

Quelques notions d'élasticité.

NB : Ces notes de cours ont été rédigées grâce aux notes rédigées par F. Elias (Université de Paris), que je remercie pour son aide.

1 Introduction à l'élasticité

1.1 Définition

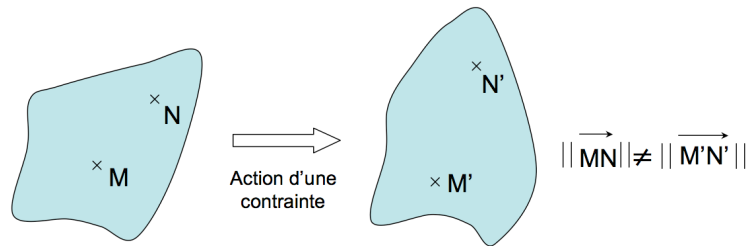


FIGURE 1 – Déformation d'un corps élastique soumis à une contrainte

Elasticité = Mécanique des corps solides déformables (par opposition à la mécanique du point ou des corps indéformables).

La **mécanique** étudie la réponse d'un corps solide à des forces ou moments appliqués.

(Note : pour les milieux visco-élastiques, on parle aussi de **rhéologie** : leur réponse à des forces / moments / pressions appliqués)

Forces ou moments (contraintes) qui s'exercent sur un objet fait d'un matériau donné, de forme donnée et de volume donné → translation, rotation, déformation (changement de forme et de volume : lorsque $M'N' \neq MN$ – voir Fig. 1).

La mécanique du point ou du solide indéformable étudie la translation et la rotation, l'élasticité s'intéresse exclusivement à la déformation.

On distingue élasticité *linéaire* et *non-linéaire*. Dans ce cours : on s'intéresse à l'élasticité linéaire.

1.2 Du microscopique au macroscopique

Quelle est l'origine microscopique de l'élasticité ?

À température ambiante, le potentiel thermodynamique à considérer est l'énergie libre

$$\mathcal{F} = U - TS$$

où U est l'énergie interne, S l'entropie et T la température.

→ Le minimum d'énergie libre correspond à un minimum d'énergie potentielle ou à un maximum d'entropie.

Modèle cristallin Au niveau microscopique : atomes en interaction. Exemple du cristal (Fig. 2) : la distance d'équilibre entre atomes correspond à un minimum énergétique (puits de potentiel). Si on tire sur le matériau, on écarte les atomes de leur position d'équilibre. Augmentation d'énergie donc force de rappel - Voir Fig. 2.

Exemple : le potentiel de Lennard-Jones (lorsque les atomes s'attirent via des interactions dipolaires de type van der Waals) :

$$U = U_0 \left[\left(\frac{x_0}{x} \right)^{12} - 2 \left(\frac{x_0}{x} \right)^6 \right] = U_0 f \left(\frac{x_0}{x} \right)$$

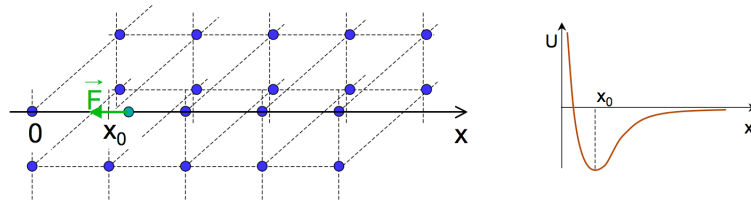


FIGURE 2 – Le déplacement relatif des atomes d'un cristal s'accompagne de forces de rappel élastique $\vec{F}$ au niveau microscopique.

Le premier terme de droite en x^{-12} rend compte de façon empirique d'une répulsion à courte portée (effet de volume exclu, qui est un effet purement quantique : principe d'exclusion de Pauli) ; le second terme de droite en $-x^{-6}$ correspond à l'attraction de van der Waals entre moments dipolaires.

Au voisinage immédiat de x_0 :

$$U \propto (x - x_0)^2$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x \propto -2(x - x_0)\vec{e}_x$$

Force de rappel élastique.

Note : dans le cas du potentiel de Lennard-Jones on a $F = kx$ avec $k = \frac{U_0}{x_0^2} f''(1)$.

Matériau différent : atomes différents : l'énergie d'interaction est différente $\rightarrow$ pas la même résistance : comportement élastique différent (matériau plus dur ou plus mou).

La dureté d'un matériau peut dépendre de la structure de la maille cristalline et la nature des atomes est importante. Exemple de l'acier trempé : atomes de fer en structure cubique centrée (« fer α ») $\rightarrow$ chauffage $\simeq$ 800 (température d'austénitisation) $\rightarrow$ structure cubique face centrée (« fer γ ») qui possède des sites interstitiels plus grands : le carbone se dissout mieux dans le fer γ que dans le fer α $\rightarrow$ refroidissement rapide (sinon le carbone précipite). L'acier trempé est plus dur que le fer. La dureté est proportionnelle à la teneur en carbone.

Polymères Dans le cas des polymères ou élastomères, l'élasticité ne vient pas d'un minimum d'énergie potentielle, mais c'est un effet entropique. Un polymère est constitué de longues chaînes carbonées qui se comportent comme des fils flexibles. Un élastomère est un polymère réticulé, c'est-à-dire que les chaînes sont attachées entre elles par une liaison covalente. Pour maximiser son entropie de configuration, une chaîne polymère tend à adopter une forme de pelote sphérique. Lorsqu'on applique une force mécanique extérieure on tend à déformer (étirer ou aplatis) la pelote. Il s'exerce donc une force de rappel élastique qui tend à ramener la pelote vers la forme sphérique.

2 Théorie de l'élasticité

2.1 Introduction : pourquoi une description tensorielle ?

On a vu des exemples simples de déformations élémentaires sous des contraintes normales et tangentielles (voir le résumé Fig. 3). On a pu noter dans ces exemples que la contrainte est liée à la direction de la force par rapport à la normale à la face sur laquelle elle s'applique. En fonction de ces directions relatives, la déformation peut être élongationnelle ou angulaire.

Pour traiter un cas général, on pourrait traiter chaque cas comme une combinaison de cas particuliers, mais il faudrait définir des forces et déformation correspondant à chacune des déformations élémentaires, ce qui aboutirait rapidement à des calculs extrêmement compliqués. Il est en fait nécessaire de décrire le problème sous forme tensorielle. On aura donc affaire :

- **au tenseur des contraintes** $\bar{\sigma}$ (ordre 2), de composantes σ_{ik} ($i, k = 1, 2$ ou 3), où i indique la direction du vecteur force et k indique la direction de la normale à la face sur laquelle la force est appliquée. Par exemple (voir fig. 3) :
 - traction : $\sigma_{11} \neq 0$; toutes les autres composantes sont nulles ;
 - compression uniforme : σ_{11}, σ_{22} et $\sigma_{33} \neq 0$; toutes les autres composantes sont nulles ;

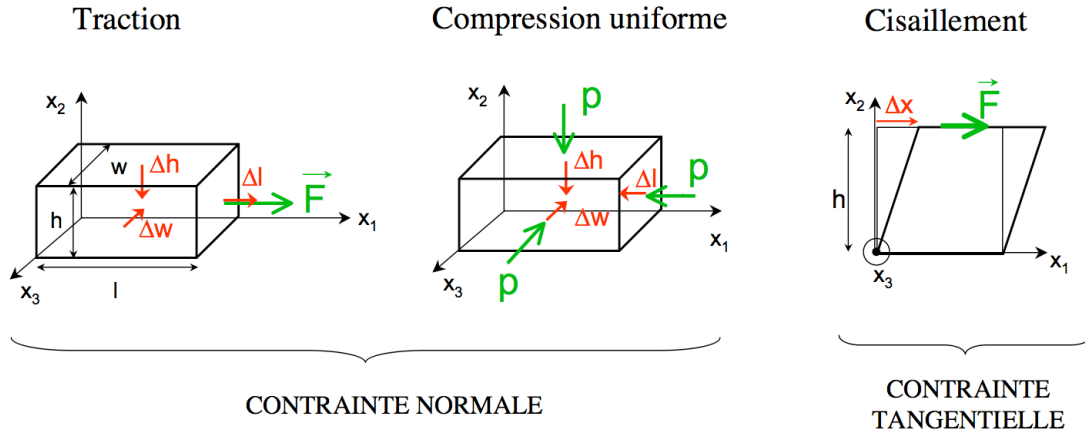


FIGURE 3 – Résumé : déformations sous contraintes normales et tangentielles

— cisaillement : $\sigma_{12} \neq 0$.

On voit donc qu'à une contrainte normale correspondent les composantes diagonales σ_{ii} du tenseur des contraintes, et qu'à une contrainte tangentielle correspond une composante non diagonale σ_{ik} avec $k \neq i$. Le tenseur des contraintes, avec toutes ses composantes, contient donc la combinaison de contraintes normales et tangentielles. La donnée du tenseur des contraintes permet de traiter le cas général sans avoir à rechercher la nature particulière de telle ou telle perturbation.

- au tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ (ordre 2), de composantes ε_{ij} ,
- au tenseur d'élasticité $\bar{\mathcal{A}}$ (ordre 4), de composantes $\mathcal{A}_{ijkl}$.

A 3D, les tenseurs des contraintes et des déformations comportent chacun $3 \times 3 = 9$ composantes. Le tenseur d'élasticité contient $3^4 = 81$ coefficients (heureusement on pourra faire des simplifications).

La loi de Hooke dans le cas général s'exprime alors :

$$\sigma_{ik} = \sum_{j,l} \mathcal{A}_{ijkl} \varepsilon_{jl}.$$

Les coefficients élastiques E , ν , K ou G vont apparaître dans les composantes $\mathcal{A}_{ijkl}$ du tenseur d'élasticité.

2.2 Tenseur des déformations

éfinition

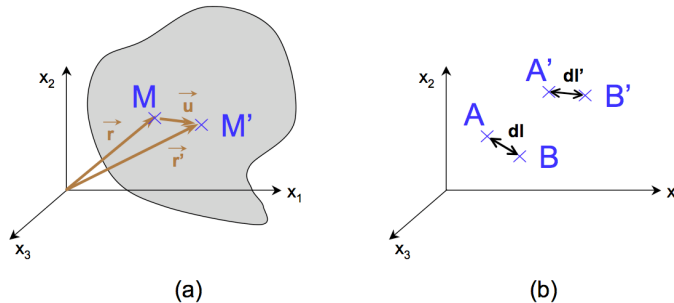


FIGURE 4 – Notations : (a) vecteur déplacement ; (b) Changement de distance entre 2 points au cours de la déformation.

On considère un corps qui se déforme (Fig. 4 (a)) : le point M se déplace en M' au cours de la déformation. Soit $\vec{r}$ le vecteur position du point M

$$\vec{r} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{r}' \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

On définit le **vecteur déplacement** : $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$:

$$\vec{u} \begin{pmatrix} u_1 = x'_1 - x_1 \\ u_2 = x'_2 - x_2 \\ u_3 = x'_3 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Notation : $u_i = x'_i - x_i$ avec $i = 1, 2$ ou 3 .

Remarque : la position du point M' dépend de la position du point M (sinon on aurait une translation d'ensemble) $\rightarrow \vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ ou $u_i = u_i(\{x_j\})$. Si on connaît $\vec{u}(\vec{r})$, la déformation du corps est donc complètement déterminée. On cherche donc à calculer $\vec{u}(\vec{r})$

Comment décrire les allongements du matériau ? Soient 2 points A et B voisins qui se déplacent en A' et B' respectivement au cours de la transformation (Fig. 3 (b)). On a :

$$\begin{aligned} \vec{r}_A \begin{pmatrix} x_{A1} \\ x_{A2} \\ x_{A3} \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_B \begin{pmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ x_{B3} \end{pmatrix} &\rightarrow \vec{r}'_A \begin{pmatrix} x'_{A1} \\ x'_{A2} \\ x'_{A3} \end{pmatrix}, \quad \vec{r}'_B \begin{pmatrix} x'_{B1} \\ x'_{B2} \\ x'_{B3} \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A &\rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \vec{r}'_B - \vec{r}'_A \\ \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_{B1} - x_{A1} = dx_1 \\ x_{B2} - x_{A2} = dx_2 \\ x_{B3} - x_{A3} = dx_3 \end{pmatrix} &\rightarrow \overrightarrow{A'B'} \begin{pmatrix} x'_{B1} - x'_{A1} = dx'_1 \\ x'_{B2} - x'_{A2} = dx'_2 \\ x'_{B3} - x'_{A3} = dx'_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Avec $dx'_i = x'_{Bi} - x'_{Ai} = (x_{Bi} + u_{Bi}) - (x_{Ai} + u_{Ai}) = dx_i + du_i$.

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB}\| = dl &= \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \rightarrow \|\overrightarrow{A'B'}\| = dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2} \\ dl'^2 &= \sum_i dx_i'^2 = \sum_i (dx_i + du_i)^2 = \sum_i (dx_i^2 + du_i^2 + 2dx_i du_i) \\ dl'^2 &= dl^2 + \sum_i du_i^2 + 2 \sum_i dx_i du_i \end{aligned}$$

Simplification : dans le cadre des petites déformations : $du \ll dl \rightarrow$ on néglige les termes d'ordre 2 en du_i/dx_k : on néglige donc le terme $\sum_i du_i^2$ dans l'équation précédente qui devient $dl'^2 = dl^2 + 2 \sum_i dx_i du_i$.

$$\text{Or } u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) \rightarrow du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 = \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k.$$

Notation : $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \partial_k u_i \rightarrow du_i = \sum_k \partial_k u_i dx_k$.

$$\begin{aligned} dl'^2 &= dl^2 + 2 \sum_i \sum_k \partial_k u_i dx_i dx_k \\ &= dl^2 + \sum_i \sum_k \partial_k u_i dx_i dx_k + \sum_i \sum_k \partial_k u_i dx_i dx_k \\ &= dl^2 + \sum_i \sum_k (\partial_i u_k + \partial_k u_i) dx_i dx_k \end{aligned}$$

On définit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} &= \frac{1}{2} (\partial_i u_k + \partial_k u_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \\ &\rightarrow dl'^2 = dl^2 + \sum_{i,k} 2\varepsilon_{ik} dx_i dx_k. \end{aligned}$$

Les ε_{ik} sont les composantes d'un tenseur d'ordre 2 : le **tenseur des déformations** :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Notation d'Einstein

ou « convention de somme sur les indices répétés » : quand l'indice d'une variable apparaît deux fois dans un terme, on sous-entend la sommation sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice. Cet indice est dit *muet*.

Par exemple : $\partial_k u_i dx_k = \sum_k \partial_k u_i dx_k$.

$$\rightarrow dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon_{ik} dx_i dx_k. \quad (1)$$

Propriétés du tenseur des déformation

- **Tenseur d'ordre 2** (matrice 3×3) $\rightarrow$ 9 composantes,
- **Champ de tenseur** : il dépend du point de l'espace autour duquel se fait la déformation : $\bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{r})$ autrement dit $\varepsilon_{ij}(\{x_k\})$,
- **Symétrique** : $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \rightarrow$ il n'y a donc que 6 composantes indépendantes,
- **Diagonalisable** : en chaque point, il existe une base dans laquelle seuls les éléments diagonaux de $\bar{\bar{\varepsilon}}$ sont non nuls.
 - Les axes de cette base = **axes principaux** ou **axes propres** du tenseur des déformations, notés $\vec{v}^{(1)}$, $\vec{v}^{(2)}$ et $\vec{v}^{(3)}$;
 - les éléments diagonaux du tenseur diagonalisé = les **valeurs principales**, ou **valeurs propres** du tenseur des déformations, notées $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ et $\varepsilon^{(3)}$.

$$\bar{\bar{\varepsilon}} \vec{v}^{(i)} = \varepsilon^{(i)} \vec{v}^{(i)}.$$

Dans le repère $(\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \vec{v}^{(3)})$:

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{(3)} \end{pmatrix}.$$

La base propre et les valeurs principales du tenseur des déformation changent d'un point à l'autre.

- **La trace du tenseur des déformations est invariante par changement de base.** Trace du tenseur = somme de ses termes diagonaux :
 $\text{Trace}\{\bar{\bar{\varepsilon}}\} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}.$

Représentation du tenseur des déformation

De la même manière qu'un vecteur se représente par une flèche reliant deux points, un tenseur se représente par une ellipsoïde, qui a pour directions principales les directions des trois vecteurs propres et pour demi-axes les valeurs propres correspondantes (ou les valeurs propres + 1).

Dans le cas du tenseur des déformations, il est défini localement. Les déformations principales peuvent donc changer d'un point à un autre. On a donc dans le matériau un champ du tenseur des déformations, qui peut se représenter comme un champ d'ellipsoïdes de déformation. Les directions des axes de l'ellipsoïde sont les vecteurs propres du tenseur des déformations. Les valeurs des demi-axes de l'ellipsoïde sont donc liés aux valeurs propres comme on va le voir ci-dessous.

On se place dans la base propre de $\bar{\bar{\varepsilon}}$ au point $\vec{r}$:

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{(3)} \end{pmatrix}.$$

$$(1) \rightarrow dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon^{(1)}dx_1^2 + 2\varepsilon^{(2)}dx_2^2 + 2\varepsilon^{(3)}dx_3^2$$

$$\text{or : } dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

$$\rightarrow dl'^2 = (1 + 2\varepsilon^{(1)})dx_1^2 + (1 + 2\varepsilon^{(2)})dx_2^2 + (1 + 2\varepsilon^{(3)})dx_3^2$$

dl'^2 est la somme de trois termes indépendants $\rightarrow$ la déformation est une combinaison de trois déformations indépendantes dans les trois directions principales du tenseur des déformations.

$$dx_1 \rightarrow dx'_1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon^{(1)}}dx_1 \simeq (1 + \varepsilon^{(1)})dx_1$$

$$dx_2 \rightarrow dx'_2 = \sqrt{1 + 2\varepsilon^{(2)}}dx_2 \simeq (1 + \varepsilon^{(2)})dx_2$$

$$dx_3 \rightarrow dx'_3 = \sqrt{1 + 2\varepsilon^{(3)}}dx_3 \simeq (1 + \varepsilon^{(3)})dx_3.$$

$$\rightarrow \varepsilon^{(i)} = \frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} \quad (2)$$

La i -ième valeur principale du tenseur des déformations est donc l'extension (ou la rétractation) relative dans la direction du i -ième axe principal.

Le demi-axe de l'ellipsoïde des déformations dans la direction du vecteur propre $(\vec{v}^{(i)})$ est

$$\frac{dx'_i}{dx_i} = 1 + \varepsilon^{(i)}.$$

Ainsi l'ellipsoïde est une sphère si la déformation est nulle ; elle est allongée dans le cas d'un étirement dans la direction considérée, et aplatie dans le cas d'une rétractation.

Variation relative de volume La variation de volume est :

$$dV \rightarrow dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

$$dV' = (1 + \varepsilon^{(1)})(1 + \varepsilon^{(2)})(1 + \varepsilon^{(3)})dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\simeq (1 + \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(3)})dV.$$

$$\rightarrow \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(3)} = \frac{dV' - dV}{dV}$$

$$\text{Trace}\{\bar{\bar{\varepsilon}}\} = \varepsilon_{ii} = \text{div}(\vec{u}) = \frac{dV' - dV}{dV} \quad (3)$$

Trace du tenseur des déformations est (dans n'importe quelle base) la variation relative de volume de l'élément considéré.

Note : ici on a travaillé en coordonnées cartésiennes mais il est parfois plus commode de travailler en coordonnées cylindriques ou sphériques (par exemple en coordonnées cylindriques pour décrire la torsion). On donne alors l'expression du tenseur en coordonnées cylindriques.

2.3 Loi de Hooke

Thermodynamique de la déformation On considère un corps soumis à une déformation, et on décompose la déformation en une succession de déformations infinitésimales. Pour un corps de volume V soumis à une surpression p isotrope, la variation infinitésimale du travail des forces de pression par unité de volume est :

$$\delta W_{ext} = -p\delta V/V.$$

De façon générale, on peut montrer (non fait dans le cadre de ce cours) que le travail par unité de volume des contraintes à exercer pour déformer le corps s'exprime :¹

$$\delta W_{ext} = \sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik}$$

En général, le corps déformé est en équilibre avec un thermostat. La variable thermodynamique appropriée est l'énergie libre. La variation de l'énergie libre par unité de volume (ou densité d'énergie libre) est :

$$d\mathcal{F} = d(U - TS) = -SdT + \sigma_{ik} d\varepsilon_{ik}.$$

où U est l'énergie interne par unité de volume du corps considéré. On peut donc écrire le tenseur des contraintes comme une dérivée de la densité d'énergie libre :

$$\boxed{\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ik}} \right)_T} \quad (4)$$

Première forme de la loi de Hooke Pour résoudre un cas concret de déformation, il faut écrire la densité d'énergie libre $\mathcal{F}$ du corps en fonction du tenseur des déformations. La déformation d'équilibre est alors celle qui minimise $\mathcal{F}$. Si le corps est isotrope, et que la déformation est petite et sans changement de température, on peut écrire $\mathcal{F}$ comme un développement en série des puissances de ε_{ik} :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + a \times (\text{termes d'ordre 1 en } \varepsilon_{ik}) + b \times (\text{termes d'ordre 2 en } \varepsilon_{ik}) + \dots$$

où a et b sont des coefficients constants. Notons que les termes linéaires (termes d'ordre 1) se présentent comme une somme de termes proportionnels à ε_{ik} , invariante par changement de base.

- On considère que le corps non déformé n'est le siège d'aucune contrainte, *i.e.* $\sigma_{ik} = 0$ lorsque $\varepsilon_{ik} = 0$. D'après l'équation (4), cela signifie qu'il n'y a **pas de terme linéaire** dans le développement de $\mathcal{F}$, soit $a = 0$.
- Au second ordre, il existe deux scalaires invariants par changement de base et indépendants, formés à partir des composantes ε_{ik} du tenseur des déformations : $(\varepsilon_{ll})^2$ et $\sum_{i,k} \varepsilon_{ik}^2$.

$$\rightarrow \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{ll})^2 + \mu \sum_{i,k} \varepsilon_{ik}^2 \quad (5)$$

en s'arrêtant à l'ordre 2 en ε_{ik} . λ et μ sont les **coefficients de Lamé**. Pour que la déformation s'accompagne d'une augmentation de l'énergie libre par rapport à l'état non déformé il faut :

$$\lambda, \mu > 0.$$

D'après l'équation (5), on a :

$$\begin{aligned} d\mathcal{F} &= \lambda \varepsilon_{ll} d\varepsilon_{ll} + 2\mu \varepsilon_{ik} d\varepsilon_{ik} \\ &= \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ik} d\varepsilon_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik} d\varepsilon_{ik} \\ &= (\lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}) d\varepsilon_{ik} \end{aligned}$$

Donc d'après l'équation(4) :

$$\boxed{\sigma_{ik} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}} \quad (6)$$

ou encore :

$$\bar{\sigma} = \lambda \varepsilon_{ll} \mathbb{I} + 2\mu \bar{\varepsilon} \quad (7)$$

1. δW_{int} est le travail emmagasiné par le corps au cours de la déformation. Si la déformation est réversible, ce travail est restitué lorsqu'on supprime la force extérieure à la source de la déformation : le corps reprend sa forme initiale. On a alors affaire à une *déformation élastique*. Pour des plus grandes déformations, il se peut que le corps ne revienne pas tout à fait à sa forme initiale lorsque la force extérieure est relâchée. On dit qu'il reste une *déformation résiduelle* : la déformation est *plastique*. Dans la suite, on se placera dans le cas d'une déformation élastique réversible.

où $\mathbb{I}$ est la matrice identité. L'équation (6) relie les composantes du tenseur des contraintes à celles du tenseur des déformations : c'est la **loi de Hooke**, annoncée sous la forme

$$\sigma_{ik} = \mathcal{A}_{ikjl} \varepsilon_{jl}$$

On voit que dans les 81 composantes $\mathcal{A}_{ikjl}$ du tenseur d'élasticité, seuls 2 coefficients sont indépendants : les coefficients de Lamé.

On peut inverser l'équation (6) en utilisant le fait que, d'après la même équation :

$$\sigma_{ll} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{ll} \quad (8)$$

On obtient donc :

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{ll} \delta_{ik} \right) \quad (9)$$

Les équations (6) et (9) sont deux expressions équivalentes de la loi de Hooke.

Deuxième forme de la loi de Hooke Il existe plusieurs expressions de la loi de Hooke, qui utilisent les coefficients d'élasticité correspondant au problème considéré. Les coefficients de Lamé sont pratiques pour établir théoriquement la loi de Hooke comme nous venons de le faire, mais ils ne correspondent pas d'emblée à une situation physique particulière (un certain type de contrainte ou de déformation).

Revenons à l'équation (5) et remarquons que :

- le terme ε_{ll} représente la variation relative de volume du corps au cours de la déformation. Si ce terme est nul, seule la forme du corps est modifiée : on parle de déformation de *cisaillement pur*, ou de *glissement*.
- si $\varepsilon_{ik} = Cte \times \delta_{ik}$, on est dans le cas d'une *compression uniforme* : seul le volume du corps change au cours de la déformation (mais pas sa forme).

On peut écrire le tenseur des déformations d'une déformation quelconque $\bar{\bar{\varepsilon}}$ comme une somme d'un terme de glissement et d'un terme de compression uniforme :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{\varepsilon}}_{glissement} + \bar{\bar{\varepsilon}}_{compression},$$

avec

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{compression} = \frac{1}{3} \varepsilon_{ll} \mathbb{I}$$

et

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{glissement} = \bar{\bar{\varepsilon}} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ll} \mathbb{I},$$

qui a bien une trace nulle quelle que soit la forme du tenseur $\bar{\bar{\varepsilon}}$. Sous forme indicielle, cela donne :

$$\varepsilon_{ik} = \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll}$$

On a alors d'après (6) :

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left[\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right] \\ \sigma_{ik} &= \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \varepsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right) \end{aligned}$$

que l'on peut réécrire :

$$\sigma_{ik} = K \varepsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right) \quad (10)$$

où

$$K = \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) \quad (11)$$

est le **module de compression uniforme**. La déformation à laquelle ce terme est associé dans l'équation (10) représente en effet une compression uniforme. Le dernier terme de l'équation (10) est associé à une déformation de glissement. Le coefficient μ s'appelle donc **module de glissement** ou **module de cisaillement** : $\mu = G$ où G est le module de cisaillement vu au premier chapitre de ce cours.

L'éq. (10) constitue la deuxième forme de la loi de Hooke. En inversant l'équation obtenue, on obtient la seconde expression de la loi de Hooke :

$$\boxed{\varepsilon_{ik} = \frac{1}{9K} \delta_{ik} \sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ll} \right)} \quad (12)$$

Remarques

1) On remarque ici que le lien entre ε_{ll} et σ_{ll} est déterminé par le seul module de compression uniforme K : $\sigma_{ll} = 3K\varepsilon_{ll}$, et ce quelle que soit la déformation. La donnée du tenseur des contraintes permet donc de calculer rapidement la variation relative de volume.

2) Toutes les formes de la loi de Hooke vues jusqu'ici permettent aussi de constater que lorsque le tenseur des déformations est diagonal, le tenseur des contraintes l'est également dans la même base, et vice versa.

3) L'augmentation de l'énergie libre associée à la déformation peut s'exprimer en fonction des modules K et μ : d'après (5) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{F}_0 + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k} \left[\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right]^2 \\ &= \mathcal{F}_0 + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k} \left[\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right)^2 + \frac{1}{9} \delta_{ik}^2 \varepsilon_{ll}^2 + \frac{2}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right) \right] \\ &= \mathcal{F}_0 + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k} \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right)^2 + \mu \frac{3}{9} \varepsilon_{ll}^2 + 0 \\ &= \mathcal{F}_0 + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{3} \right) \varepsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k} \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right)^2 \end{aligned}$$

que l'on peut réécrire :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \frac{K}{2} \varepsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k} \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right)^2 \quad (13)$$

La stabilité de la matière par rapport à une déformation implique donc $K > 0$ et $\mu > 0$.

Application : compression uniforme

Dans le cas d'une compression, les forces extérieures s'exercent normalement à la surface du matériau, et la contrainte correspondante est égale à $-p$. On a donc :

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}$$

soit :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

D'après la loi de Hooke (12) :

$$\varepsilon_{ik} = -\frac{p}{3K} \delta_{ik}$$

soit :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} -\frac{p}{3K} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{3K} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{3K} \end{pmatrix}$$

La variation relative de volume est :

$$\frac{\delta V}{V} = \varepsilon_{ll} = -\frac{p}{K}$$

d'où

$$-\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{K}$$

$\frac{1}{K}$ est donc bien la compressibilité isotherme du matériau considéré.

L'augmentation d'énergie libre se calcule d'après (13) :

$$\mathcal{F}_{el} = \mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \frac{p^2}{2K}.$$

Troisième forme de la loi de Hooke On considère une barre (figure 5) soumise à une force de traction homogène sur la face perpendiculaire à l'axe Oz . La force par unité de surface est d'intensité σ .

La seule force non nulle est celle qui s'exerce dans la direction Oz sur la surface de normale parallèle à Oz : $\sigma_{zz} = \sigma$. Toutes les autres composantes du tenseur des contraintes sont nulles :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

Utilisons la loi de Hooke (12) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} &= \frac{1}{9K} \delta_{ik} \sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ll} \right) \\ &= \frac{1}{9K} \delta_{ik} \sigma + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma \right) \\ \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma}{9K} - \frac{\sigma}{6\mu} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\sigma}{9K} + \frac{\sigma}{3\mu} \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} &= 0 \end{aligned}$$

On définit les **module d'Young** E et **coefficient de Poisson** ν :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma}{E} \quad (14)$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu \varepsilon_{zz}$$

D'où :

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \quad (15)$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}} = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu} \quad (16)$$

K et μ sont $> 0 \rightarrow E > 0$.

Par ailleurs le calcul donne :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (17)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (18)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (19)$$

Si on reporte ces valeurs dans les expressions établies précédemment, on obtient l'énergie libre élastique :

$$\mathcal{F}_{el} = \mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\sum_{i,k} \varepsilon_{ik}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{ll}^2 \right]$$

Les équations (17) et (18) injectées dans (10) et (12) permettent de retrouver une troisième forme de la loi de Hooke :

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{ll} \delta_{ik} \right] \quad (20)$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ik} - \nu\delta_{ik}\sigma_{ll}] \quad (21)$$

Application : compression uniaxiale selon Oz :

On considère la compression d'une barre maintenue sur les côtés de façon que ses dimensions latérales ne puissent pas varier (contrairement au cas de la traction uniaxiale on applique ici une contrainte sur les surfaces latérales pour les empêcher de se déplacer) :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

On obtient donc pour le tenseur des contraintes :

$$\sigma_{xx} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon = \sigma_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$$

En désignant la force de compression par unité de surface par $\sigma_{zz} = -p$, on a :

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} p$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -p \frac{\nu}{1-\nu}$$

L'énergie libre élastique de la barre s'écrit :

$$\mathcal{F}_{el} = \mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\sum_{i,k} \varepsilon_{ik}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{ll}^2 \right]$$

$$\mathcal{F}_{el} = \frac{p^2}{2E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}$$

3 Flexion faible des poutres

On considère une poutre de longueur L le long de l'axe Ox , et de dimensions latérales petites devant L .

La poutre est fléchie comme représenté sur la figure 6a avec un rayon de courbure R . La courbure de la poutre est positive si la concavité est tournée vers les $y \geq 0$ (ce qui est le cas sur la figure 6), et négative dans le cas contraire.

On fait les approximations suivantes :

Flexion faible : $R \gg L$,

Flexion pure : la poutre n'est soumise à aucune tension ou compression supplémentaire.

Note : le rayon de courbure dépend en général de l'abscisse x : $R = R(x)$.

3.1 Surface neutre et déformation de la poutre fléchie

Considérons une tranche mince transversale de la poutre (figure 6b). R est en fait la courbure d'une surface située en $y = y_0$. On voit sur la figure que :

- pour $y < y_0$, la poutre est soumise à une dilatation,
- pour $y > y_0$, la poutre est soumise à une compression.

Soit dx' la longueur d'un élément de poutre qui avait la longueur dx avant la déformation. On a $dx' > dx$ pour $y < y_0$, $dx' < dx$ pour $y > y_0$, et $dx' = dx$ pour $y = y_0$. La surface $y = y_0$ est celle dont la longueur ne varie pas au cours de la flexion : c'est la **surface neutre** de la poutre.

Calculons la déformation d'une surface de la poutre pour laquelle $y = cte$ avant la flexion. Le rayon de courbure de cette surface est égal à $R - (y - y_0)$. On a donc :

$$\frac{dx'(y)}{R - (y - y_0)} = d\theta$$

Or en $y = y_0$:

$$\frac{dx'(y_0)}{R} = d\theta = \frac{dx}{R}$$

L'allongement relatif de la surface située en y est donc :

$$\frac{dx'}{dx} = 1 - \frac{y - y_0}{R}$$

La déformation correspondante est :

$$\boxed{\varepsilon_{xx}(y) = \frac{dx' - dx}{dx} = -\frac{y - y_0}{R}} \quad (22)$$

3.2 Etat de contrainte de la poutre fléchie

La loi de Hooke associe à la déformation ε_{xx} une contrainte σ_{xx} . Comme la déformation consiste ici en une traction de poutre, les surfaces latérales étant libres de contrainte, on a :

$$\boxed{\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}(y) = -E \frac{y - y_0}{R}} \quad (23)$$

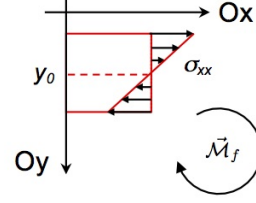
Comme les surfaces latérales sont libres, on a d'une part $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = \sigma_{zy} = 0$ à la surface libre $\perp Oy$, et d'autre part $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ à la surface libre $\perp Oz$. Pour pouvoir s'annuler aux bords, les contraintes σ_{xy} , σ_{yy} , σ_{zy} , σ_{xz} et σ_{zz} doivent rester très petites à l'intérieur de la poutre. On les considère nulles dans un premier temps (on verra plus loin sur un exemple que le calcul prouve qu'elles sont effectivement négligeables). σ_{xx} est donc la seule composante non nulle du tenseur des contraintes.

3.3 Flèche de la poutre

On appelle flèche de la poutre $\zeta(x)$ la composante selon l'axe Oy du déplacement de la surface neutre de la poutre (voir Figure 6a).

3.4 Moment fléchissant

La contrainte σ_{xx} est associée à un moment qui tend à fléchir la barre autour du pivot (local) de la surface neutre, autrement dit un moment orienté selon l'axe Oz (voir ci-contre). Nous allons calculer ce moment.



Le moment infinitésimal qui s'exerce sur un élément de surface $dy dz$ perpendiculaire à l'axe Ox , situé à la hauteur y , est :

$$d\vec{m} = (y - y_0) \vec{e}_y \wedge \sigma_{xx} \vec{e}_x dy dz = -\sigma_{xx} (y - y_0) dy dz \vec{e}_z$$

On définit le **moment fléchissant** de la poutre :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_f &= \int_{S_x} d\vec{m} \\ &= - \int_{S_x} \sigma_{xx} (y - y_0) dy dz \vec{e}_z \\ &= \frac{E}{R(x)} \int_{S_x} (y - y_0)^2 dy dz \vec{e}_z \\ \vec{\mathcal{M}}_f &= \frac{EI_z}{R} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (24)$$

où I_z est le moment d'inertie de la section géométrique S_x par rapport à la surface neutre :

$$I_z = \int_{S_x} (y - y_0)^2 dy dz$$

La courbure de la ligne neutre, qui est l'inverse du rayon de courbure, s'exprime en fonction de la flèche de la poutre $\zeta(x)$:

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 \zeta}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\zeta}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

Dans l'hypothèse de faible flexion $\frac{d\zeta}{dx} \ll 1$:

$$\frac{1}{R} \simeq \frac{d^2 \zeta}{dx^2}$$

Le moment fléchissant de la poutre devient donc :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_f = EI_z \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \vec{e}_z} \quad (25)$$

3.5 Equations d'équilibre de la poutre fléchie

A l'équilibre, le moment fléchissant de la poutre doit être égal au moment des forces extérieures $\vec{M}$ appliqué à la poutre pour la fléchir. Soit M_z la composante z de $\vec{M}$. On a :

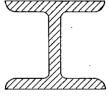
$$M_z \vec{e}_z = \vec{\mathcal{M}}_f$$

d'où l'équation d'équilibre des moments :

$$\boxed{M_z = EI_z \frac{d^2 \zeta}{dx^2}} \quad (26)$$

La poutre a donc une rigidité à la flexion qui est le produit EI_z . Si on veut augmenter la rigidité de la poutre en faisant des économies de matériau, il suffit donc de placer le plus possible de matière le plus loin possible de la ligne neutre ($y - y_0$ grand de façon à augmenter I_z). C'est ce qui explique la forme en I des poutres

métalliques utilisées dans la construction de bâtiments, comme représenté sur la figure 3.5.



Forme de poutre *IPN* utilisée dans le bâtiment.

En général, $\vec{M}$ est le moment d'une force extérieure $\vec{F}$ appliquée à la poutre. Considérons une section de la poutre de longueur dx . Le moment élémentaire $d\vec{M}$ de la force $\vec{F}$ qui fléchit la poutre est

$$d\vec{M} = dx \vec{e}_x \wedge \vec{F}$$

Soit

$$dM_z = F_y dx$$

D'où

$$F_y = \frac{dM_z}{dx}$$

F_y est appelé **effort tranchant**.

D'après (26) on obtient l'équation d'équilibre des forces :

$$F_y = E \frac{d}{dx} \left(I_z \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right) \quad (27)$$

L'équation (27) est bien utile lorsque la force F_y ne dépend pas de x , par exemple dans le cas d'une force ponctuelle appliquée à l'extrémité de la poutre. Dans le cas où la force extérieure dépend de x (par exemple lorsqu'on considère le poids de la tige comme on le verra plus loin), on peut avoir de préférence affaire à la force extérieure par unité de longueur $f_y = \frac{dF_y}{dx}$ (qui est constante dans le cas de la pesanteur et d'une poutre de section constante). On a alors une équation d'équilibre des forces linéiques :

$$f_y = E \frac{d^2}{dx^2} \left(I_z \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right) \quad (28)$$

Les équations (26), (27) et (28) constituent les équations d'équilibre d'une poutre faiblement fléchie. Dans le cas d'une poutre de section constante, le moment d'inertie I_z ne dépend pas de x et ces équations se transforment en le système suivant :

$$M_z = EI_z \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \quad (29)$$

$$F_y = EI_z \frac{d^3 \zeta}{dx^3} \quad (30)$$

$$f_y = EI_z \frac{d^4 \zeta}{dx^4} \quad (31)$$

3.6 Conditions aux limites

Pour trouver la forme $\zeta(x)$ d'une poutre fléchie, on a les équations d'équilibre ci-dessus et des conditions aux limites. Les conditions aux limites sont de deux types :

poutre posée : impose une condition sur ζ à l'abscisse du point sur lequel repose la poutre.

poutre encastrée : cela impose une condition sur la position ζ et sur la pente ζ' de la poutre au point d'encastrement.

On peut aussi avoir des conditions aux limites sur les forces ou les moments en un point de la poutre (e. g. à son extrémité). Cela se traduit, en vertu des équations d'équilibre, en une condition sur ζ'' ou sur ζ''' en ce point.

3.7 Applications

3.7.1 Déformation d'une poutre encastrée soumise à une force perpendiculaire sur l'extrémité libre.

On considère une poutre de section rectangulaire :

- longueur L le long de l'axe Ox ,
- épaisseur h le long de Oy ,
- largeur w le long de Oz ,

avec $h, w \ll L$.

La poutre est encastrée en $x = 0$. On choisit l'orientation du trièdre (Ox, Oy, Oz) de façon à ce que Ox soit parallèle à la direction d'encastrement. A l'extrémité de la poutre ($x = L$), on applique une force $\vec{F}$ dans la direction $y > 0$ qui provoque la flexion de la poutre.

Surface neutre

Comme aucune force extérieure n'est appliquée dans la direction Ox , on doit avoir

$$\begin{aligned}\int_{S_x} \sigma_{xx} dydz &= 0 \\ w \int_0^h E \frac{y - y_0}{R} dy &= 0 \\ \int_0^h (y - y_0) dy &= 0 \\ \left[\frac{y^2}{2} - y_0 y \right]_0^h &= 0 \\ \frac{h^2}{2} - y_0 h &= 0 \\ y_0 &= \frac{h}{2}\end{aligned}$$

La surface neutre est située au centre de la poutre. Pour simplifier les notations, on pose $y_0 = 0$

Forme de la poutre

On considère une tranche de poutre à l'abscisse x . Le moment de la force extérieure qui s'exerce en x est :

$$\vec{M} = (\vec{r}_L - \vec{r}) \wedge \vec{F}$$

où $\vec{r}_L$ est le point d'application de la force $\vec{F}$, soit :

$$M_z = F(L - x)$$

D'après l'équation d'équilibre (26), on a :

$$E I_z \frac{d^2 \zeta}{dx^2} = F(L - x)$$

Le moment d'inertie de la section S_x de poutre est :

$$\begin{aligned}I_z &= \int_{S_x} y^2 dydz \\ &= w \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \\ &= w \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} \\ I_z &= \frac{w h^3}{12}\end{aligned}$$

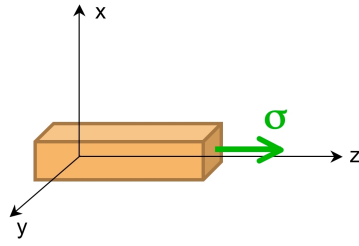


FIGURE 5 – Barre soumise à une force de traction par unité de surface σ sur la face perpendiculaire à l'axe Oz .

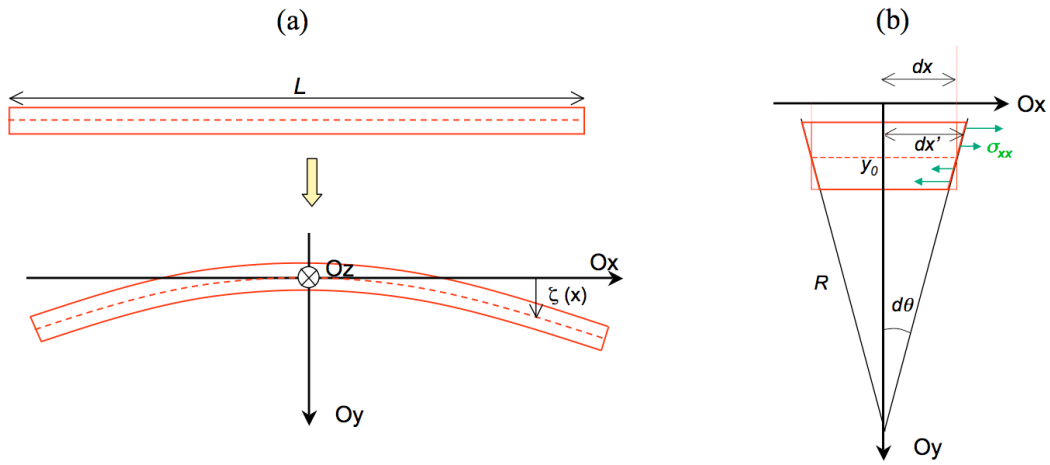


FIGURE 6 – (a) Flexion faible d'une poutre : notations. (b) tranche mince transversale de la poutre en flexion.

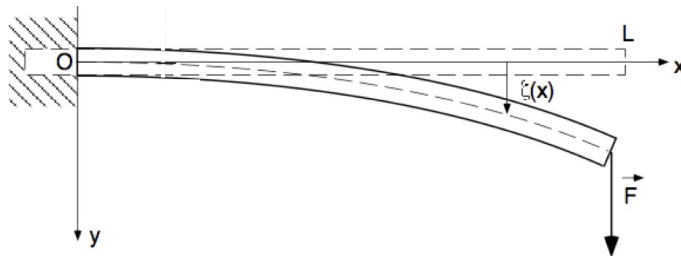


FIGURE 7 – Poutre encastée à une extrémité et soumise à une force à l'autre extrémité.

I_z est indépendant de x .

L'équation d'équilibre de la poutre est donc :

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{12F}{Ewh^3} (L - x)$$

Soit après deux intégrations :

$$\zeta(x) = \frac{12F}{Ewh^3} \left(L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + Ax + B$$

Or la poutre est encastree en $x = 0$:

$$\zeta(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\zeta'(0) = 0 \rightarrow A = 0$$

La forme de la poutre encastree est donc :

$$\zeta(x) = \frac{12F}{Ewh^3} \left(L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (32)$$

DéviatiOn maximale de la poutre

La flèche maximale Δ de la poutre est ici sa déviation en $x = L$:

$$\Delta = \zeta(L) = \frac{4FL^3}{Ewh^3}$$

La poutre peut être considérée comme une tige élastique linéaire : la flèche est proportionnelle à la force appliquée :

$$F = k\Delta$$

où

$$k = \frac{Ew}{4} \left(\frac{h}{L} \right)^3$$

est la constante de raideur de la poutre élastique fléchiée. Plus le rapport d'aspect h/L est petit, moins la poutre présente de rigidité à la flexion.

Remarques

a) Déformation maximale :

La déformation de la poutre en (x, y) est :

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{y}{R} \quad (33)$$

$$= -y \frac{d^2\zeta}{dx^2} \quad (34)$$

$$= -y \frac{12F}{Ewh^3} (L - x) \quad (35)$$

$|\varepsilon_{xx}|$ est maximal en $x = 0$ et $|y| = h/2$:

$$|(\varepsilon_{xx})_{max}| = \frac{6FhL}{Ewh^3}$$

$$= \frac{3h}{2L} \frac{\Delta}{L}$$

$$|(\varepsilon_{xx})_{max}| \ll \frac{\Delta}{L}$$

b) Etat de contrainte de la poutre :

D'après (35) :

$$|\sigma_{xx}|_{max} = E |\varepsilon_{xx}|_{max} \sim \frac{FL}{wh^2}$$

Il existe aussi une contrainte tangentielle σ_{xy} liée à la force extérieure $\vec{F}$ appliquée dans la direction Oy sur la surface de la poutre de normale $\vec{e}_x$:

$$\sigma_{xy} = \frac{F}{wh}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} \right| &\sim \frac{F}{wh} \frac{wh^2}{FL} \\ &\sim \frac{h}{L} \\ \left| \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} \right| &\ll 1 \end{aligned}$$

On voit bien que, dans le cas d'une poutre allongée, seule la contrainte normale σ_{xx} doit être prise en compte, comme annoncé en début de chapitre.

3.8 Déformation d'une poutre encastree soumise à son propre poids.

On considère la poutre rectangulaire (longueur L , largeur w , épaisseur h) encastree en $x = 0$, la direction d'encastrement étant selon l'axe Ox . La poutre est libre à son extrémité, mais est fléchie sous son propre poids.

La force extérieure exercée en x est le poids de la portion de poutre comprise entre les abscisses x et L :

$$F_y(x) = \rho g w h (L - x)$$

où ρ est la masse volumique de la poutre et g est l'accélération de la pesanteur. On peut alors utiliser l'équation d'équilibre (27). Mais on peut aussi remarquer que la poutre est soumise à une force linéique constante $f_y = \rho g w h$ et utiliser l'équation d'équilibre (28)². On obtient :

$$\begin{aligned} \rho g w h &= E \frac{d^2}{dx^2} \left(I_z \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right) \\ &= \frac{E w h^3}{12} \frac{d^4 \zeta}{dx^4} \end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{d^4 \zeta}{dx^4} = \frac{12 \rho g}{E h^2}$$

Après quatre intégrations :

$$\zeta(x) = \frac{\rho g}{E h^2} \frac{x^4}{2} + A x^3 + B x^2 + C x + D$$

où A , B , C et D sont des constantes.

Conditions aux limites :

- Poutre encastree : $\zeta(0) = (0)$ et $\zeta'(0) = (0) \rightarrow C = D = 0$

- Extrémité libre en $x = L$:

a) Force nulle en $x = L$

$$F_y(L) = 0$$

$$\zeta'''(L) = 0$$

$$A = -\frac{\rho g}{E h^2} 2L$$

Donc :

$$\zeta(x) = \frac{\rho g}{2 E h^2} (x^4 - 4 L x^3) + B x^2$$

a) Moment nul en $x = L$

$$M_y(L) = 0$$

$$\zeta''(L) = 0$$

$$B = \frac{3 \rho g}{E h^2} L^2$$

Donc :

$$\zeta(x) = \frac{\rho g}{2 E h^2} (x^4 - 4 L x^3 + 6 L^2 x^2) \quad (36)$$

La flèche maximale de la poutre est :

$$\Delta = \zeta(L) = \frac{3 \rho g L^4}{2 E h^2}$$

2. On retrouve bien $F_y(x) = \int_x^L f_y dx' = \rho g w h (L - x)$.

4 Flambage d'une poutre (*buckling*)

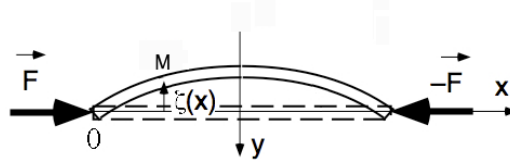


FIGURE 8 – Géométrie de flambage d'une poutre chargée axialement à ses extrémités libres.

On considère une poutre de longueur L et d'axe Ox chargée axialement à ses deux extrémités par deux forces $\pm F\vec{e}_x$. La barre est fixée et articulée aux deux bouts. Bien que la force ne soit pas dans la direction Oy , l'expérience que l'on peut faire en comprimant une baguette fine prouve que si la compression est suffisamment forte, la baguette fléchit.

On suppose la poutre fléchie et on note $\zeta(x)$ sa déflexion à l'abscisse x (figure 8).

Au point M d'abscisse x , le moment de la force extérieure $\vec{F}$ est :

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \overrightarrow{MO} \wedge \vec{F} \\ &= \zeta(x)\vec{e}_y \wedge F\vec{e}_x \\ &= -\zeta(x)F\vec{e}_z \\ M_z &= -\zeta(x)F\end{aligned}$$

L'équation d'équilibre (26) s'écrit donc :

$$EI_z \frac{d^2\zeta}{dx^2} = -\zeta(x)F$$

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{F}{EI_z} \zeta(x) = 0$$

Si la section de la poutre est constante, alors I_z ne dépend pas de x et l'équation ci-dessus admet des solutions de la forme :

$$\zeta(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x) \quad \text{avec} \quad \alpha = \sqrt{\frac{F}{EI_z}}$$

Compte tenu des conditions aux limites :

$$\begin{aligned}\zeta(0) = 0 &\rightarrow A = 0 \\ \zeta(L) = 0 &\rightarrow B \sin(\alpha L) = 0\end{aligned}$$

La solution non triviale est donc :

$$\sin(\alpha L) = 0$$

Soit

$$\alpha = \frac{p\pi}{L} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{N}$$

D'où :

$$F = p^2 \pi^2 \frac{EI_z}{L^2} \quad (37)$$

Une solution fléchie ne peut exister que si $F \geq F_c$ avec

$$F_c = \pi^2 \frac{EI_z}{L^2} \quad (38)$$

F_c est le seuil de flambage. Pour une poutrelle hauteur h et de largeur w on a

$$F_c = \pi^2 \frac{Ewh^3}{12L^2} = \pi^2 \frac{Ewh}{12} \left(\frac{h}{L} \right)^2$$

La contrainte critique de flambage est donc :

$$\sigma_c = \frac{F_c}{wh} = E \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{h}{L} \right)^2.$$

Plus le rapport d'aspect h/L est petit, plus le seuil de flambage est bas.

Note : si la force extérieure $F \geq F_c$ (F_c correspondant à $p = 1$) augmente, la déformation augmente elle-aussi. La tige prend les formes représentées fig. 9.

Remarque : Le flambage concerne aussi les plaques minces élastiques. Il est à l'origine de certains reliefs géologiques (bosses et creux secondaires après la compression d'une masse continentale).

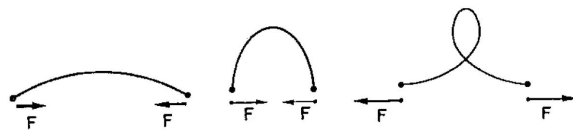


FIGURE 9 – Formes d'un tige ayant flambé, pour $F \geq F_c$ (grandes déformations).