **systèmes dissipatifs**

**1834** Hamilton, formalisme plus flexible pour le choix des coordonnées

### 3.3.1 Symétries et invariances, grandeurs conservées

- Théorème de **Noether**

A toute transformation laissant l'action  $S$  **invariante** (ou le lagrangien  $\mathcal{L}$  invariant) correspond une **grandeur conservée**.

- Rappel sur les coordonnées cycliques

$q_j$  est **cyclique** ( $\mathcal{L}$  ne dépend pas de la coordonnée  $q_j$ ),  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \dot{p}_j = 0 \Rightarrow p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = cte$  et  $p_j$  est une constante du mouvement.

- Invariance par **translation**  $\iff$  conservation de la **quantité de mouvement**

- 2<sup>ème</sup> loi de Newton : un système isolé est invariant par translation.

-  $\mathcal{L}$  invariant par translation (i.e. pour tout déplacement  $\vec{\epsilon}$  tel que  $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \vec{\epsilon}$ ,  $\delta \mathcal{L} = 0$ )  $\Rightarrow \vec{p} = \sum \vec{p}_\alpha = cte$ .

- Invariance par **rotation**  $\iff$  conservation du moment cinétique

$\mathcal{L}$  invariant par rotation  $\Rightarrow \vec{\sigma} = \sum \vec{r}_\alpha \wedge \vec{p}_\alpha = cte$ .

- Invariance par **translation dans le temps**  $\iff$  conservation de l'**énergie totale, hamiltonien**  $\mathcal{H}$

$\mathcal{L}$  ne dépend pas explicitement du temps  $t \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} [\sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}] = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = cte$

- Définition du **hamiltonien** :  $\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$

Si les coordonnées sont naturelles (i.e.  $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_i)$  avec  $i = 1 \dots n$ , indépendantes du temps), alors  $\mathcal{H} = T + U$  représente l'**énergie totale du système**

### 3.3.2 Hamiltonien et transformation de Legendre

- Espace de configuration et espace d'état

-  $(q_i) = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  avec  $i = 1 \dots n$  déterminent la configuration (position) du système et définissent l'**espace de configuration de dimension n**

-  $(q_i, \dot{q}_i) = (q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$  avec  $i = 1 \dots n$  définissent l'**espace d'état de dimension 2n**

-  $n$  équations de Lagrange (équations différentielles du 2<sup>nd</sup> ordre) : la donnée des  $(q_i, \dot{q}_i)_{t=t_0}$  au temps  $t = t_0$  fournit les  $2n$  **conditions initiales** pour la résolution des équations de Lagrange et obtenir une **orbite** (solution) unique dans l'espace d'état

- Lagrangien et Hamiltonien, transformée de Legendre, espace des phases

- On passe du Lagrangien  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$  au Hamiltonien  $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$  par une **transformation de Legendre** :  $\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$  (avec  $i = 1 \dots n$ ).

-  $(q_i, p_i) = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$  avec  $i = 1 \dots n$  définissent l'**espace des phases de dimension 2n**

- Equations de Lagrange et équations de Hamilton

➤ A partir des équations de Lagrange  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  et  $\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$  (conduisent à des équations différentielles du 2<sup>nd</sup> ordre) et de la définition du Hamiltonien  $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$  (ou  $H = T + U$  si les coordonnées sont naturelles), on obtient les équations de Hamilton.

➤ Hypothèses : contraintes holonomes, forces dérivent d'une énergie potentielle mais non conservatives car peuvent dépendre du temps  $t$  donc  $\vec{F}_i = -\vec{\nabla} U_i(\vec{r}_i, t)$ , coordonnées pas forcément naturelles.

➤ **Equations de Hamilton**  $\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{array} \right.$  (système d'équations différentielles du 1er ordre)

- Cas des **systèmes 1D conservatifs**

- Obtention des équations de Hamilton dans le cas d'un système 1D conservatif
- Lagrange  $\Rightarrow$  1 équation différentielle du 2<sup>nd</sup> ordre, Hamilton  $\Rightarrow$  2 équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre
- Méthode (  $q = x$  ) :
  - 1) écrire le Hamiltonien  $\mathcal{H}(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) + U(x)$
  - 2) changement de variable  $\dot{x} \rightarrow p$  :  $T(x, p)$  puis  $\mathcal{H}(x, p)$
  - 3) équations de Hamilton :  $\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$  et  $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$
- $\rightarrow$  Exemples simples à 1D : perle sur un fil rectiligne, machine d'Atwood

### 3.3.3 Crochet de Poisson

- Définition du crochet de Poisson
- $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  et  $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$
- $\mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p}, t)$  :  $2n + 1$  variables
- **Dérivée par rapport au temps  $t$**  d'une quantité  $F$  :  $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, \mathcal{H}\}$  où  $\{F, \mathcal{H}\} = \sum_k \left[ \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right]$  est le **crochet de Poisson**
  - Conservation de  $\mathcal{H}$
- Dérivée de  $\mathcal{H}$  par rapport au temps  $t$  :  $F = \mathcal{H} \Rightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$
- Si  $H$  ne dépend pas explicitement du temps, alors  $H$  est **conservé**.
  - Cas particulier

Si les forces sont conservatives et les contraintes  $g_l(q_k)$  sont indépendantes du temps (coordonnées naturelles), alors  $H = T + U$  et  $H$  est **conservé**

### 3.3.4 Exemples d'utilisation du formalisme hamiltonien

- Méthode de résolution en formalisme hamiltonien
  - 1) Choix des coordonnées généralisées  $q_i$
  - 2) Ecrire  $T$  et  $U$  en fonction de  $(q_i, \dot{q}_i)$
  - 3) Calculer  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$  si le système est conservatif ( $U(q_i)$  ne dépend que de  $q_i$ )
  - 4) Changement de variable  $(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow (q_i, p_i)$  en exprimant  $\dot{q}_i(q_i, p_i)$
  - 5) Ecrire le hamiltonien:  $\mathcal{H}(q_i, p_i) = T + U$  si les coordonnées sont naturelles,  $\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$  sinon
  - 6) Ecrire les équations de Hamilton
- (Remarque : étapes 3 et 4 = étapes supplémentaires par rapport à l'approche lagrangienne)
- Exemples :
    - $\rightarrow$  Force centrale
    - $\rightarrow$  Particule sur un cône
    - $\rightarrow$  Toupie symétrique soumise à son poids (mouvement de Lagrange-Poisson)

### 3.3.5 Avantages du formalisme hamiltonien

- Signification physique

Le Hamiltonien  $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = T + U$  a un sens physique (énergie totale), ce n'est pas le cas pour le Lagrangien  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = T - U$

- Coordonnées cycliques

- Si le Hamiltonien  $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$  **ne dépend pas** de la coordonnée  $q_j$ , on dit que  $q_j$  est **cyclique** et la quantité de mouvement généralisée correspondante est **conservée** :  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = 0$  (invariance de  $\mathcal{H}$  en  $q_j$ )  $\Rightarrow p_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \Rightarrow p_j = \text{cte}$ .

-  $n$  ddl et  $q_j$  cyclique  $\Rightarrow$  en formalisme hamiltonien,  $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$  ne dépend pas de  $q_j$  et  $p_j = \text{cte}$  donc on peut ignorer  $q_j$  et  $p_j$  : problème à  $n-1$  ddl (ce n'est pas le cas en formalisme lagrangien puisque  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$  dépend toujours de  $\dot{q}_j$ ).

—> Exemple : force centrale

- Equations de Lagrange vs. équations de Hamilton

- **Lagrange** :  $n$  équations différentielles du 2<sup>nd</sup> ordre, invariantes par changement de coordonnées dans l'espace des configurations à  $n$  **dimensions**  $\vec{Q} = \vec{Q}(\vec{q})$  (= impossible de mélanger  $\vec{q}$  et  $\dot{\vec{q}} = \frac{d\vec{q}}{dt}$ )

- **Hamilton** :  $2n$  équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre, invariantes par changement de l'espace des configurations à  $2n$  **dimensions**  $\begin{cases} \vec{Q} = \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}) \\ \vec{P} = \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}) \end{cases}$  (transformation canonique = possible de mélanger  $\vec{q}$  et  $\vec{p}$ )

- **Forme différentielle simple** (1<sup>er</sup> ordre) des équations de Hamilton :  $\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = f_i(\vec{q}, \vec{p}) \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = g_i(\vec{q}, \vec{p}) \end{cases} \Rightarrow \dot{\vec{z}} = \vec{h}(\vec{z})$  avec  $\vec{z} = (\vec{q}, \vec{p})$  et  $\vec{h} = (f_1 \dots f_n, g_1 \dots g_n)$  ( $2n$  dimensions)

### 3.3.6 Orbites dans l'espace des phases, théorème de Liouville

- **Orbites** dans l'espace des phases

-  $\vec{z} = (\vec{q}, \vec{p})$  représente un **point unique** dans l'espace des phases à  $2n$  dimensions

- Au temps  $t = t_0$ ,  $\vec{z}_0 = (\vec{q}_0, \vec{p}_0)$  définit la condition initiale

- Pour  $t > t_0$ , les équations de Hamilton donnent l'évolution de  $\vec{z}(t) = (\vec{q}, \vec{p})(t)$  qui décrit une trajectoire unique dans l'espace des phases appelée **orbite** (visualisation par sections de Poincaré).

- Propriété : deux orbites différentes dans l'espace des phases **ne peuvent pas se croiser** en  $\vec{z}_0$  (même à des instants différents si  $H$  ne dépend pas du temps).

—> Exemples : oscillateur harmonique, chute libre

- **Théorème de Liouville**

-  $\vec{z} = (\vec{q}, \vec{p})$  évolue dans le temps selon les équations de Hamilton  $\dot{\vec{z}} = \vec{h}(\vec{z})$

-  $\vec{v} = \dot{\vec{z}} = \left( \dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}} \right) = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}}, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}} \right) =$  'vitesse' dans l'espace des phases

- Systèmes identiques avec des conditions initiales différentes à  $t = t_0$ ,  $\vec{z}_0 = (\vec{q}_0, \vec{p}_0)$  dont l'ensemble représente une **aire** (si  $2n = 2$ ,  $n = 1$  ddl) ou un **volume** (si  $2n > 2$ ,  $n > 1$  ddl) qui **se déforme** dans l'espace des phases au cours du temps.

- **Théorème de Liouville** : l'évolution d'un ensemble de conditions initiales dans l'espace des phases se fait **sans déformation**. Le **volume occupé** dans l'espace des phases **ne varie pas**.

- Remarques :

➤ seule hypothèse = les équations de Hamilton sont vérifiées.

➤ valable même si le Hamiltonien dépend du temps, si les forces ne sont pas conservatives, ou si les coordonnées ne sont pas naturelles et  $H \neq T + U$ .

➤ valable dans l'espace des phases  $(\vec{q}, \vec{p})$  du formalisme hamiltonien mais pas dans l'espace des états du formalisme lagrangien  $(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ .

➤ analogie avec la **conservation du volume** pour un **fluide incompressible** : théorème de Liouville (volume  $V = cte$ ) et non croisement des orbites (nombre de points  $N = cte$  dans le volume  $V$ ), d'où densité d'orbites  $\rho = \frac{N}{V} = cte$  (fluide incompressible).

➤ **systèmes chaotiques** : sensibles aux conditions initiales (des orbites proches à  $t = t_0$  s'éloignent les unes des autres) d'où étirements et repliements du volume dans l'espace des phases pour qu'il reste constant (voir cours de Physique Non Linéaire).

### 3.3.7 Compléments

- **Action**

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t) dt \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial q_i} = p_i \text{ et } \frac{\partial A}{\partial t} = -\mathcal{H}$$

- Equation de **Hamilton-Jacobi**

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\mathcal{H} \text{ avec } \mathcal{H}\left(q_i, p_i = \frac{\partial A}{\partial q_i}, t\right)$$

- **2<sup>ème</sup> principe variationnel**

$$\mathcal{H} \text{ est conservé le long de la trajectoire } \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta \int_{t_0}^{t_1} (L + H) dt = 0$$

$$\text{Si } \mathcal{L} = T - U \text{ et } \mathcal{H} = T + U, \text{ alors } \Delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = 0$$

## Bibliographie

- Mécanique Classique – J.R. Taylor (de Boeck 2012)
- La physique par la pratique – B. Portelli, J. Barthes (H& K 2005)
- La physique de tous les jours – I. Berkes (Vuibert 2006)
- Les milieux granulaires : entre fluide et solide – B. Andreotti, Y. Forterre, O. Pouliquen (EDP Sciences 2011)
- Sables, poudres et grains : Introduction à la physique des milieux granulaires – J. Duran (Eyrolles)
- Dictionnaire de physique expérimentale tome 1 Mécanique – L. Quaranta, G. Germain (Pierron 2002)
- Petits problèmes de physique 1ère partie – F. Graner (Springer 1998)
- Petits problèmes de physique 2ème partie – R. Kaiser (Springer 1999)
- Livres de prépa*
- Mécanique 1ère année MPSI-PCSI – P. Brasselet (PUF, 2000)
- Mécanique – J.P. Perez (Elsevier Masson 1997, 2006)
- Mécanique 1 et 2 – M. Bertin, J. Renaud (Dunod 1994)
- Mécanique 1 et 2 – J.P. Faroux, J. Renaud (Dunod 1998)
- Mécanique – J.P. Faroux, J. Renaud, L. Bocquet (Dunod 2002)
- Sciences Industrielles Mécanique 2ème année – C. Chèze, M. Delègue, F. Bronsard (Ellipses 2008)
- Mécanique 2 – J. Boutigny (Vuibert)
- Mécanique 2ème année – J.P. Sarmant, H. Gié (Tec & Doc 1996) PC-PC\* - S. Olivier (Tec & Doc)
- MP-MP\* - C. More, D. Augier (Tec & Doc)
- PCSI – P. Grécias (Tec & Doc)
- MP-MP\*, PC-PC\* - M.N. Sanz (Dunod)
- 1001 questions en prépa Physique – C. Garing (Ellipses 2013,2014)
- BUPs*
- 939 – Dynamique de l’atmosphère terrestre – T. Alhalel (2011)
- 574 – Systèmes à deux états – M. Gerl (1975)
- 867 – Etude expérimentale des oscillateurs mécaniques – R. Duffait (2004)
- 850 – Preuves expérimentales du mouvement de la Terre – J. Savardière (2003)
- 775 – Théorème de Bertrand – C. Terrien (1995)
- 587 – Aspects modernes des gyroscopes – J.C. Radix (1976)
- 712 – Le moment cinétique à travers l’univers – H. Gié (1989)
- 851 – Expérience de Melde - J.P. Roux (2003)
- 798 – Frottement solide - O. Fiat (1997)

## Sujets

- 2019 Composition ‘(. . . )Stabilités’ (parties A, B, D)
- 2018 Composition ‘Interactions dans le système solaire’ (parties 1, 3, 4, 6-8)
- 2017 Problème (GPS, ordres de grandeurs, orbites des satellites)
- 2016 Problème (méthodes variationnelles en mécanique, équations d’Euler-Lagrange)
- 2015 Problème (oscillateurs, résonance)
- 2011 Composition (oscillations de molécules)
- 2010 Problème (atome d’H, vecteur de Laplace)
- 2008 Problème (moment magnétique, spin)
- 2001 Problème (effet gyroscopique, moment magnétique, spin)
- 2003 Problème ‘Planètes extra-solaires’
- 2001 Problème (isolation sismique)
- 1999 Composition (gravitation, effets de marées)

## Leçons 2019-2020

1. Contact entre deux solides. Frottement.
2. Gravitation.
3. Caractère non galiléen du référentiel terrestre.
4. Précession dans les domaines macroscopique et microscopique.
5. Lois de conservation en dynamique. ? 20. Conversion de puissance électromécanique.
- ? 22. Rétroaction et oscillations.
48. Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique.
49. Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités.

## Montages 2019-2020

1. Dynamique du point et du solide.
2. Surfaces et interfaces.
4. Capteurs de grandeurs mécaniques.
25. Mesure des fréquences temporelles (domaine de l’optique exclu).
26. Mesure de longueurs.
- ? 27. Systèmes bouclés.
28. Instabilités et phénomènes non-linéaires.\*
31. Résonance.
32. Couplage des oscillateurs.
33. Régimes transitoires.
- ? 35. Moteurs.

## Sites Internet

<http://www.agregation-physique.org/>

<http://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/selections.php>

<http://www.physagreg.fr/>

<http://www.physagreg.fr/video.php>

<https://www.ph-suet.fr/agregation/>

## Vidéos et exemples

- Conservation de la quantité de mouvement

Recul d'un fusil : <https://www.youtube.com/watch?v=Nl0rbQ7TWIU>

Pendule de Newton : <https://www.youtube.com/watch?v=mUrj8ll7Oos>

- Rotation, conservation du moment cinétique

Tabouret inertiel : <https://www.youtube.com/watch?v=yfwb39VCNcQ>

Chat retombant sur ses pattes : <https://www.youtube.com/watch?v=W99aif0eH9A>,

<https://www.youtube.com/watch?v=S5CzHqy0Rbk>

Plongeon : <https://www.youtube.com/watch?v=QwbStLWMnXM>

- Conservation énergie mécanique

Saut à la perche : <https://www.youtube.com/watch?v=3eOE-ABOrBU>

Régulateur de Watt : [https://www.youtube.com/watch?v=cM25CX\\_EKQg](https://www.youtube.com/watch?v=cM25CX_EKQg)

- Référentiels et référentiels non galiléens

Bateau plus rapide que le vent : <https://www.youtube.com/watch?v=jyQwgBAaBag&t=2s>,  
[https://www.youtube.com/watch?v=yCsgoLc\\_fzI](https://www.youtube.com/watch?v=yCsgoLc_fzI)

Pendule de Foucault : <https://www.youtube.com/watch?v=qOxxAWICYdY>

- Frottements

Fouet d'Indiana Jones : <https://www.youtube.com/watch?v=ceU4oPRCwX8>

Stick-slip, archet violon : [https://www.youtube.com/watch?v=FO5bq6x\\_Tws](https://www.youtube.com/watch?v=FO5bq6x_Tws)

Règle de Sommerfeld (doigt sous règle)

Effet rétro au billard : <https://www.youtube.com/watch?v=ACkqi8Aqgyg>

Frottement solide (statique) : <https://www.youtube.com/watch?v=3miOIZKKYHs>

Frottement solide (dynamique) : <https://www.youtube.com/watch?v=4kY-v6mq8lA>,

<https://www.youtube.com/watch?v=Hizwkr2LCp4>

- Solides en rotation, conservation du moment cinétique

Gyroscope : <https://www.youtube.com/watch?v=GeyDf4ooPdo>,

[https://www.youtube.com/watch?v=cquvA\\_IpEsA](https://www.youtube.com/watch?v=cquvA_IpEsA)

Disque d'Euler : <https://www.youtube.com/watch?v=W99aif0eH9A>