

Paramètres caractéristiques d'un bruit :

- Etude du bruit généré par le générateur Agilent 33220A
- Etude du bruit thermique dans une résistance

- Rédaction du cours et travail expérimental associé : Jean-Baptiste Desmoulin (P.R.A.G. – Dpt Physique)
mail : desmouli@physique.ens-cachan.fr
- Réalisation de la maquette d'étude du bruit thermique : Colin Lopez (Ingénieur Recherche – Dpt Physique)
- Notions fondamentales abordées lors de cette séance :
 - Mise en œuvre de la macro d'acquisition sous Igor et des macros de traitement associées.
 - Notion de taille de mémoire à l'acquisition et ses conséquences sur l'exploitation qui suit.
 - Caractéristiques d'un bruit : distribution des valeurs, densité spectrale de puissance.
 - Filtre et bruit : notion de bande équivalente de bruit.

I. Etude d'un bruit gaussien : exemple du bruit synthétisé par un générateur Agilent 33220A.

Dans cette partie, nous allons étudier les caractéristiques du bruit produit par un générateur 33220A (bouton de forme de signal « noise »). Nous allons rechercher ses caractéristiques essentielles : densité spectrale de puissance et son évolution avec la fréquence, valeur efficace, valeur maximale en essayant de préciser ce que signifient ces grandeurs.

I. 1. Notion de bruit gaussien :

On ne peut pas aborder les signaux aléatoires et en particulier les bruits avec les mêmes outils de représentation que les signaux périodiques. Nous allons voir quelle démarche adopter en présence de tels signaux.

I.1.1. Outils de représentation d'un bruit.

Nous allons supposer que le bruit avec lequel nous allons travailler sont ergodiques, c'est-à-dire que l'évolution de ce signal aléatoire au cours du temps apporte la même information qu'un ensemble de réalisations. Par exemple, la valeur moyenne d'un bruit sera égale à la moyenne obtenue à partir de la prise d'un nombre suffisant d'échantillons.

I.1.1.1 Quelques définitions :

- La valeur moyenne d'un signal $a(t)$ est donnée par

$$\langle a(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt$$

- La valeur efficace A_{eff} de ce même signal est donnée par

$$A_{\text{eff}} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt}$$

Cette façon de définir la valeur efficace n'est pas forcément la plus pratique dans la mesure où le signal n'est connu que sur une durée limitée. Nous verrons, par la suite, qu'il est parfois possible de définir une valeur efficace à partir de l'écart-type des valeurs prises par le bruit.

Approche spectrale :

- La densité spectrale $D_a(f)$ de ce signal est définie par

$$A_{\text{eff}}^2 = \int_0^{\infty} D_a(f) df$$

L'intérêt de la densité spectrale de puissance, c'est qu'elle ne dépend que du bruit considéré, alors que la valeur efficace dépend également de la bande passante de l'appareil qui donne sa valeur.

Par ailleurs, la densité spectrale de puissance d'un signal $a(t)$ est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation (théorème de Wiener-Kinchine), cette dernière étant définie par

$$C_{aa}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(t) \cdot a(t - \tau) dt$$

1.11.2. Comportement spectral du bruit.

On peut souvent dire que le bruit, sur la plage de fréquence sur laquelle on travaille, présente un spectre constant. On va alors souvent supposer qu'il est constant quelle que soit la fréquence. On parle alors de bruit blanc (par analogie avec la lumière blanche). Il existe également des bruits dont la densité spectrale fluctue avec la fréquence. Globalement, les bruits vont avoir en général une densité qui évolue continûment avec la fréquence. Nous allons voir que pour de tels signaux, il faut commencer par se demander ce que l'on a intérêt à représenter : spectre d'amplitude ou densité spectrale de puissance ?

Sur un analyseur de spectre à balayage, comme sur un analyseur FFT, le niveau de spectre obtenu dépend des caractéristiques de l'appareil : filtre de résolution sur l'analyseur à balayage et transformée de Fourier de la fenêtre de troncation pour l'analyseur FFT. Le résultat obtenu n'est donc pas seulement une caractéristique du signal, mais dépend aussi de la méthode et des caractéristiques du processus employé.

Alors que pour un signal présentant un spectre de raies, il est intéressant de représenter la valeur efficace en fonction de la fréquence, cette représentation n'est plus intéressante dans le cas d'un bruit. Dans ce cas, il est plus judicieux de représenter la densité spectrale de puissance. L'appareil voit une valeur efficace de bruit globale donnée dans sa bande passante. Cette valeur efficace va se répartir sur une bande de fréquence donnée avec une densité qui caractérise le signal. La valeur de cette densité sera obtenue en renormalisant la valeur du spectre obtenu à partir de la bande équivalente de bruit du filtre d'un analyseur à balayage ou à partir des caractéristiques de la fenêtre de troncation.

1.1.1.3. Effet d'un filtre sur du bruit.

Dans le cas où l'on considère un bruit blanc comme signal d'entrée (densité spectrale D_e constante) du filtre linéaire de fonction de transfert $F(f)$, de gain maximal G_o alors, on peut écrire qu'en sortie, on a un bruit de valeur efficace s_{eff} (densité spectrale $D_s(f)$ qui évolue avec la fréquence) telle que

$$D_s = |F(f)|^2 \cdot D_e \quad \text{et donc} \quad s_{eff}^2 = \int_0^{+\infty} |F(f)|^2 \cdot D_e \cdot df = G_o^2 \cdot D_e \cdot \int_0^{+\infty} \frac{|F(f)|^2}{G_o^2} \cdot df = G_o^2 \cdot D_e \cdot B_{eq}$$

où B_{eq} est la bande équivalente de bruit. En utilisant cet intermédiaire, on a transformé notre filtre linéaire de gain maximum G_o , en un filtre coupant abruptement, de gain maximum G_o sur une bande de largeur B_{eq} .

Les appareils qui permettent d'obtenir une valeur efficace de bruit ont une bande passante et font donc intervenir des phénomènes de filtrage linéaire. Ainsi, le résultat affiché par l'appareil ne donnera pas directement la valeur efficace du bruit d'entrée. Il sera alors nécessaire de corriger le résultat obtenu en fonction des caractéristiques de l'appareil employé.

Mathématiquement, la bande équivalente de bruit permet de s'affranchir d'un lourd calcul d'intégrale pour relier rapidement valeur efficace et densité spectrale de puissance lorsque le bruit est blanc.

1.1.2. Bruit gaussien :

On ne peut pas prévoir quelle sera la valeur d'un bruit à un instant donné. En revanche, on peut souvent estimer la probabilité de voir ce signal prendre une certaine valeur autour de sa moyenne.

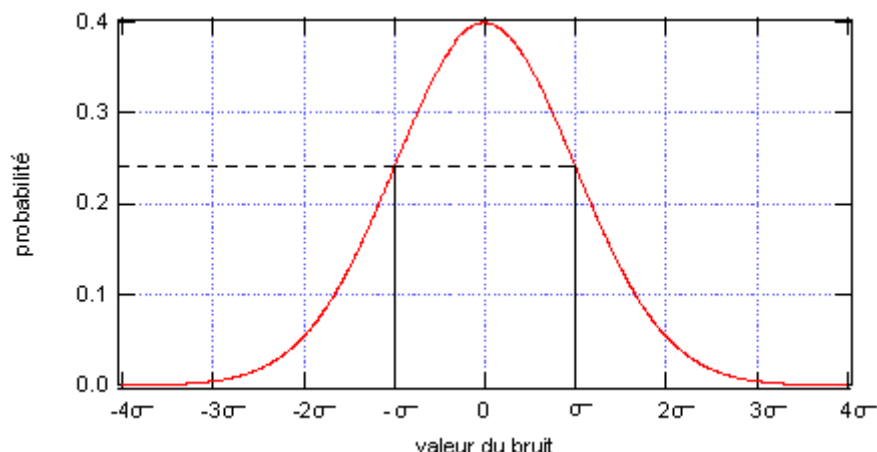
Lorsqu'un bruit résulte de l'action indépendante de différents facteurs physiques, on va pouvoir le considérer comme gaussien (théorème central-limite). Dans ce cas cette probabilité évolue suivant une gaussienne.

Pour un tel bruit dont la valeur moyenne est nulle et l'écart-type égal à σ , l'expression de la probabilité pour trouver une valeur du bruit égale à x est donnée par

$$P(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$$

Dans ce cas, l'écart-type des valeurs du bruit va nous donner de nombreuses indications :

- La valeur efficace du bruit sera égale à l'écart-type σ .
- L'intervalle de largeur 2σ centré sur zéro contient environ 68% des valeurs prises par le bruit, l'intervalle de largeur 4σ contient environ 95% des valeurs prises par le bruit et l'intervalle de largeur 6σ contient environ 99% des valeurs prises par le bruit.



C'est pourquoi, on peut dire que la valeur crête à crête du bruit que l'on observe peut être considérée comme égale à 6σ environ. Si on prend un appareil affichant 512 points, 5 points seulement sortiront de la bande de valeur de largeur 6σ . A l'œil, ces points seront peu visibles. Cette façon d'obtenir la valeur efficace de bruit n'est bien entendu pas très précise ni très rigoureuse, mais elle permet d'avoir un ordre de grandeur assez rapidement.

En pratique, les bruits ne sont jamais parfaitement gaussiens, mais on supposera malgré tout que leur comportement reste assez proche d'un bruit gaussien pour pouvoir adopter cette représentation.

Remarque : Il existe des bruits tels que la loi de distribution des valeurs est différente de la distribution gaussienne. Par exemple, on peut citer le bruit de photons. Quand on considère l'arrivée d'un faisceau lumineux monochromatique de fréquence ν de puissance moyenne constante P_{opt} , le nombre moyen de photons reçus pendant t est N tel que

$$N = \frac{P_{opt} \cdot t}{h \cdot \nu}$$

Pourtant, le flux d'énergie étant une succession de quanta, le nombre de photons reçus par unité de temps fluctue autour de N . Le nombre effectif de photons reçus sera n . La probabilité d'avoir n photons est donnée par

$$P(n) = \frac{N^n}{n!} \cdot e^{-N}$$

C'est une loi de Poisson de moyenne N .

I.2. Travail expérimental.

Nous allons faire l'acquisition du signal de bruit par un générateur Agilent 33220A (touche de signal « noise »). Le constructeur indique que ce bruit est gaussien et que la bande équivalente de bruit est voisine de 10 MHz. Nous allons vérifier que c'est le cas en faisant un histogramme des valeurs de l'échantillon acquis et en calculant sa densité spectrale de puissance. Pour que cette expérience donne des résultats satisfaisants, il va cependant falloir réfléchir aux conditions dans lesquelles faire l'acquisition (durée et nombre de point) et également réfléchir à la façon de construire l'histogramme.

I.2.1. Acquisition du signal.

L'acquisition sera faite en utilisant la macro Igor permettant de récupérer les points numérisés sur des oscilloscopes DSO6012A ou DSO5012A via une interface USB. Pour plus d'informations sur ce point, reportez vous à la notice d'utilisation de cette macro.

Le choix de la base de temps (et donc de la largeur de plage spectrale étudiée).

Pour l'analyse spectrale, nous allons avoir un bruit dont la densité spectrale chute après 10 MHz environ. Il nous faut donc une fenêtre d'analyse (égale à la moitié de la fréquence d'échantillonnage) supérieure à cette valeur. On choisira une plage d'analyse de 50 MHz. Connaissant la relation entre le nombre de points acquis, la base de temps et la fréquence d'échantillonnage, on en déduit la durée de base de temps utiliser.

• Expérience :

- Générer un bruit de 2V RMS avec le générateur 33220A et observer ce signal à l'oscilloscope avec une durée de base de temps déduite de la discussion précédente (valeur différente suivant le nombre de points). Notez la mesure donnée par la fonction de mesure « sdev » de l'oscilloscope en utilisant ses outils. Comparer à la valeur efficace indiquée par le générateur.

- En faire l'acquisition avec les quelques centaines de milliers de points possibles et récupérer la wave correspondante sous Igor. On fera en sorte de ne garder qu'une voie de l'oscilloscope active. Que se passe-t-il si les deux voies sont actives ? En utilisant la commande WaveStats, relever, l'écart-type de la séquence acquise. Comparer à la valeur efficace affichée par le générateur.

I.2.2. Analyse des données acquises :

Nous allons commencer par vérifier que la distribution des valeurs est bien gaussienne et que les valeurs obtenues sont bien celles attendues. Ensuite, nous nous intéresserons à la densité spectrale de puissance du bruit.

• Expérience :

- Calculer l'histogramme des deux séries de valeurs, entre -8V et +8V avec un pas de 0,25V. Comment fait-on le choix de ces paramètres pour l'histogramme ? Faire un ajustement par une gaussienne de l'histogramme obtenu. Peut-on dire que la distribution des valeurs du bruit sur les deux séquences étudiées est gaussienne ? Déduire l'écart-type de l'ajustement (attention, la fonction gaussienne de fit d'Igor ne donne pas directement l'écart-type).

Notez la valeur maximale indiquée par le générateur pour la valeur efficace de 2V. Peut-on donner le rapport entre ces deux grandeurs sans précisions supplémentaires ? Pourquoi ? Que signifie « valeur maximale » pour un bruit gaussien ?

- Refaire l'histogramme avec un pas plus faible de 0.05V ou pour un pas de 0,09375. Que constate-t-on ? Expliquer comment estimer la limite minimum du pas qui permet d'éviter ce problème.

- Calculer la densité spectrale de puissance avec le bouton de la macro permettant l'acquisition sur le plus grand nombre de points possible. Lisser cette densité spectrale sur 1000, 5000 et 10000 points avec la macro correspondante ajoutée à Igor (Cf notice de la macro Igor). Comment choisir le nombre n de points sur lequel on effectue le lissage (il s'agit d'une moyenne glissante, chaque point étant remplacé par la moyenne des n points qui l'entourent) ? La relation entre la valeur efficace, la bande de fréquence dans laquelle se distribue le bruit et la densité spectrale obtenue pour les plus basses fréquences est-elle cohérente ?

II. Caractérisation du bruit thermique dans une résistance

L'objectif de cette partie est caractériser le bruit thermique : forme de la distribution des échantillons, valeur de la densité spectrale dans la plage où le bruit peut être considéré comme blanc, lien entre la densité spectrale et la valeur de la résistance. Cette fois, le bruit n'est donc plus généré numériquement via un processus pseudo-aléatoire, mais il trouve son origine dans la structure physique de l'élément étudié : une simple résistance.

Ces expériences permettent d'étudier un bruit en présence d'une chaîne d'amplification, ce qui demande de manipuler les notions de densité spectrale de puissance, de bande équivalente de bruit, de valeur efficace.

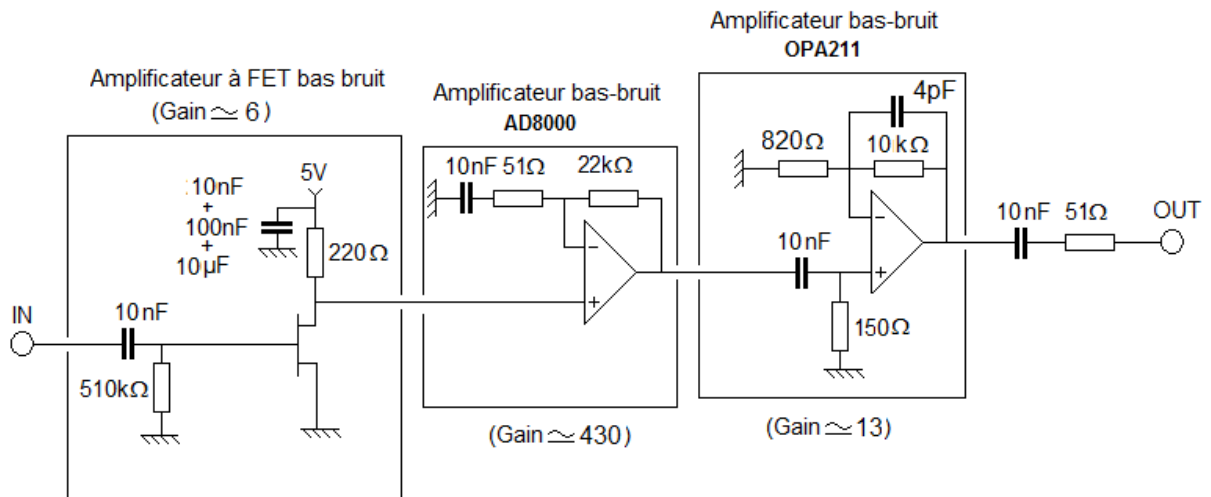
II.1. Description du système :

Le boîtier comprend un ensemble de résistances dont on veut connaître le bruit thermique, ainsi qu'une chaîne amplificatrice dont le rôle sera de dilater le bruit afin de le rendre plus facilement caractérisable. La chaîne amplificatrice, dont la forme change un peu suivant la valeur de la résistance bruyante d'entrée, déforme la densité spectrale de puissance du bruit, ce qui va demander de bien connaître sa fonction de transfert. Un circuit annexe, avec division de tension, permet de caractériser la fonction de transfert de l'amplificateur pour différentes valeurs de la résistance source de bruit, en entrée.

Par ailleurs, comme tout circuit électronique, la chaîne amplificatrice génère son propre bruit, qu'il faudra retrancher à ce que l'on récupère en sortie. C'est pourquoi on peut placer, en entrée, un court-circuit, qui n'apporte pas de bruit thermique.

II.1.1. La chaîne amplificatrice.

Le boîtier est essentiellement un système amplificateur réalisé à partir d'éléments bas bruit. L'étage d'entrée est un amplificateur à transistor à effet de champ BF868 (FET=« field effect transistor »). Il est suivi d'un étage amplificateur bas bruit, large bande, réalisés avec un amplificateur opérationnel à contre-réaction de courant AD8000 câblé en amplificateurs non inverseur avec un amplificateur bas bruit à contre réaction de tension de produit gain bande plus faible (OPA211). La chaîne d'amplification filtre les basses fréquences et notamment le bruit en $1/f$ et les composantes parasites à 50 Hz, ce qui conduit donc, globalement à un système passe-bande. Le schéma de l'ensemble est résumé sur la figure suivante :

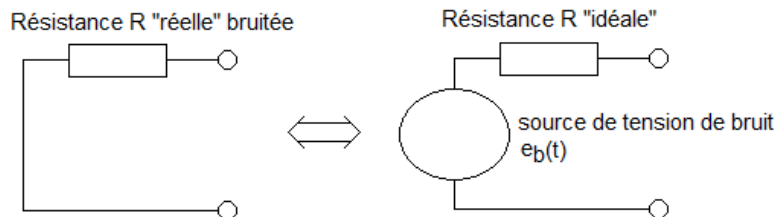


II.1.2. Les résistances à étudier

En entrée, inclus dans le boîtier, on peut placer une résistance dont on cherchera à étudier le bruit thermique. Plusieurs valeurs de résistances sont proposées, et on peut choisir la valeur voulue au moyen d'un cavalier. Les valeurs proposées sont le court-circuit pour connaître les autres causes de bruit en l'absence d'amplification, 0 Ω, 51 Ω, 100Ω, 180 Ω, 270Ω, 390 Ω, 510Ω, 680 Ω, 820Ω et 1kΩ. Ces valeurs sont données à 1%.

II.1.3. Modélisation du bruit thermique dans une résistance.

La résistance qui est à l'origine du bruit thermique peut être vue comme une résistance idéale non bruitée, en série avec un générateur de tension, qui produit le bruit thermique, signal aléatoire noté e_b . Le schéma électrique équivalent est donc de la forme suivante :



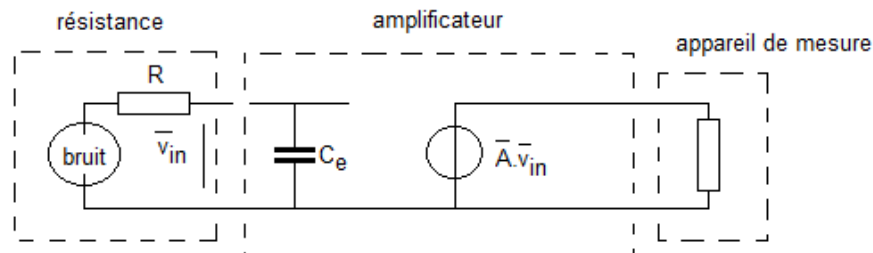
À température ambiante, la tension de bruit de la résistance peut être considéré comme blanc jusqu'à qqTHz. Plus proche du zéro absolu, la limite tombe à qq GHz, Pour des fréquences inférieures à ces limites, la densité spectrale de puissance, D_b peut être considéré comme indépendante de la fréquence et vaut

$$D_b = 4.k.T.R$$

où $k = 1,3806503 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann, R la valeur de la résistance considérée et T la température (en Kelvin).

II.1.4. Principe de l'étude du bruit thermique avec la chaîne d'amplification.

Si on utilise le schéma électrique équivalent de la résistance bruitée et qu'on le place en entrée de l'amplificateur de tension réalisé, si on suppose que ce dernier a une impédance d'entrée pratiquement infinie et une capacité d'entrée C_e à prendre en compte ($\sim 10\text{pF}$), on se retrouve dans la configuration suivante :



On note que la valeur de résistance que l'on veut caractériser aura une légère influence sur la bande passante de l'amplificateur, à cause de la capacité d'entrée de ce dernier, importante sur les circuits à FET. Si on cherche la bande équivalente de bruit de l'amplificateur, il faudra donc le faire pour chaque valeur de résistance étudiée.

- De quelle valeur de gain a-t-on besoin ?

Dans la suite, nous travaillerons à température ambiante, avec un système d'amplification dont la bande passante est de quelques MHz, ce qui signifie que le bruit thermique pourra être considéré comme blanc dans notre plage de travail.

Le carré de la valeur efficace de bruit en sortie de l'amplificateur, une fois déduit le bruit apporté par ce dernier sera alors égal à

$$v_{\text{bout}}^2 = D_b \cdot B_{\text{eq}} \cdot G_o^2$$

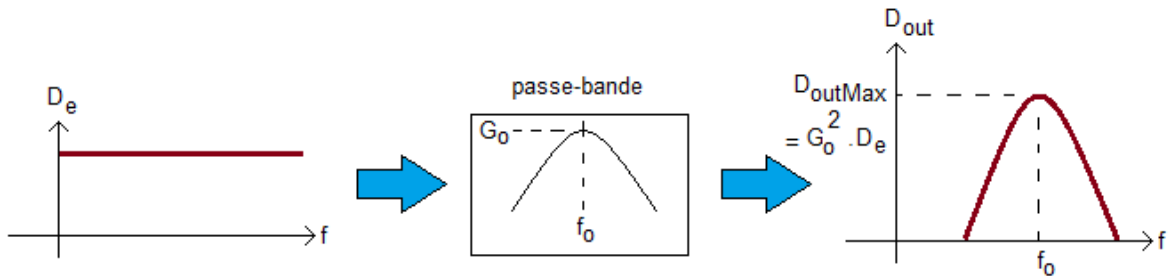
où B_{eq} est la bande équivalente de bruit de l'amplificateur et G_o le gain en tension maximum de ce dernier.

Sachant que notre amplificateur aura une bande équivalent de bruit voisine du MHz, qu'à température ambiante, pour $R=1k\Omega$, on a $D_b \sim 10^{-17} \text{ V}^2/\text{Hz}$, pour récupérer des tensions numérisables correctement à l'oscilloscope, voisines de 100mV efficace, il faut un gain de 30000 environ.

Un tel gain sur une telle bande passante demande d'utiliser des amplificateurs opérationnels bas bruit et large bande, très différents de ceux utilisés dans le TP sur les oscillateurs. Ce type de gain impose de travailler avec une tension très faible en entrée, pour éviter les saturations, quand on cherche à caractériser l'amplificateur. On devra donc placer le GBF à sa valeur minimale de signal et atténuer valeur...

• *Méthode pour étudier $D_b=f(R)$:*

Ce que l'on cherche à récupérer au final, c'est la valeur de la densité spectrale de puissance du bruit blanc de la résistance en entrée. On travaille dans les conditions suivantes :



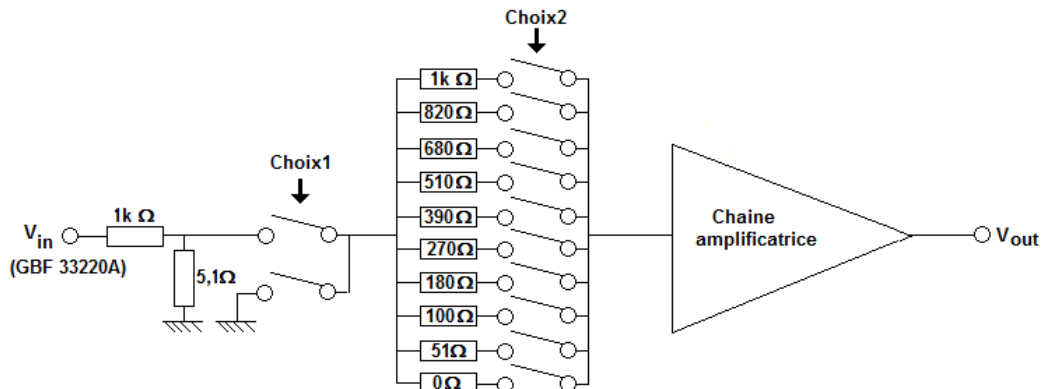
Il suffit donc de connaître précisément le gain maximum G_o du filtre passe-bande qui réalise l'amplification, la densité spectrale maximale du bruit de sortie D_{outMax} pour la résistance R et $D_{\text{outMax}(R=0)}$ obtenue quand l'entrée est en court circuit (sans résistance) et on connaît la densité spectrale de puissance D_b du bruit associé à la résistance R étudiée par

$$D_b = \frac{D_{\text{outMax}} - D_{\text{outMax}(R=0)}}{G_o^2}$$

En répétant l'expérience pour toutes les résistances, on peut tracer $D_b=f(R)$.

II.2. Travail expérimental.

Avant de s'intéresser au bruit, il faudra déterminer certaines caractéristiques de la chaîne d'amplification, afin de pouvoir interpréter le signal de sortie lorsqu'une résistance sera placée en entrée. Schématiquement, le système peut être représenté de la façon suivante :



Le choix 1 permet soit d'appliquer la tension atténuée d'un générateur d'entrée (rapport 5,1/1005,1 environ pour éviter les saturations en sortie) afin d'obtenir le diagramme de Bode de la chaîne amplificatrice pour chaque valeur de résistance de bruit, sélectionnées par « choix2 », soit de mettre l'une des borne des résistances bruyantes à la masse, le « choix2 » permettant de choisir cette résistance.

II.2.1. Caractérisations préalables du dispositif.

- Placer le cavalier sur la position permettant d'appliquer une tension d'entrée. Cette tension sera divisée par 5.1/1000 afin d'éviter une saturation de la sortie. Electroniquement, on utilise un pont diviseur de tension résistif $1k\Omega$ sur $5,1\Omega$.

- Relever la fonction de transfert de l'amplificateur autour de 1 MHz pour le court circuit et pour $1k\Omega$. Pour cela, vous pourrez utiliser la macro permettant d'obtenir le résultat par transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle. On prendra une impulsion de 30mV d'amplitude, une largeur d'impulsion de 160ns, une durée d'acquisition et une période de répétition de 10 μ s. Sur quelle plage de fréquence calculera-t-on la fonction de transfert ? Avec combien de points ? Pour que le résultat ne soit pas trop bruité, on travaillera à partir de la moyenne de 200 acquisitions de l'entrée au minimum. Constatez-vous une différence de gain maximum de la chaîne d'amplification pour les deux valeurs extrêmes de résistance ? Mesurez avec le plus de soin possible, la valeur maximale du gain de l'amplificateur pour la position de court-circuit (la moins bruitée). Pour ça on travaillera avec une sinusoïde de 30mV en entrée, on moyennera les signaux étudiés et on mesurera la valeur pic à pic de l'entrée et de la sortie. On fera des mesures par pas de 10kHz en fréquence en utilisant les statistiques pour travailler sur la moyenne des mesures et on retiendra la mesure pour la fréquence qui conduit au maximum de tension de sortie et donc au maximum de gain. On conservera ce gain maximum pour la partie suivante.

II.2.2. Etude du bruit thermique

• Sachant que l'on cherchera à analyser le bruit jusqu'à 20 MHz environ, sur quelle durée doit-on acquérir le signal pour que le calcul de la densité spectrale de puissance soit fait sur la plage voulue ? Combien de points est on susceptible de récupérer pour étudier le bruit en temporel et dans le domaine spectral ?

• Faire l'acquisition du bruit en sortie de l'amplificateur pour le court-circuit. Que représente le bruit observé dans ce cas ? Faire un histogramme des valeurs du bruit. Ce bruit est-il dépendant du bruit des résistances que l'on placera par la suite ? Que peut-on dire du bruit global observé quand la résistance n'est pas nulle ?

• Faire l'acquisition du bruit en sortie de l'amplificateur pour la résistance de 1000Ω avec la base de temps permettant la fenêtre d'analyse nécessaire.

- Faire l'histogramme de ce bruit. Que peut-on en conclure ?

- On va calculer la densité spectrale de puissance du bruit vu en sortie et chercher à en déduire la densité spectrale résultant de la résistance. Pour ça, on utilisera la commande disponible sur la fenêtre d'acquisition de la macro Igor permettant d'acquérir toute la mémoire de l'oscilloscope. Utilisez la macro permettant de calculer et de lisser la DSP en lissant sur 2000 points (justifiez cette valeur). Sauvez la DSP lissée et la DSP non lissée et superposez-les sur le même graphe. Conclusion ?

Afficher la DSP lissée en échelle linéaire ($10^{(DSPlog/10)}$) (dans le répertoire « saved » sous le nom de la wave suivi de « dsp_liss » et observer cette DSP entre 800kHz et 2 MHz. En plaçant des curseurs judicieusement autour de la zone du maximum, utiliser la fonction WaveStats dans l'onglet « analysis ». En déduire la moyenne de la DSP dans cette zone et sa valeur maximale. Où doit se trouver le résultat réel ?

Connaissant le gain maximum de l'amplificateur avec 1000 ohms, en déduire la densité spectrale de puissance du bruit thermique associé à la résistance étudiée.

• Toujours avec la même base de temps, pour chacune des autres valeurs de résistances (51 Ω , 100 Ω , 180 Ω , 270 Ω , 390 Ω , 510 Ω , 680 Ω , 820 Ω), calculez la densité spectrale de puissance de sortie lissée. Toutes les densités étant calculées et sauvee, notez pour chacune d'entre-elles sa valeur maximale comme précédemment pour 1000 ohms (avec la moyenne et avec le max entre les curseurs). En déduire la valeur de la densité spectrale de bruit apportée par les différentes résistances, en pensant à bien soustraire à chaque fois la densité pour une résistance nulle en entrée.

• Tracez l'évolution de la densité spectrale de puissance du bruit apporté par les résistances en fonction de la valeur de la résistance. Obtient-on l'évolution attendue, qualitativement et quantitativement ?

• Tracez sur le même graphe la courbe obtenue avec la moyenne entre les curseurs, la courbe obtenue avec le max entre les curseurs, et la courbe donnée par le modèle théorique. Conclusion ?

Annexe 1 : Bande équivalent de bruit de filtres passe-bas et passe-bande.

Dans le cas où l'on considère un bruit blanc comme signal d'entrée d'un filtre linéaire, de gain maximal G_o , alors, on peut écrire qu'en sortie, on a

$$s_{\text{eff}}^2 = \int_0^{+\infty} |F(f)|^2 \cdot D_e \cdot df = G_o^2 \cdot D_e \cdot \int_0^{+\infty} \frac{|F(f)|^2}{G_o^2} \cdot df = G_o^2 \cdot D_e \cdot B_{\text{eq}}$$

où B_{eq} est la bande équivalent de bruit

• Filtre passe bas du premier ordre.

considérons le filtre suivant $F(f) = \frac{G_o}{1 + jf/f_c}$

Alors, on a
$$B_{\text{eq}} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (f/f_c)^2} \cdot df = \left[f_o \cdot \text{Arc tan}\left(\frac{f}{f_c}\right) \right]_0^{+\infty} = f_c \cdot \pi/2$$

• Filtre passe-bas du second ordre.

considérons le filtre suivant $F(f) = \frac{G_o}{1 + 2 \cdot j \cdot m \cdot (f/f_o) + (j \cdot f/f_o)^2}$

Alors

$$B_{\text{eq}} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1 - (f/f_o)^2\right)^2 + (2 \cdot m \cdot f/f_o)^2} \cdot df = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1 - x^2\right)^2 + (2 \cdot m \cdot x)^2} \cdot f_o \cdot dx = f_o \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 2 \cdot (2 \cdot m^2 - 1) \cdot x^2 + 1} \cdot dx$$

(on pose $x = f/f_o$ et $H = 2 \cdot m^2 - 1$)

Pour calculer cette intégrale, on va appliquer le théorème des résidus. Pour cela, on va chercher les pôles du dénominateur

Si $H > 1$ ($m > 1$ car on ne considère que les m positifs), alors les pôles vérifient

$$x^2 = -H \pm \sqrt{H^2 - 1}$$

les pôles sont donc imaginaires purs

Si on pose

$$a = \sqrt{H + \sqrt{H^2 - 1}}$$

on peut noter que les pôles z_i s'écrivent respectivement $z_1 = j \cdot a$, $z_2 = -j \cdot a$, $z_3 = j/a$, $z_4 = -j/a$

Si $H < 1$ ($0 < m < 1$ car on ne considère que les m positifs), alors les pôles vérifient

$$x^2 = -H \pm j \cdot \sqrt{1 - H^2} = e^{\pm j \cdot \varphi} \quad (\pi > \varphi > \pi/2)$$

ce sont les nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 , de module égal à 1 qui s'écrivent respectivement

$$z_1 = e^{j \cdot \varphi/2}, \quad z_2 = e^{j \cdot \varphi/2 + \pi} = -z_1, \quad z_3 = e^{-j \cdot \varphi/2 + \pi} \text{ et } z_4 = e^{-j \cdot \varphi/2} = -z_3$$

Nous allons travailler avec la fonction de la variable complexe

$$F(z) = \frac{1}{z^4 + 2 \cdot H \cdot z^2 + 1}$$

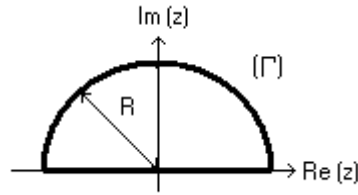
Alors, si (Γ) représente un contour fermé quelconque dans le plan complexe, on peut écrire que

$$\int_{(\Gamma)} F(z) \cdot dz = 2 \cdot j \cdot \pi \cdot \sum \text{Res}_{z_i \in \Gamma} (F)$$

où les résidus pris en compte sont ceux des pôles de $F(z)$ appartenant au contour (Γ) considéré, la définition du résidu de F pour le pôle z_i étant

$$\text{Res}_{z_i} (F) = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) \cdot F(z)$$

Du calcul des pôles, on va en déduire un parcours judicieux dans le plan complexe, sur lequel l'intégrale sera facile à calculer, et il suffira de calculer la somme des résidus pour trouver le résultat. Nous allons choisir un contour Γ ayant la forme suivante avec R qui tend vers l'infini



Les seuls résidus à prendre en compte sont ceux des pôles à partie imaginaire positive. Quelle que soit la valeur de m considérée, ces pôles sont z_1 et z_3 et on a $z_1.z_3 = -1$.

$$\text{Res}(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{(z + z_1).(z - z_3).(z + z_3)} = \frac{1}{2.z_1.(z_1^2 - z_3^2)}$$

et

$$\text{Res}(z_3) = \lim_{z \rightarrow z_3} \frac{1}{(z + z_3).(z - z_1).(z + z_1)} = \frac{1}{2.z_3.(z_3^2 - z_1^2)}$$

globalement, la somme des résidus s'écrit donc

$$\sum \text{Res}_{\Gamma(F)} = \frac{1}{2.z_1.(z_1^2 - z_3^2)} + \frac{1}{2.z_3.(z_3^2 - z_1^2)} = \frac{1}{2.(z_1 + z_3)}$$

on remarque que

$$(z_1 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2.z_1.z_3 = z_1^2 + z_2^2 - 2 = -2.H - 2 = -4.m^2$$

et donc que

$$z_1 + z_3 = \pm j.2.m \quad (\text{on ne garde que } j.2.m)$$

finalement,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x).dx = \frac{2.j.\pi}{2.2.j.m} = \frac{\pi}{2.m}$$

Compte tenu de la forme de la fonction intégrée, on peut écrire que

$$\int_0^{+\infty} F(x).dx = \frac{\pi}{4.m}$$

Donc finalement, on a

$$B_{\text{eq}} = \frac{\pi.f_o}{4.m}$$

• Filtre passe-bande du premier ordre.

considérons le filtre suivant $F(f) = \frac{G_o}{1 + j.Q.(f/f_o - f_o/f)}$

Alors
$$B_{\text{eq}} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + Q^2.(f/f_o - f_o/f)^2} .df$$

Pour calculer cette intégrale, on va, là encore, appliquer le théorème des résidus. Pour cela, on va écrire la fonction sous le signe intégrale sous forme d'une fraction rationnelle et chercher les pôles du dénominateur.

$$\frac{1}{1 + Q^2.(f/f_o - f_o/f)^2} = \frac{1}{1 + Q^2.(x - 1/x)^2} = \frac{1}{Q^2} \cdot \frac{x^2}{x^4 + 2.(1 - 2.Q^2/2.Q^2).x^2 + 1} = \frac{1}{Q^2} \cdot \frac{x^2}{x^4 + 2.m.x^2 + 1}$$

Dans les équations précédentes, on a posé $x = f/f_o$ et $m = (1 - 2.Q^2)/(2.Q^2)$.

$$B_{\text{eq}} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + Q^2.(f/f_o - f_o/f)^2} .df = \int_0^{+\infty} \frac{1}{Q^2} \cdot \frac{x^2}{x^4 + 2.m.x^2 + 1} .f_o .dx = \frac{f_o}{Q^2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2.m.x^2 + 1} .dx$$

Si $m > 1$, alors les pôles vérifient

$$x^2 = -m \pm \sqrt{m^2 - 1}$$

les pôles sont donc imaginaires purs

Si on pose

$$a = \sqrt{m + \sqrt{m^2 - 1}}$$

on peut noter que les pôles z_i s'écrivent respectivement $z_1 = j.a$, $z_2 = -j.a$, $z_3 = j/a$, $z_4 = -j/a$

Si $m < 1$, alors les pôles vérifient

$$x^2 = -m \pm j\sqrt{1 - m^2} = e^{\pm j\varphi} \quad (\pi > \varphi > 0)$$

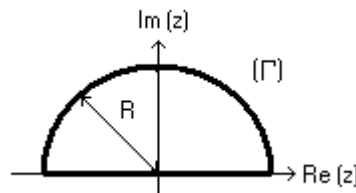
ce sont les nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 , de module égal à 1 qui s'écrivent respectivement

$$z_1 = e^{j\varphi/2}, z_2 = e^{j\varphi/2 + \pi} = -z_1, z_3 = e^{-j\varphi/2 + \pi} \text{ et } z_4 = e^{-j\varphi/2} = -z_3$$

Nous allons travailler avec la fonction de la variable complexe

$$F(z) = \frac{z^2}{z^4 + 2.m.z^2 + 1}$$

Nous allons choisir un contour Γ ayant a nouveau la forme suivante avec R qui tend vers l'infini



Les seuls résidus à prendre en compte sont ceux des pôles à partie imaginaire positive. Quelle que soit la valeur de m considérée, ces pôles sont z_1 et z_3 et on a $z_1.z_3 = -1$.

Le contour (Γ) étant l'association de l'axe réel (Re) et d'un demi cercle (C). On a

$$\int_{(\Gamma)} F(z).dz = \int_{(\text{Re})} F(x).dx + \int_{(C)} F(z).dz = 2.j\pi. \sum \text{Res}_{C\Gamma}(F)$$

Or, compte tenu de la nature de $F(z)$, on a $\int_{(C)} F(z).dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

donc finalement

$$\int_{(\text{Re})} F(x).dx = 2.j\pi. \sum \text{Res}_{C\Gamma}(F)$$

Dans notre cas, on a

$$\text{Res}(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z^2}{(z + z_1).(z - z_3).(z + z_3)} = \frac{z_1^2}{2.z_1.(z_1^2 - z_3^2)} = \frac{z_1}{2.(z_1^2 - z_3^2)}$$

et

$$\text{Res}(z_3) = \lim_{z \rightarrow z_3} \frac{z^2}{(z + z_3).(z - z_1).(z + z_1)} = \frac{z_3^2}{2.z_3.(z_3^2 - z_1^2)} = \frac{z_3}{2.(z_3^2 - z_1^2)}$$

globalement, la somme des résidus s'écrit donc

$$\sum \text{Res}_{C\Gamma}(F) = \frac{z_1}{2.(z_1^2 - z_3^2)} + \frac{z_3}{2.(z_3^2 - z_1^2)} = \frac{1}{2.(z_1 + z_3)}$$

on remarque que

$$(z_1 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2.z_1.z_3 = z_1^2 + z_2^2 - 2 = -2.m - 2 = -\frac{1}{Q^2}$$

et donc que

$$z_1 + z_3 = \pm j/Q \quad (\text{on ne garde que } j/Q)$$

finalement

$$\int_{(\text{Re})} F(x).dx = 2.j\pi. \sum \text{Res}_{C\Gamma}(F) = \pi.Q$$

Finalement, si on ne considère que l'intégrale sur les réels positifs, alors, on a

$$\int_0^{+\infty} F(x).dx = \frac{\pi.Q}{2}$$

La bande équivalente de bruit pour ce filtre vaut donc

$$B_{eq} = \frac{f_o}{Q^2} \cdot \frac{\pi.Q}{2} = \frac{\pi.f_o}{2.Q}$$

Annexe 2 : Loi de Poisson

Si on attend en moyenne N photons pendant la durée t de l'expérience, on va couper cette durée en m intervalles de temps identiques assez petits pour qu'un seul photon soit susceptible d'arriver. On va rechercher la probabilité de voir arriver n photons dans les m intervalles disponibles. Elle est donnée par

$$P(n) = C_m^n . q^n . (1-q)^{m-n} = \frac{m!}{n!.(m-n)!} \left(\frac{N}{m}\right)^n \left(1 - \frac{N}{m}\right)^{m-n}$$

Si on suppose N très grand et m >> n, alors on peut simplifier certains membres du produit

$$\frac{m!}{(m-n)! . m^n} \approx 1 \quad ; \quad \left(1 - \frac{N}{m}\right)^m \approx 1 - \frac{m}{m} . N \approx 1 - N \approx e^{-N} \quad ; \quad \left(1 - \frac{N}{m}\right)^{-n} \approx 1 + \frac{n}{m} N \approx 1$$

Finalement, compte tenu des simplifications, la probabilité devient

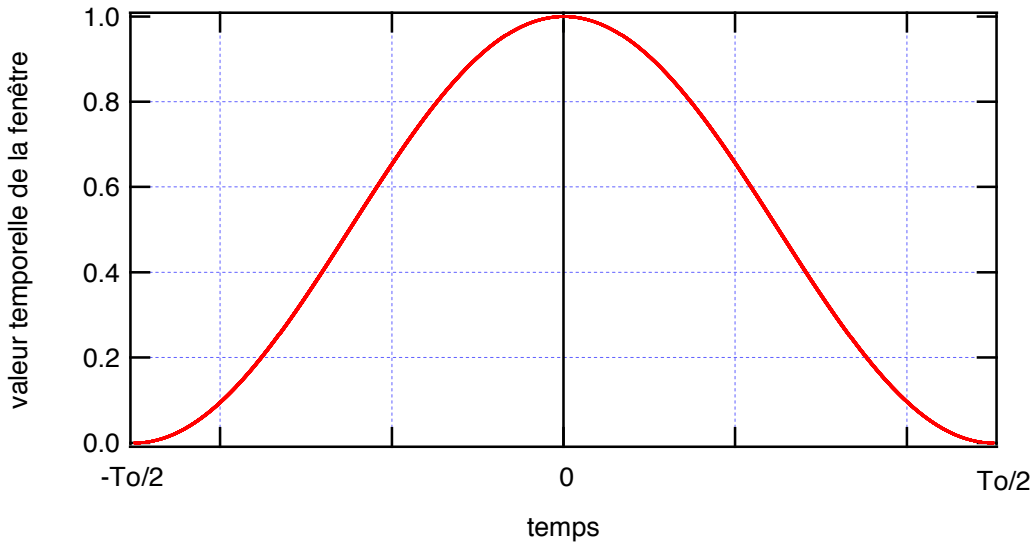
$$P(n) \approx \frac{N^n}{n!} e^{-N}$$

Annexe 3 : La fenêtre de Hanning et ses effets sur le spectre et la densité spectrale de puissance

• **Caractéristiques de la fenêtre :**

Une fenêtre de Hanning, w(t) s'exprime, en fonction du temps, de la façon suivante :

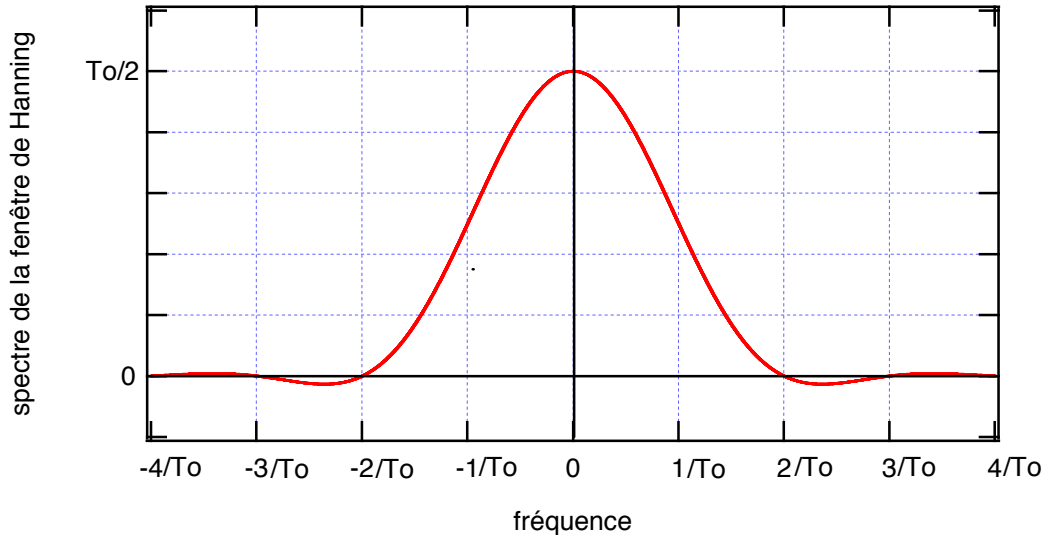
$$w(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T_o}\right) \right] \quad \text{pour } |t| \leq T_o/2 \text{ et } w(t) = 0 \text{ pour } |t| \geq T_o/2 \quad (T_o \text{ largeur de la fenêtre de troncation})$$



Si on calcule sa transformée de Fourier W(f), on trouve

$$W(f) = \frac{T_o}{2} \cdot \frac{\sin(\pi.f.T_o)}{\pi.f.T_o} + \frac{T_o}{4} \left[\frac{\sin(\pi.(f - 1/T_o).T_o)}{(\pi.(f - 1/T_o).T_o)} + \frac{\sin(\pi.(f + 1/T_o).T_o)}{(\pi.(f + 1/T_o).T_o)} \right]$$

Ce qui correspond à l'allure suivante :



• **Calcul d'une densité spectrale de puissance par périodogramme avec une fenêtre de Hanning :**

Le périodogramme d'un signal est le module au carré de sa transformée de Fourier divisé par le nombre de points de la représentation temporelle de ce dernier.

On commence donc par calculer le spectre FFT dont on prend le module au carré. Pour que les valeurs obtenues de spectre soient correctes, il faut diviser le résultat de calcul de TF par $N/2$. Pour arriver à une densité, il faut également diviser le résultat par le pas de calcul en fréquence égal à $1/T_0$.

Quand on va travailler avec la puissance ou l'énergie d'un signal, le fait d'avoir tronqué par une fenêtre différente d'une fenêtre rectangulaire représente une perte d'énergie. La puissance, l'énergie ou la densité de puissance calculées de cette façon sont donc plus faibles que celle du signal étudié. Si on s'intéresse à la densité spectrale de puissance, le résultat calculé, DSP_{calc} diffère donc du résultat réel $DSP_{\text{réelle}}$. Le rapport entre les deux DSP est donné par le rapport entre les aires au carré d'une fenêtre temporelle rectangulaire de largeur T_0 et d'une fenêtre de Hanning. On a donc

$$\frac{DSP_{\text{réelle}}}{DSP_{\text{calc}}} = \frac{(T_0 \cdot 1)^2}{\left(\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right) \right) \right]^2 dt \right)} = \frac{T_0^2}{T_0^2 \cdot \frac{3}{8}} = \frac{1}{0.375} = \frac{8}{3}$$

En appliquant ces différents facteurs au résultat calculé par le module de calcul FFT, on peut remonter à la densité spectrale de puissance de bruit.

Version décembre 2017