

# Transmission numérique. Spectre du signal en codage NRZ.

Fabienne BERNARD

fabienne.bernard@institutoptique.fr

7 février 2022

## 1 Modèle statistique d'un signal numérique NRZ

Pour transmettre une suite de valeurs binaires  $(\dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_k, \dots)$ , on utilise en télécommunications différents types de codage. L'un des plus simples est le codage dit *Non Retour à Zéro* (NRZ).

En notant  $f$  la fréquence de transmission des données, dans ce codage, l'évolution temporelle  $X(t)$  du signal reste constante pendant chaque période  $T = \frac{1}{f}$  :

$$X(t) = A.b_k \text{ pour } kT \leq t < (k+1)T \quad (1)$$

Un exemple de réalisation de ce type de signal pour une suite (101101) commençant à  $t = 0$  est donné figure suivante :

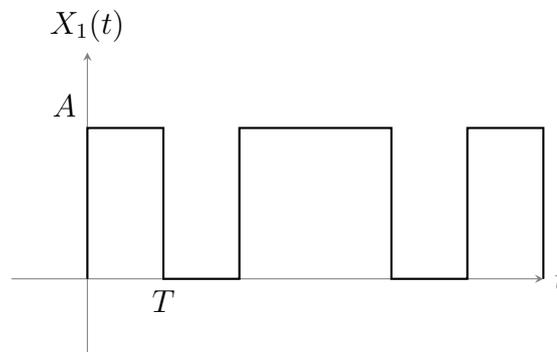


FIGURE 1 – Allure du signal en codage NRZ

On considère une suite  $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de variables aléatoires binaires, c'est-à-dire une suite de variables aléatoires ne pouvant prendre que les deux valeurs 0 et 1. On suppose que toutes ces variables aléatoires sont caractérisées par la même loi de probabilité et l'on note  $p = \mathbf{P}\{B_k = 1\}$  la probabilité que  $B_k$  vaille 1 et  $q = \mathbf{P}\{B_k = 0\} = 1 - p$  la probabilité que  $B_k$  vaille 0. Ces variables aléatoires sont supposées indépendantes.

On s'intéresse au signal aléatoire  $X(t)$  qui transcrit la suite  $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  selon le codage NRZ.

### 1.1 Stationnarité

**La valeur moyenne** du signal  $X(t)$ , au sens de l'espérance mathématique s'écrit :

$$\mathbf{E}[X(t)] = pA + (1 - p)0 = pA$$

**La fonction d'autocorrélation** de ce signal est définie par :

$$\Gamma_x(t, t + \tau) = \mathbf{E} [X(t)X(t + \tau)]$$

pour tout décalage temporel  $\tau$ .

Cette fonction d'autocorrélation n'est pas indépendante de  $t$ , c'est à dire que le signal n'est pas stationnaire à l'ordre 2.

Pour s'en convaincre, on peut calculer son expression pour deux cas particuliers :

— Cas  $t = kT$  et  $\frac{T}{2} < \tau < T$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Il n'y a pas de transition entre les deux instants et donc :

$$\Gamma_x(t, t + \tau) = A^2 \mathbf{P}(B_k = 1) = A^2 p$$

— Cas  $t = (2k + 1)T/2$  et  $\frac{T}{2} < \tau < T$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$  : il y a potentiellement une transition

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} [X(t) X(t + \tau)] \\ &= A^2 \mathbf{P}(B_k = 1 \ \& \ B_{k+1} = 1) \\ &= A^2 \mathbf{P}(B_k = 1) \mathbf{P}(B_{k+1} = 1) \end{aligned}$$

car les deux événements sont indépendants et donc :

$$\Gamma_x(t, t + \tau) = A^2 p^2$$

Ces deux cas démontrent que donc  $\Gamma_x(t, t + \tau)$  dépend de  $t$  et donc que le signal aléatoire  $X(t)$  n'est pas stationnaire à l'ordre 2. On ne peut pas définir de représentation spectrale de ce signal ou plus précisément, on ne peut pas définir sa densité spectrale de puissance.

## 1.2 Origine aléatoire

On considère maintenant le cas où l'origine des temps est mal connue, c'est-à-dire qu'au lieu de la définition (1), on a :

$$X(t) = A.b_k \text{ pour } t_0 + kT \leq t < t_0 + (k + 1)T; \ k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

où  $t_0$  est une **variable aléatoire uniformément répartie** entre 0 et  $T$ .

**La fonction d'autocorrélation** peut alors s'exprimer selon :

$$\Gamma_x(t, t + \tau) = \mathbf{E} [X(t)X(t + \tau)] = A^2 \mathbf{P}\{ X(t) = 1 \ \text{et} \ X(t + \tau) = 1 \}$$

Dans le cas  $\tau > T$ , les deux signaux  $X(t)$  et  $X(t + \tau)$  correspondent à des codes  $B_k$  différents (et indépendants) et on obtient alors :

$$\Gamma_x(t, t + \tau) = \mathbf{E} [X(t)]^2 = A^2 p^2$$

Pour  $0 \leq \tau < T$ , deux cas peuvent se présenter. Etant donnée une valeur de  $t_0$ ,  $X(t)$  et  $X(t + \tau)$  sont deux variables aléatoires  $B_k$  et  $B_{k'}$  qui peuvent soit être distinctes et donc indépendantes ( $k' = k + 1$ ), soit être la même variable aléatoire  $B_k$  ( $k' = k$ ). Ce dernier cas correspond à :

$$t_0 + kT \leq t \leq t + \tau < t_0 + (k + 1)T$$

Ce que l'on peut écrire aussi :

$$t + \tau - T - kT < t_0 \leq t - kT$$

$$\text{Or } \mathbf{P}\{B_k = B_{k'}\} = \mathbf{P}\{t + \tau - T - kT < t_0 \leq t - kT\}$$

Comme  $t_0$  est uniformément répartie entre 0 et  $T$  donc (en écrivant pour  $k = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{B_k = B'_k\} &= \mathbf{P}\{t + \tau - T < t_0 \leq t\} \\ &= \int_{t+\tau-T}^t \frac{1}{T} dt_0 = 1 - \frac{\tau}{T} \end{aligned}$$

En utilisant la formule des probabilités totales<sup>1</sup>, on peut obtenir l'expression de  $\Gamma_x(t, t + \tau)$  pour  $\tau < T$  :

$$\Gamma_x(t, t + \tau) = \mathbf{E}[X(t)X(t + \tau) | B_k = B'_k] \cdot \mathbf{P}\{B_k = B'_k\} \quad (3)$$

$$+ \mathbf{E}[X(t)X(t + \tau) | B_k \neq B'_k] \cdot \mathbf{P}\{B_k \neq B'_k\} \quad (4)$$

$$= A^2p \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) + A^2p^2 \cdot \frac{|\tau|}{T} \quad (5)$$

**L'autocovariance** de  $X(t)$ , c'est à dire en ne considérant que les variations  $\delta X$  du signal  $X(t)$  autour de sa valeur moyenne s'écrit :

$$\gamma_X(\tau) = \Gamma_{\delta X}(\tau) = \mathbf{E}[X(t)X(t + \tau)] - \mathbf{E}[X(t)]^2.$$

Et finalement, pour tout  $\tau < T$  :

$$\begin{aligned} \gamma_X(\tau) &= A^2p \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) + A^2p^2 \cdot \frac{|\tau|}{T} - A^2p^2 \\ &= \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) A^2p(1 - p) \end{aligned}$$

Et cette fonction d'autocovariance est nulle pour tout  $|\tau| > T$ . La figure ci-dessous représente l'allure globale de cette fonction :

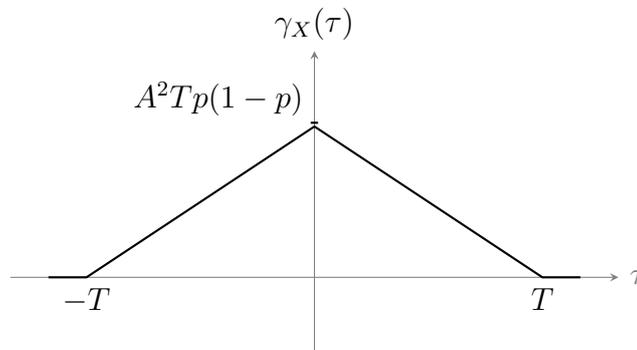


FIGURE 2 – Fonction d'autocovariance d'un signal aléatoire transmis en codage NRZ avec une période  $T$  et une amplitude  $A$ ,  $p$  est la probabilité d'émettre un '1'.

**La variance** du signal  $X$  est :

$$\text{Var}[X(t)] = \gamma_X(0) = A^2Tpq$$

**La densité spectrale de puissance**  $\text{DSP}_{\delta X}(\nu)$  du signal numérique est obtenue par Transformée de Fourier de la fonction d'autocovariance :

$$\text{DSP}_{\delta X}(\nu) = A^2Tpq \cdot \text{sinc}^2(T\nu)$$

Son allure est représentée sur la figure ci-dessous :

1.  $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B|\bar{A})\mathbf{P}(\bar{A})$

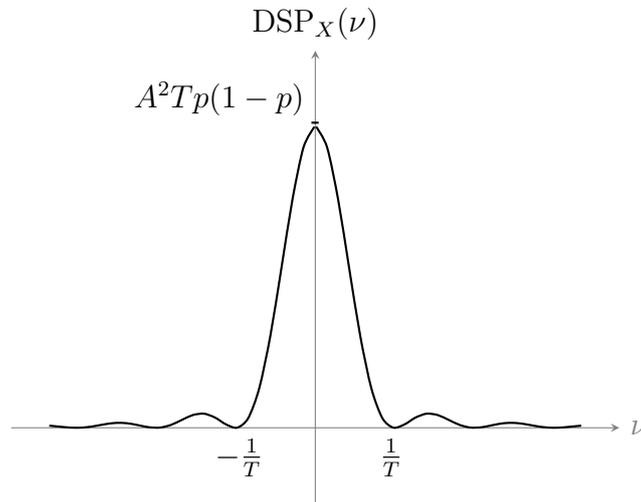


FIGURE 3 – Densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire transmis en codage NRZ avec une période  $T$  et une amplitude  $A$ ,  $p$  est la probabilité d'émettre un '1'.

## 2 Considérations pratiques

Pour obtenir une estimation de la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire, on peut utiliser soit un analyseur de spectre électrique, soit la fonction FFT d'un oscilloscope. Dans ce dernier cas, le lien entre la FFT du signal et la DSP est donné par :

$$\text{DSP}(\nu) = K \cdot \mathbf{E} [|\text{TFD}(\nu)|^2]$$

où  $\text{TFD}(\nu)$  désigne la transformée de Fourier numérique calculée par l'oscilloscope. Le coefficient  $K$  de proportionnalité, est lié à la résolution  $\Delta\nu$  de la FFT par  $K = \frac{1}{\Delta\nu}^2$ .

Il faut utiliser la fonction de moyennage de la FFT présente sur certains oscilloscopes pour voir s'afficher l'allure de la DSP.

**Remarque sur les unités** Pour un signal  $X(t)$  en Volt, la DSP est définie en  $\text{V}^2/\text{Hz}$  (et la FFT en V). Souvent on préfère donner la DSP en  $\text{W}/\text{Hz}$ , la valeur de la résistance d'entrée de l'oscilloscope permet de passer des  $\text{V}^2/\text{Hz}$  au  $\text{W}/\text{Hz}$ .

La figure ci-dessous donne un exemple d'affichage obtenu à l'oscilloscope en connectant un signal numérique NRZ en entrée, signal obtenu par la fonction PRBS (Pseudo-Random Bit Sequence) d'un générateur de fonction :

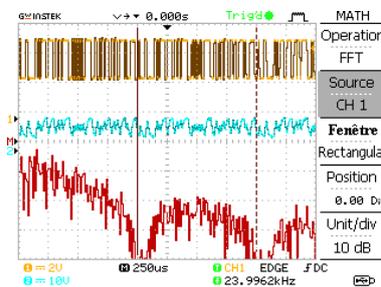


FIGURE 4 – Exemple d'oscillogramme. CH1 est le signal PRBS, dont le module de la TF est affiché en échelle log (dBV) tout en bas.

Le signal en sortie d'une chaîne de transmission peut être déformé par l'effet de la bande passante limitée de la détection (ou du canal de transmission), comme sur la figure ci-dessous. On voit alors l'effet de la limitation de la bande passante sur l'allure de la DSP du signal

2. Cette relation n'est vraie que si le calcul de FFT est réalisé avec un fenêtrage rectangulaire (sans apodisation). Dans le cas d'un fenêtrage quelconque, la bande équivalente au bruit (ENBW) est habituellement affichée par l'oscilloscope.

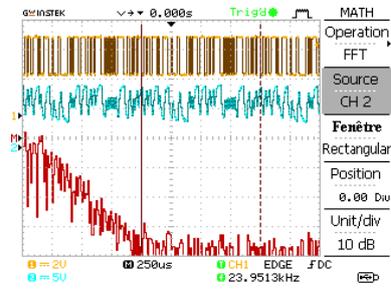


FIGURE 5 – Exemple d’oscillogramme. CH1 est le signal PRBS, CH2 est le signal reçu dont le module de la TF est affiché en échelle log (dBV) tout en bas.