

MP28 - Instabilités, phénomènes non-linéaires

Joseph Delpy
Prépa Agreg ENS Paris-Saclay
Correcteur : Antoine Bricard

Mars 2021

Table des matières

1 Pendule pesant aux grands angles	1
1.1 Formule de Borda	2
1.2 Enrichissement spectral	2
2 Le "bifurcateur"	2
2.1 Equations	3
2.2 Bifurcations	3
3 Oscillateur de Van der Pol - Portraits de phase	3
3.1 Fonctionnement	4
3.2 Le dipôle non-linéaire (noté N.L.)	4
3.3 Mesures à effectuer	5
3.3.1 Démarrage des oscillations	5
3.3.2 Mise en évidence d'un cycle limite stable	5
4 Conclusion	5
5 Tableau	5
6 Manip surprise	5
7 Entretien : questions	7
8 Commentaire	7

1 Pendule pesant aux grands angles

Matériel :

- pendule pesant
- boîte de masses
- boîtier d'amplification du capteur potentiométrique + câble secteur
- 3 fils simple
- 1 coax
- oscilloscope 2 voies + câble secteur

Dans cette première partie, on étudie l'effet des non-linéarités induites par l'expression exacte du moment du poids. L'équation du mouvement est :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

$$\text{où } \omega_0^2 = \frac{mgl}{J}.$$

1.1 Formule de Borda

En effectuant un développement à l'ordre 3 en θ ainsi qu'une résolution perturbative, on trouve la formule de Borda :

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{16}\right) \Rightarrow T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

où θ_0 est l'amplitude instantanée des oscillations. Pour ces mesures, il faut utiliser un pendule pesant qui n'a pas de mandrin de perceuse (ceux-là servent pour les pendules couplés). Le capteur de rotation est un potentiomètre, relié à un boîtier d'amplification. Relier l'oscilloscope à la borne " θ ".

Réaliser l'étalonnage du capteur : pour ça, pour des positions du pendule lues sur le rapporteur comprises entre -80° et $+80^\circ$ (zone de linéarité du capteur), mesurer à l'oscilloscope la tension continue fournie par le capteur. Régler le gain et l'offset de l'ampli pour que la tension soit la plus proche de 0 pour $\theta = 0$ et que l'amplitude du signal soit de l'ordre de 1 ou 2 V pour $\pm 80^\circ$. Réaliser un ajustement linéaire, déduire la loi d'étalonnage $U = a + b\theta$.

Protocole de mesure : Choisir une masse permettant d'avoir une période d'oscillations pas trop faible. Pour des angles de lâcher du pendule compris dans la zone de linéarisation du capteur, réaliser une mesure de période grâce au mode single de l'oscilloscope. Attention, la formule de Borda fait intervenir l'amplitude des oscillations, mais en raison des frottements, celle-ci décroît en fonction du temps (ce qui n'est pas pris en compte dans notre modèle). Du coup, **ça ne sert à rien de faire la mesure de période sur plus de 3 oscillations**, puisque l'amplitude ne sera plus la même. Mesurer également θ_0 en mesurant l'amplitude du premier maximum du signal et en utilisant la loi d'étalonnage obtenue précédemment. **Tracer $T = f(\theta_0^2)$, valider la loi de Borda**. L'ordonnée à l'origine de l'ajustement affine donne la période des oscillations sans correction non-linéaire. On peut également vérifier qu'on trouve le facteur $1/16$.

1.2 Enrichissement spectral

Pour un amplitude d'oscillation intermédiaire, réaliser une FFT du signal des oscillations. Pour les paramètres, on a $T \simeq 1.5$ s, donc $f_1 \simeq 650$ mHz. On veut une précision environ 10 fois plus faible, disons 40 mHz. Cela correspond à 20s d'acquisition, donc une base de temps de 2 secondes. le critère de Shannon est largement respecté pour les effets qu'on s'attend à observer, c'est-à-dire l'apparition d'une harmonique à $3 f_1$ (donc vers 2 Hz), due à la présence du sinus dans l'équation du mouvement : c'est le phénomène d'**enrichissement spectral**, qui est commun aux systèmes non-linéaires.

Transition : Ici, les effets non-linéaires à prendre compte ne nous permettent d'obtenir que des corrections à la dynamique du pendule. En revanche, elles ne modifient pas notre compréhension du problème, et en particulier, la position d'équilibre ($\theta = 0, \dot{\theta} = 0$) reste stable quelle que soit les paramètres du problème. Nous allons voir une seconde expérience pour laquelle ça ne sera pas le cas.

2 Le "bifurcateur"

Matériel :

- Le bifurcateur
- boîte de bille scotchée à la base du bifurcateur
- alimentation continue (qui peut aller jusqu'à 24V) + câble secteur
- tachymètre rotaro gris (stock Méca A)
- Stroboscope + câble secteur

Il s'agit d'une bille circulant dans une gouttière en forme d'anneau, monté sur l'arbre d'une machine à courant continu. La rotation de l'anneau, par création d'une force centrifuge, va éjecter la bille hors de la position d'équilibre $\theta = 0$ au delà d'une vitesse angulaire critique. A nouveau, les non linéarités proviennent de considération purement géométriques lors de la mise en équation du problème. On va montrer qu'ici, suivant les valeurs d'un paramètre de contrôle qui est la vitesse angulaire de l'anneau, certaines positions d'équilibre existent ou non, et sont stables ou non.

Alimenter la MCC avec une alimentation stabilisée continue. **Ne pas dépasser 24 V** (de toute façon la vitesse correspondante est bien trop élevée).

2.1 Equations

Juste un peu de théorie, à écrire au tableau sans forcément trop de discussion :
Dans le repère tournant, la bille a une énergie potentielle effective

$$E_p = mgR(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2}m\Omega^2 R^2 \sin^2 \theta$$

Les positions d'équilibre sont telles que $\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$ soit :

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \arccos \frac{g}{\Omega^2 R} \end{cases} \quad \text{si } \Omega \geq \Omega_c = \sqrt{g/R}$$

On peut également montrer que dans le cas $\Omega > \Omega_c$, alors la position d'équilibre $\theta = 0$ devient instable, d'où le "décollement" de la bille.

2.2 Bifurcations

Protocole de mesure : La mesure de vitesse de rotation se fait grâce à un tachymètre optique, monté avec une pince et une noix sur un pied. Régler l'ensemble de manière à viser le bout de scotch réfléchissant apposé sur l'anneau du bifurcateur. Faire en sorte que l'incidence du spot laser soit environ normale, en réglant l'inclinaison du tachymètre.

Pour la mesure de l'angle correspondant à la position de la bille, une première méthode est de se placer dans le noir et d'utiliser un stroboscope pour "figer" le bifurcateur et lire une valeur de l'angle sur le rapporteur intégré (avec une précision relative, environ 3°...). Le correcteur a également proposé une méthode avec prise de photo en mode rafale et traitement d'image (A tester, les photos seront probablement floues, et même si elles ne le sont pas, il faut que le rapporteur soit visible...)

Mesures à effectuer : Pour des vitesses de rotation comprises entre 0 et 2 ou 3 Ω_c , mesurer l'angle de la position d'équilibre de la bille. Pour évaluer l'incertitude sur la vitesse de rotation, se reporter à la doc du tachymètre optique, ou observer directement les fluctuations de la valeur lue. A partir de là, on peut proposer deux tracés à exploiter :

- Tracé de $\cos \theta$ en fonction de $1/\Omega^2$. Dans ce cas, dans la zone du graphe qui correspond à $\Omega > \Omega_c$ est une droite de pente Ω_c^2 . On accède donc à une valeur relativement précise de ce paramètre, qui marque le changement de position d'équilibre stable.
- Tracé de θ en fonction de Ω : ce graphe est ce que l'on appelle un **diagramme de bifurcation**. Formellement, il s'agit d'une bifurcation supercritique, dont on trace l'une des deux branches : en fait, la bille peut partir soit d'un côté soit de l'autre lors du franchissement de la vitesse critique. En raison de l'état de surface et des frottements, la probabilité n'est pas forcément 1/2 ; dans tous les cas, on ne trace qu'une branche à la fois. Montrer ce graphe permet de discuter la valeur de l'exposant critique (ici 1/2) et de parler rapidement des transitions de phase si on en a le temps et l'envie.

Difficultés : A priori pas grand chose, la manip marche très bien et tout est très reproductible. La vitesse angulaire critique est proche de 15 rad.s⁻¹. la seule difficulté peut être liée au départ de la bille. Parfois, elle ne quitte simplement pas la position d'équilibre $\theta = 0$, en raison des frottements. Dans ce cas, on peut essayer d'augmenter rapidement la vitesse près du point critique pour la faire décoller, puis faire les mesures en redescendant la vitesse du moteur (phénomène d'**hystérésis**).

3 Oscillateur de Van der Pol - Portraits de phase

Matériel :

- plaquette "oscillateurs non-linéaires" (doc : <https://media.educ.space/labmedias/50/14/501453a53909efb197f8db45> Notice_oscillateurs_nonlineaires.pdf)
- 3 sondes d'oscilloscopes
- oscilloscope 2 voies + câble secteur
- alim +15/-15 pour AO

Pour finir, on présente une manip plus complexe, que l'on va traiter en introduisant la notion de **portraits de phase**. Il s'agit de l'oscillateur de Van der Pol (plaquette oscillateurs non-linéaires dans la collection). Il s'agit d'un oscillateur avec une structure à double intégrateur, qui le rapproche d'un oscillateur harmonique, à laquelle on vient intégrer un dipôle non linéaire (loi entrée-sortie en polynôme d'ordre 3).

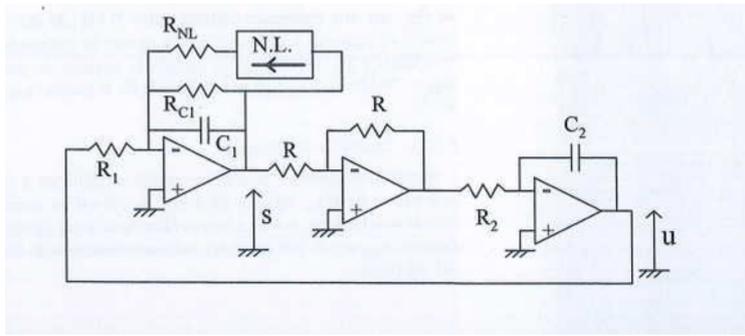


FIGURE 1 – Structure à double intégrateur de l'oscillateur de Van der Pol. Les deux potentiels u et s sont accessibles sur la plaquette grâce aux deux points de prises de tension notés V_u et V_s .

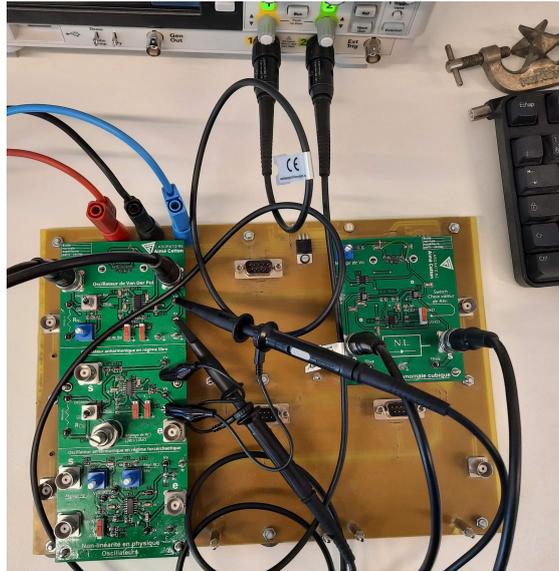


FIGURE 2 – Branchements à réaliser : la borne E sur la borne E, la borne S sur la borne S. Les tensions V_u et V_s sont mesurées à l'aide de sondes d'oscillo.

3.1 Fonctionnement

Pour les détails du fonctionnement, voir le chapitre 6, "Phénomènes non-linéaires en physique", du bouquin de Krob, *Electronique expérimentale*, ainsi que la doc associée à la plaquette (lien dans la liste du matériel). L'équation qui régit la dynamique de l'oscillateur est la suivante :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - \varepsilon \omega_0 \left(1 - \frac{s^2}{s_0^2} \right) \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

où ε , ω_0 et s_0 sont des fonctions des composants du circuit (voir le Krob).

3.2 Le dipôle non-linéaire (noté N.L.)

C'est un dipôle donc la caractéristique entrée-sortie est cubique, de la forme $s = \alpha e + \beta e^3$. C'est de lui que vient la non-linéarité de l'oscillateur. Son poids dans la structure globale est directement liée à la résistance non-linéaire R_{NL} que l'on place en série avec lui. Le paramètre α est modifiable à l'aide d'un petit potentiomètre blanc.

On peut tracer la caractéristique de ce dipôle (section 6.1.2 du bouquin de Krob). **Mesurer la valeur de la pente α (qui est négative!) au voisinage de l'origine de la caractéristique entrée/sortie du dipôle.** Une bonne valeur pour la suite est environ -0,25. Ce paramètre alpha conditionne le démarrage des oscillations, qu'on se propose de quantifier.

3.3 Mesures à effectuer

Pour le branchement des sondes d'oscilloscopes, se référer à la figure 2. Brancher chacune des sondes sur les bornes V_u et V_s , les visualiser à l'oscilloscope.

3.3.1 Démarrage des oscillations

Initialement au repos, les oscillations du système démarrent si $R_{NL} \leq -\alpha R_{C1}$, où R_{C1} vaut $100\text{k}\Omega$. En effet, dans ce cas, ε devient positif et $s(t=0) = 0$ donc le terme d'amortissement devient un terme d'amplification : la position d'équilibre ($u=0, s=0$) du système devient **instable**. La valeur de R_{NL} est ajustable à l'aide d'un potentiomètre à gauche de la plaquette. Avec initialement R_{NL} à fond, le diminuer jusqu'à avoir démarrage lent des oscillations. Mesurer la résistance R_{NL} correspondante à l'ohmmètre **en déconnectant préalablement la résistance à l'aide de l'interrupteur associée**. On doit trouver environ $25\text{ k}\Omega$.

Comparer la mesure avec la valeur "théorique" (qui repose sur la mesure expérimentale de α). Continuer à diminuer R_{NL} : montrer que d'oscillations quasi-harmoniques on passe à des oscillations de relaxation (donc franchement anharmoniques).

3.3.2 Mise en évidence d'un cycle limite stable

Une fois le seuil d'oscillation dépassé, se placer en mode XY pour tracer le portrait de phase du système. **ATTENTION** : On ne visualise pas le portrait de phase (s, \dot{s}), mais l'espace $(u, \dot{s}) = (u, \dot{u})$. Il faut expliquer que ça ne change strictement rien en terme d'existence ou non de cycle limite périodique, s et u étant reliés par une intégration. Activer la trace pour visualiser les trajectoires de l'oscillateur dans l'espace des phases.

Pour mettre en évidence la stabilité du cycle limite, on peut visualiser cet espace des phases pour R_{NL} initialement supérieur au seuil d'oscillations, puis en le baissant jusqu'à voir la trace partir du point $(0,0)$ pour rejoindre un cycle limite.

On peut également mettre la borne s à la masse, à l'aide des interrupteurs SW1 et SW2 en position haute (et pas basse, même si le dessin de la masse est en bas). Dans ce cas, le deuxième intégrateur (un vrai intégrateur, pas un pseudo-intégrateur) va partir en saturation. En terme de l'espace des phases, on est donc à une position ($u \neq 0, \dot{u} = 0$), ce qui est équivalent à un lâcher de pendule sans vitesse initiale. Rabaisser l'interrupteur, le cycle converge de l'extérieur du cycle limite vers ce dernier.

4 Conclusion

On a montré dans ce montage comment la non-linéarité des systèmes physiques affectaient le comportement de ces systèmes. Pour le pendule simple, rien de nouveau : on ne fait que corriger les phénomènes qu'on connaît déjà. Pour le bifurcateur, on met en évidence le changement de position d'équilibre du système à partir d'une certaine valeur d'un paramètre de contrôle : c'est la notion de **bifurcation**. Enfin, l'oscillateur de Van der Pol nous permet de mettre en évidence l'efficacité des **portraits de phase** en temps qu'outils d'étude des systèmes non-linéaires, puisqu'ils permettent d'interpréter rapidement et graphiquement l'existence de cycles limites et leur stabilité.

On peut ouvrir sur le chaos : on a étudié ici que des systèmes dynamiques de dimension inférieure à 3, de sorte que le théorème de Poincaré-Bendixson interdit un comportement chaotique. En revanche, si l'on force l'oscillateur de Van der Pol, on rajoute une dimension temporelle (dans l'expression du forçage) et donc on peut observer un comportement chaotique.

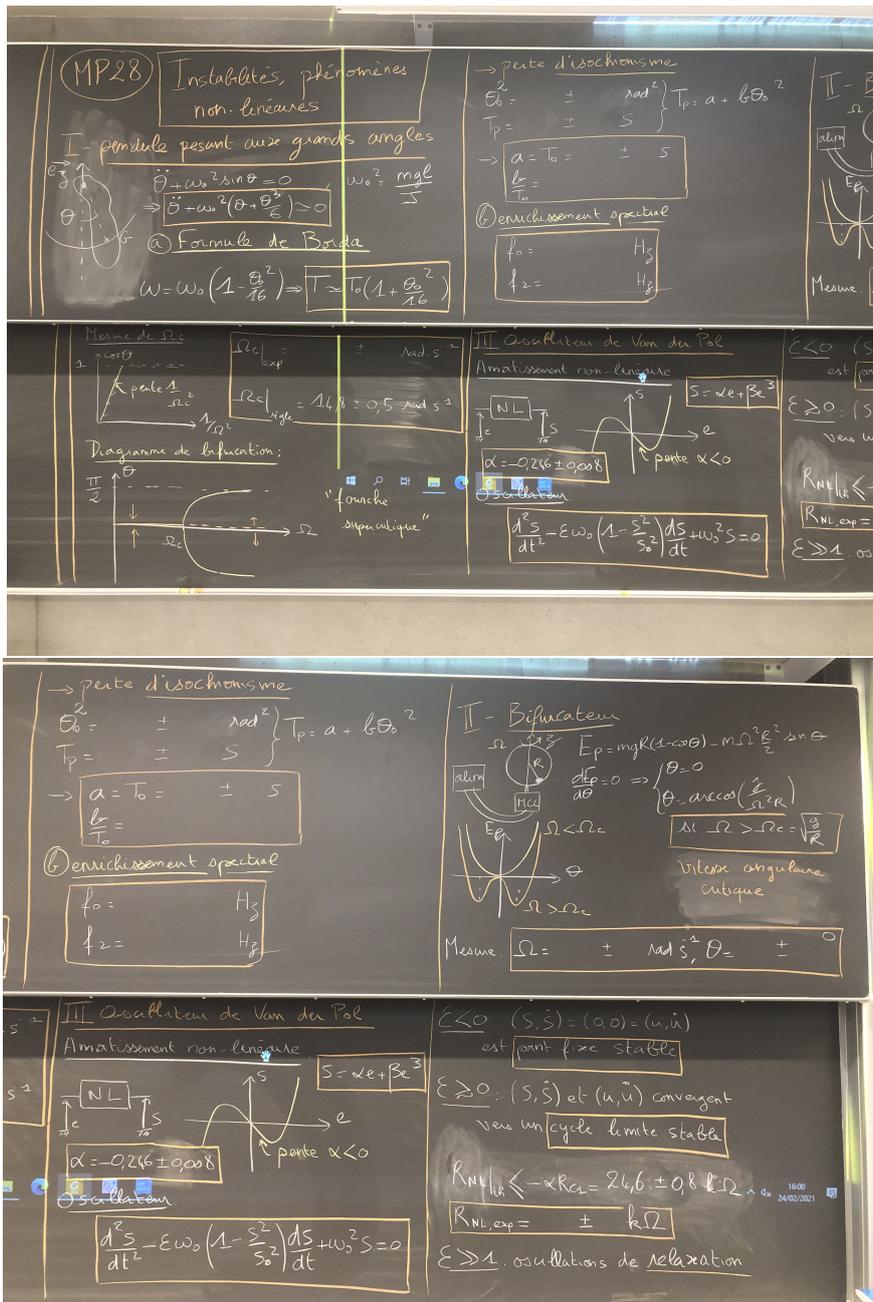
5 Tableau

6 Manip surprise

Calorimétrie : mesure de la capacité thermique d'un petit cube métallique

Matériel :

- calorimètre
- bouilloire
- cube à étudier



- balance
- un évier

Méthode conseillée par le correcteur : Placer le cube dans le calorimètre, verser un certain volume d'eau. Attendre la thermalisation, faire une première mesure de température. Vous êtes alors sûrs que le calorimètre, l'eau et le cube ont la même température (ce qui n'est pas le cas si vous introduisez le cube sans eau dans le calorimètre après l'avoir tenu dans votre main).

Faire chauffer une masse d'eau proche de celle introduite dans le calorimètre. Attendre l'ébullition, verser l'eau dans un récipient placé sur la balance déjà tarée. Mesurer la masse et la température de l'eau puis la verser immédiatement après mesure dans le calorimètre. Fermer le calorimètre, introduire le thermomètre.

La température va varier assez vite, se stabiliser, puis se remettre à diminuer. Relever la valeur entre les deux diminutions; la seconde correspond aux pertes du calorimètre. Remonter à la capacité thermique du cube. Si vous ne supposez pas le calorimètre parfait, alors il faut faire une première manip pour déterminer sa capacité thermique.

7 Entretien : questions

- **Rôle du contre-poids ?** S'affranchir du moment du poids créé par la masse pesante de la tige du pendule. Cf. TP de mécanique. Ici, on ne fait pas une étude poussée du pendule en fonction de la masse ajoutée, donc a priori ça n'est pas absolument nécessaire.
- **Paramètres d'acquisition lors de la TF ?** On veut une résolution pas trop mauvaise, mais pas acquérir trop longtemps, sinon on verra un amortissement du mouvement du pendule et donc un élargissement des pics de la TF. J'ai choisi 2s par division, comme expliqué dans le CR.
- **Qu'est ce que le portait de phase aurait pu nous donner comme un info sur cette première manip ?** On aurait pu mettre en évidence la déformation des trajectoires elliptiques aux grands angles. Cependant, pour que ce soit vraiment visible, il faut être proche de la séparatrice dans le diagramme des phases, donc lancer le pendule avec des angles bien supérieurs à 90° .
- **Pourquoi observait-on des harmoniques a chaque multiple de f_1 dans la TF alors qu'on ne s'attend à voir qu'un harmonique de rang 3 ?** Bonne question ! Je n'ai pas de réponse. A creuser.
- **Pourquoi un stroboscope serait plus précis qu'un tachymètre ?** C'est ce que j'ai dit pendant la présentation, c'est bien sûr une bêtise. Un tachymètre est un instrument de mesure, pas un stroboscope.
- **Pourquoi utiliser un pendule pesant pour la formule de Borda ?** A priori, on peut se contenter d'un pendule simple. simplement la structure du pendule pesant avec un capteur potentiométrique permet d'avoir une image de θ à tout instant, et donc rend possible les tracés de TF. Avec une masse attachée à un fil, on ferait des mesures de période au chronomètre...
- **Quel sens donner au barres d'erreur lors du tracé de la droite $T = f(\theta_0^2)$?** Si on refaisait la mesure, on aurait à priori 95% de chance d'obtenir une valeur dans l'intervalle donnée. **Si la droite tracée passe proche du centre de l'intervalle de confiance, et ce pour tous les points du tracé, qu'en conclure ?** On a probablement surestimé les incertitudes.
- **Commenter le choix de mesurer le maximum des oscillations pour une mesure de période.** Ce n'est pas une bonne idée, il vaut mieux repérer des passages par 0 du signal. On minimise ainsi l'incertitude.
- **Quel est le pas en fréquence donnée par l'oscillo lors de la TF ?** C'est directement $1/(\text{durée d'acquisition})$.
- **Pour le bifurcateur, la bille part-elle indifféremment des deux côtés ?** En raison des défauts de l'anneau (rugosité, déformation, inconstance de la rainure), non. Il faudrait tester, mais on peut s'attendre à du 60% d'un côté, 40 de l'autre.
- **Quelles sont les conséquences du fait que la bille est un solide et pas un point matériel ?** Cela peut modifier la bifurcation du système : comme la bille est un solide, elle peut acquérir une énergie cinétique de rotation. Ca n'est pas pris en compte dans les équations, on peut imaginer que la bille se mette à tourner mais ne décolle pas par exemple.
- **Est-ce qu'on peut imaginer aller au plus près de la bifurcation ?** En fait, non : en raison des hystérésis dus aux frottements secs, on a plutôt une transition du second ordre, c'est à dire que la bille saute d'un coup d'un état métastable à l'état stable se trouvant sur la fourche du diagramme. C'est pour ça qu'on fait la mesure de Ω_c à l'aide du tracé de $\cos \theta = f\left(\frac{1}{\Omega^2}\right)$.
- **En théorie, la bille peut partir indifféremment aux angles positifs ou négatifs. Du coup, on brise le principe de Curie ?** Non ! On a brisure spontanée de symétrie (discrète ici), oui, mais si on fait l'expérience une infinité de fois, on trouvera autant de billes aux angles positifs que négatifs. Statistiquement, on retrouve bien la symétrie de la cause dans les effets. Le principe de Curie est sauvé.

8 Commentaire

- A moins de faire de la métrologie, ne pas mettre deux chiffres significatifs à une incertitude (j'ai identifié l'incertitude sur la valeur d'une fréquence au pas de la TF, c'est à dire 38 mHz pendant la présentation. Dire 0.04 Hz dans ce cas.)
- Il y a un problème de temps, mais j'ai été très lent durant la présentation. Je pense que ca peut rentrer en 30 minutes, mais il ne faut pas détailler trop la théorie, et foncer sur les manip.
- La mesure de la fréquence triple dans le spectre n'est pas primordiale. Il y a suffisamment de mesure dans le montage, on peut montrer qualitativement l'enrichissement spectral.

- C'est bien de ne pas faire que de la mécanique. C'est bien de mettre de l'électronique (on aurait pu faire l'oscillateur de Duffing (qui est peut-être plus facile à présenter d'ailleurs...))
- On aurait pu faire de la méca flu, avec l'instabilité de Rayleigh-plateau.
- L'oscillateur à pont de Wien est envisageable, mais les non-linéarités viennent de l'ALI, c'est moins intéressant !