

portait un moment magnétique que l'on obtient par un lissage spatial de la distribution précédente [1], à l'échelle mésoscopique. On peut alors définir la densité de moment magnétique, grandeur intensive appelée aimantation macroscopique, notée M et exprimée en $A \cdot m^{-1}$. En fonction du milieu, elle peut être spontanée ou induite par un champ magnétique extérieur.

La nature des moments magnétiques élémentaires est orbitale ou intrinsèque (spin). L'existence du spin ne s'explique pas classiquement, et une description complète du magnétisme dans la matière doit être quantique : le théorème de Bohr-van Leeuwen affirme que pour un système classique, tous les effets du magnétisme microscopique se compensent pour donner une aimantation nulle [2, 3]. Néanmoins, à l'échelle macroscopique, la modélisation classique adoptée dans la suite s'avère suffisante.

On peut montrer que le champ magnétique généré par une distribution d'aimantation M est identique à celui produit par des distributions de courants d'aimantation volumique $j_{alm} = \nabla \times M$ et surfacique $j_s = M \times n$, où n désigne le vecteur normal unitaire extérieur à la surface du matériau [4]. Les courants d'aimantation s'ajoutent aux sources de champ magnétique déjà présentes dans l'équation de Maxwell-Ampère dans un milieu non magnétique, à savoir les courants libres j_{lib} , et les courants de déplacement et de polarisation en régime variable. Cette équivalence est toutefois purement mathématique : les courants d'aimantation ne correspondent pas à des courants macroscopiques circulant dans le matériau aimanté.

1.2 Équations de Maxwell et relation constitutive

La réponse d'un milieu à un champ constant se traite dans le cadre de la magnétostatique, dans lequel nous nous plaçons dans la suite. On peut montrer que les équations de Maxwell, valables à l'échelle microscopique, se réécrivent à l'échelle macroscopique. L'équation $\nabla \cdot B = 0$ reste inchangée ; les sources de champ magnétique s'apparentent à des dipôles dont le champ est de divergence nulle. Les équations de la magnétostatique dans la matière s'écrivent

$$\begin{cases} \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times B = \mu_0 (j_{lib} + j_{alm}) \end{cases} \quad (1)$$

avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ la perméabilité magnétique du vide.

Le terme supplémentaire $j_{alm} = \nabla \times M$ n'invalide pas l'équation de conservation de la charge électrique, car la divergence d'un terme rotationnel est nulle.

En introduisant une nouvelle variable H appelée **excitation magnétique** telle que $B = \mu_0 (H + M)$, on peut réécrire le système (1) sous la forme

$$\begin{cases} \nabla \cdot H = -\nabla \cdot M \\ \nabla \times H = j_{lib} \end{cases} \quad (2)$$

L'introduction de H permet d'exprimer l'équation de Maxwell-Ampère uniquement en fonction des courants libres. Le théorème d'Ampère s'applique alors sous sa forme habituelle en substituant au champ magnétique B le champ $\mu_0 H$, ce qui permet de s'affranchir de la réponse magnétique du milieu.

Ayant introduit une nouvelle grandeur vectorielle, une relation supplémentaire liant M et H est nécessaire pour résoudre le système (2). Cette nouvelle équation est empirique, contrairement aux équations de Maxwell dans la matière, et elle dépend du milieu magnétique considéré : elle est dite « constitutive du milieu ». On définit alors en régime statique le tenseur de **susceptibilité magnétique** $[\chi]$ décrivant la réponse du milieu, de composantes $\chi_{ij} = \lim_{H \rightarrow 0} \partial M_i / \partial H_j$, avec i et j deux indices associés à deux directions spatiales quelconques d'une base orthogonale. La susceptibilité magnétique, sans dimension¹, détermine le développement au premier ordre de la fonction $M(H)$.

Si les termes d'ordres supérieurs à deux du développement de $M(H)$ sont négligeables devant le terme d'ordre 1, et si $M(0) = 0$, le matériau est dit **linéaire** : c'est le cas de tous les corps qui ne sont pas dans une phase magnétiquement ordonnée (ce qui exclut le ferromagnétisme, l'antiferromagnétisme, le ferrimagnétisme, etc.). Nous nous plaçons dans ce cadre dans toute la suite de cette expérience. Dès lors, en régime permanent et pour un milieu local (la réponse à la position r ne dépend que de l'excitation à cette même position), on peut écrire

$$M(r) = [\chi](r)H(r). \quad (3)$$

En régime variable, la réponse magnétique d'un milieu n'est pas instantanée. Dans le domaine temporel, l'aimantation s'obtient en convoluant (voir le Comp. A de l'Exp. 1.5, « Spectroscopie par transformée de Fourier ») l'excitation $H(r, t)$ lui ayant donné naissance avec la fonction de réponse $[\chi](r, t)$. On peut alors écrire l'Éq. (3) pour les composantes spectrales des grandeurs qui dépendent de la pulsation ω : en effet un produit de convolution dans le domaine réel (ici temporel) se réduit à un produit simple dans l'espace réciproque (ici fréquentiel).

En supposant de plus le milieu homogène et isotrope, ce qui est le cas de la majorité des fluides et des solides amorphes ou polycristallins, le tenseur de susceptibilité est indépendant de la position r et se réduit à $[\chi] = \chi \mathbf{1}$ où χ est un scalaire et $\mathbf{1}$ désigne la matrice identité. Moyennant toutes ces hypothèses², M est relié simplement à H et à B par :

$$M = \chi H = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi}{1 + \chi} B = \frac{\chi}{\mu_0 \mu_r} B, \quad (4)$$

où l'on a introduit la perméabilité magnétique relative $\mu_r = 1 + \chi$, de sorte que $B = \mu_0 \mu_r H$.

La densité volumique d'énergie magnétique emmagasinée dans un matériau $E_{mag} = H \cdot B / 2 = \mu_0 \mu_r H^2 / 2$ doit être positive, ce qui implique que $\mu_r \geq 0$ et donc $\chi \geq -1$.

1.3 Quelques catégories de milieux magnétiques

Les milieux magnétiques présentent des comportements divers, car leur susceptibilité magnétique peut varier sur plusieurs ordres de grandeur et prendre un signe

1. La susceptibilité magnétique est parfois qualifiée de volumique (en référence à l'aimantation) [5]. Nous éviterons ce qualificatif pour prévenir toute confusion sur sa dimension.
2. On pourra consulter la Réf. [6] pour un exposé plus approfondi.

quelconque. La réponse du matériau dépend de sa nature, mais aussi des conditions physiques (champ magnétique, température, pression, etc.) auxquelles il est soumis. Nous listons ci-après les trois grands types de comportements magnétiques.

Le **diamagnétisme** est le comportement des milieux linéaires dont la réponse magnétique induite est faible et opposée au champ appliqué ; ils se caractérisent par une susceptibilité magnétique négative variant généralement entre -10^{-9} et -10^{-4} . On peut l'interpréter classiquement comme un phénomène d'induction : selon la loi de Faraday-Lenz, le moment magnétique induit des électrons s'aligne dans la direction opposée au champ appliqué. Cet effet est toujours présent dans la matière, mais il est masqué si les entités chimiques portent un moment permanent (paramagnétisme, ferromagnétisme, etc.) [2, 3]. Des corps comme H_2 , N_2 , ou encore CO_2 , sont des exemples de milieux diamagnétiques, en phase liquide comme gazeuse.

Les matériaux supraconducteurs sont des « diamagnétiques parfaits », pour lesquels la susceptibilité atteint la valeur minimale $\chi = -1$. Leurs propriétés particulières sont étudiées dans l'Exp. V.5, « Supraconductivité : lévitation Meissner et chute de résistivité ».

Le **paramagnétisme** désigne également un comportement des milieux linéaires, mais contrairement au diamagnétisme, l'aimantation est dirigée dans le sens du champ appliqué. La susceptibilité magnétique est donc positive ; elle varie de 10^{-6} à 10^{-3} selon le matériau, à température ambiante. Microscopiquement, le paramagnétisme apparaît lorsque les entités chimiques possèdent un moment magnétique permanent, qui peut ainsi s'aligner avec le champ extérieur. C'est le cas des atomes dont une des couches électroniques internes est incomplète, en particulier les éléments de transition (Cr, Co...) ou les terres rares [7].

On peut montrer que la susceptibilité d'un système de moments magnétiques indépendants (sans interaction) vérifie $\chi \propto 1/T$. Cette relation, appelée loi de Curie, est en bon accord avec l'expérience pour un système dont les interactions entre moments magnétiques microscopiques sont faibles (en particulier dans une phase paramagnétique).

La susceptibilité des matériaux diamagnétiques ou paramagnétiques est faible, de sorte que l'Éq. (4) se simplifie en $M \simeq \chi B / \mu_0$.

Le **ferromagnétisme** est caractérisé par l'existence d'une aimantation spontanée à l'échelle mésoscopique (celle des domaines de Weiss [1]), et par un comportement fortement non linéaire avec une aimantation très forte dans le sens du champ extérieur (supérieure de six ordres de grandeur à celle du paramagnétisme). Contrairement aux deux cas précédents, l'interaction entre les moments magnétiques microscopiques permanents est grande en comparaison de l'énergie typique d'agitation thermique. Notons que la définition de la susceptibilité doit être modifiée à cause de l'hystérésis et de la non-linéarité du matériau. Ces propriétés des matériaux ferromagnétiques (notamment l'existence d'une aimantation permanente même en l'absence de champ appliqué) seront étudiées dans les Exp. II.2, « Cycle d'hystérésis d'un milieu ferromagnétique », II.3 « Domaines de Weiss : origine de l'hystérésis ferromagnétique » et II.4 « Mesure du moment magnétique d'un aimant permanent » auxquelles nous renvoyons pour plus de détails.

2 Méthode de Quincke

Nous décrivons dans la Sec. 2.1 le principe d'une méthode due à G. Quincke [8], permettant de mesurer la susceptibilité magnétique d'une solution paramagnétique en suivant la dénivellation du liquide dans un tube soumis à un gradient de champ magnétique. La mise en œuvre pratique sera étudiée en Sec 2.2.

2.1 Principe de la méthode et bilan des forces

La solution paramagnétique dont on souhaite mesurer la susceptibilité χ_{sol} est contenue dans un tube en forme de U. Les extrémités verticales du tube sont notées 1 et 2, de section S_1 et S_2 respectivement (Fig. 1). Le fluide est soumis à un champ magnétique dont l'intensité varie le long du tube. Nous écrivons le bilan des forces pour le fluide au repos dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen. Le fluide est soumis, en plus des forces de pression, au poids et à une force volumique d'origine magnétique due à l'inhomogénéité du champ dans le fluide. L'équilibre hydrostatique du fluide est donc donné par

$$\mathbf{0} = -\nabla p + \rho_{sol} \mathbf{g} + \frac{\chi_{sol}}{2\mu_0} \nabla(B^2), \quad (5)$$

avec p la pression, $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ l'accélération de la pesanteur et ρ_{sol} la masse volumique de la solution. Le dernier terme de l'Éq. (5) correspond à la force magnétique volumique exercée sur un milieu local linéaire et isotrope de susceptibilité très inférieure à 1 (voir le Comp. A). On réécrit l'Éq. (5) dans le cas d'un milieu homogène :

$$\mathbf{0} = \nabla \left(-p - \rho_{sol}gz + \frac{\chi_{sol}}{2\mu_0} B^2 \right). \quad (6)$$

La quantité entre parenthèses est uniforme dans tout le fluide. En particulier, elle prend la même valeur au niveau de chaque interface libre, où la pression est égale

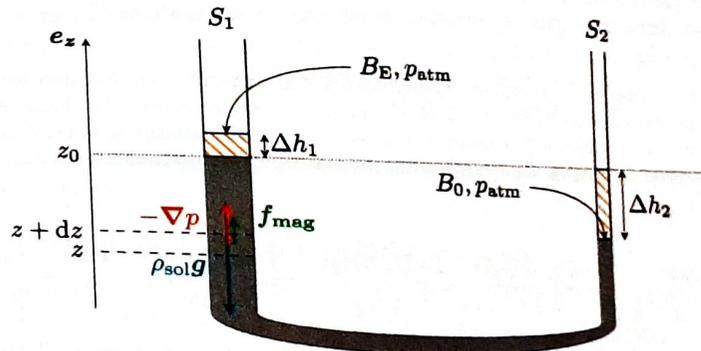


Fig. 1 Bilan des forces sur une tranche de fluide à l'équilibre de hauteur dz et de section S_1 , baignant dans un champ magnétique inhomogène. Elle est soumise au poids (en bleu), aux forces de pression (en rouge) et à la force magnétique responsable de l'ascension (en vert). La dénivellation du fluide est représentée par l'aire hachurée en jaune.

à la pression atmosphérique p_{atm} (nous reviendrons sur cette hypothèse dans la Sec. 4). L'intensité du champ magnétique est notée B_E (l'indice « E » se rapporte à l'électroaimant, voir la Sec. 2.2.3) au niveau de la surface libre du tube 1 située en $z_1 = z_0 + \Delta h_1$ et B_0 au niveau de la surface libre du tube 2 située en $z_2 = z_0 - \Delta h_2$. On obtient

$$\frac{\chi_{sol}}{2\mu_0}(B_E^2 - B_0^2) = \rho_{sol}g(\Delta h_1 + \Delta h_2). \quad (7)$$

Grâce à la conservation du volume de fluide déplacé $S_1 \Delta h_1 = S_2 \Delta h_2$, il est possible d'éliminer une des deux dénivellations, on peut donc se contenter de n'en mesurer que seule. On choisit d'éliminer Δh_1 au profit de Δh_2 (voir la Sec. 2.2.2), de sorte que

$$\Delta h_2 = \frac{\chi_{sol}}{2\mu_0 \rho_{sol} g (1 + S_2/S_1)} (B_E^2 - B_0^2). \quad (8)$$

2.2 Réalisation pratique de la méthode

2.2.1 Préparation de la solution paramagnétique

On obtient une solution paramagnétique en diluant un sel paramagnétique dans un solvant (en général de l'eau distillée). La susceptibilité de la solution peut être reliée linéairement à celle de ses constituants purs sous l'hypothèse que les moments magnétiques du solvant et du sel n'interagissent pas, autrement dit que la solution est idéale (loi de Wiedemann) [9] :

$$\chi_{sol,m} = t_m \chi_{sol} + (1 - t_m) \chi_{eau,m}, \quad (9)$$

où t_m désigne le titre massique en sel de la solution et $\chi_{i,m} = \chi_i/\rho_i$ est la susceptibilité massique du constituant i , et s'exprime en $m^3 \cdot kg^{-1}$. La susceptibilité de quelques sels paramagnétiques est indiquée dans le Tab. 1.

Pour les valeurs tabulées en convention CGS (par exemple dans la Réf. [5]), on prendra garde au facteur 4π dans la correspondance avec les conventions SI : $\chi_{SI} = 4\pi \chi_{CGS}$.

Les interactions entre moments élémentaires des molécules en solution font que le champ magnétique local en un point P (défini comme la somme du champ extérieur imposé et du champ créé par les molécules, en excluant le champ de la molécule placée en P), diffère en général du champ total macroscopique (qui inclut le champ créé par

Sel	$FeCl_2 \cdot 4H_2O$	$FeCl_3 \cdot 6H_2O$	$FeSO_4 \cdot H_2O$	$FeSO_4 \cdot 7H_2O$
$\chi_{SI} (10^{-3})$	1,57	1,29	2,33	0,96

Tab. 1 Susceptibilités magnétiques (sans dimension, en convention SI pour les champs) de quelques sels paramagnétiques hydratés à température ambiante, calculées à partir de la Réf. [5]. À titre de comparaison, $\chi_{eau} \approx -9 \times 10^{-6}$. Ces sels peuvent tous être utilisés en solution pour la méthode de Quincke, mais les composés chlorés sont corrosifs et l'utilisation de gants et de lunettes est recommandée.

la molécule placée en P et un lissage sur une échelle mésoscopique). Toutefois, dans l'approximation $\chi \ll 1$, on peut confondre au premier ordre en χ le champ local avec le champ macroscopique total. Nous renvoyons à la Réf. [1] pour plus de détails.

Si la solution paramagnétique est déjà préparée, il est impératif de connaître son titre massique t_m avec précision. Sinon, il est préférable de préparer une solution à partir de sels paramagnétiques dont la susceptibilité est tabulée. À partir de l'Éq. (9), on exprime la susceptibilité de la solution en fonction de celle du sel et de sa masse volumique ρ_{sol} , selon

$$\chi_{sol} = \frac{\rho_{sol} t_m}{\rho_{sol}} \left[\chi_{sol} - \left(1 - \frac{1}{t_m}\right) \frac{\rho_{sol}}{\rho_{eau}} \chi_{eau} \right]. \quad (10)$$

2.2.2 Réduction de l'incertitude relative sur la dénivellation

Afin de réduire l'incertitude relative sur la dénivellation, on maximise Δh_2 en choisissant une section S_2 petite par rapport à S_1 . En effet d'après l'Éq. (8), Δh_2 est d'autant plus grand que le rapport S_2/S_1 est faible, toutes choses étant égales par ailleurs.

On peut également projeter une image agrandie du tube 2 sur un écran placé derrière une lentille convergente (Fig. 2), ce qui facilite la lecture de Δh_2 et réduit l'incertitude relative sur sa détermination en augmentant la résolution. La dénivellation mesurée sur l'écran est alors $\Delta h_{mes} = \Gamma \Delta h_2$, avec Γ le grandissement du système de projection. L'Éq. (8) donne ainsi

$$\Delta h_{mes} = \frac{\Gamma \chi_{sol}}{2\mu_0 \rho_{sol} g (1 + S_2/S_1)} (B_E^2 - B_0^2). \quad (11)$$

L'Éq. (11) indique également que Δh_{mes} est d'autant plus importante que l'écart $B_E^2 - B_0^2$ est important. Afin que la dénivellation du fluide soit importante, on impose un champ magnétique d'amplitude B_E élevée à l'une des deux extrémités du tube, quand l'autre n'est soumise qu'au champ magnétique ambiant (champs magnétiques résiduels des appareils alentour et champ terrestre) d'amplitude constante $B_0 \approx 5 \times 10^{-5}$ T. Néanmoins, si le tube 2 est proche de la source de champ magnétique intense, ce champ B_0 peut être plus important et varier avec B_E . Nous travaillerons dans la suite en conservant ce terme dans les équations bien que B_0 soit dans notre cas très petit devant B_E .

2.2.3 Production d'un champ magnétique intense

Un électroaimant muni de pièces polaires plates génère un champ B_E horizontal et intense dans son entrefer (de l'ordre de 1 T) mais diminuant rapidement hors de celui-ci. Puisque seule la norme au carré du champ intervient dans l'Éq. (11), le sens du champ (et donc du courant circulant dans les bobines de l'électroaimant) n'a pas d'importance.

Il est déconseillé d'utiliser des pièces polaires tronconiques. Certes, elles créent un champ plus intense que les pièces plates à courant donné, ce qui augmenterait la dénivellation du liquide, qui serait alors plus facilement mesurable. Mais si on

augmentait trop la valeur du champ dans l'entrefer, la surface libre du tube pourrait sortir de la zone centrale de l'entrefer, et serait alors soumise à un champ inconnu, de norme plus faible. Les pièces plates créent un champ uniforme sur une région beaucoup plus large du tube, de sorte que la surface libre est maintenue à un champ B_E connu pendant toute la durée de l'expérience. En outre, plus la section S est grande, plus la dénivellation dans le tube 1 est faible, et plus on peut appliquer un champ intense avant que la surface libre ne sorte de l'entrefer.

3 Mesure de la susceptibilité magnétique

3.1 Protocole

- Nettoyer préalablement deux pipettes (dont la plus fine au moins est graduée) très soigneusement avec de l'acétone puis de l'éthanol, et les sécher afin d'éviter les phénomènes de mouillage (voir la Sec. 4). Réaliser ensuite un tube en U, en reliant les deux pipettes par un tuyau, puis fixer le tout à l'aide d'une potence (Fig. 2). Placer la pipette la plus large dans l'entrefer d'un électroaimant à pièces polaires plates (voir la Sec. 2.2.3) et la pipette graduée le plus loin possible. Remplir le tube en U avec la solution paramagnétique étudiée jusqu'à ce que le ménisque se situe à hauteur des pièces plates de l'électroaimant.
- Réduire au minimum l'épaisseur de l'entrefer pour maximiser le champ magnétique B_E , tout en assurant un espace suffisant pour la mesure du champ magnétique au niveau du ménisque avec une sonde à effet Hall (voir le Comp. B). Durant toute l'expérience, on s'assurera que la sonde reste au niveau du ménisque, et on gardera l'épaisseur de l'entrefer constante. Mesurer également la valeur B_0 du champ magnétique ambiant au niveau du tube 2.

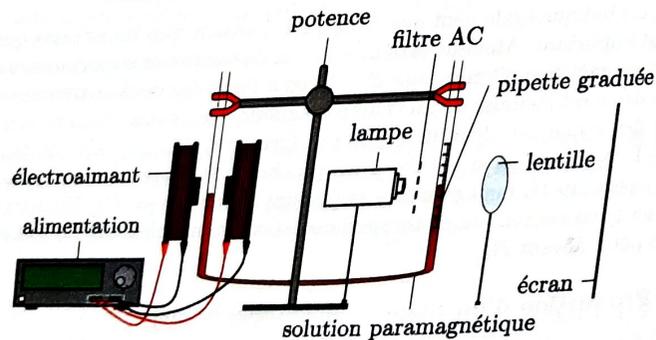


Fig. 2 Schéma du dispositif expérimental. La solution paramagnétique est versée dans un tube en U composé de deux pipettes reliées par un tuyau. L'interface de la pipette la plus large est placée dans l'entrefer d'un électroaimant. L'image de l'autre interface est projetée sur un écran par l'intermédiaire d'un système optique constitué d'une lampe, d'un filtre anticalorique et d'une lentille. La sonde à effet Hall, située dans l'entrefer de l'électroaimant, n'est pas représentée.

La détermination de B_E par un étalonnage en fonction du courant parcourant les bobines de l'électroaimant est impossible ici à cause de l'hystérésis du matériau ferromagnétique (voir l'Exp. II.2, « Cycle d'hystérésis d'un milieu ferromagnétique »).

On positionnera la sonde de sorte que la normale à sa plaque semi-conductrice soit parallèle à l'axe de l'entrefer. En effet, si la normale à celle-ci fait un angle θ avec la direction du champ à mesurer, il en résulte une sous-estimation sur la mesure de B_E d'un facteur $\sin^2(\theta)$. Une erreur de positionnement de la sonde de 5° engendre une erreur relative sur B_E négligeable (0,8 % environ).

- Éclairer l'autre ménisque avec une lampe. Si la lampe (quartz-iode par exemple) risque d'échauffer la solution, disposer un filtre anticalorique (AC) permet d'éviter la dilatation thermique du liquide et une variation de la susceptibilité du liquide paramagnétique avec la température (voir la Sec. 1.3).
- Faire l'image du ménisque sur un écran à l'aide d'une lentille de projection de courte distance focale (par exemple $f \approx 10$ cm). Les graduations de la pipette sont utiles pour régler la netteté de l'image et pour calculer le grandissement Γ du système optique. En l'absence de graduations, le diamètre extérieur de la pipette peut aussi servir d'échelle de distance.
- Une lentille de courte distance focale permet de maximiser le grandissement tout en minimisant l'encombrement. On veillera aussi à bien aligner le montage horizontalement pour éviter des erreurs de parallaxe et à respecter la règle du « plus plat, plus près » pour la lentille [10].
- Augmenter lentement l'intensité I du courant continu imposé par l'alimentation électrique pour augmenter la norme du champ B_E dans l'entrefer. Mesurer la dénivellation Δh_{mes} sur l'écran, ainsi que B_E . Répéter l'opération en augmentant toujours I pour éviter les effets d'hystérésis de mouillage discutés dans la Sec. 4. Une fois seulement après avoir atteint le courant maximal admissible par l'électroaimant, on peut obtenir un cycle complet en diminuant progressivement l'intensité du courant jusqu'à zéro.

3.2 Résultats

Nous avons préparé une solution paramagnétique à partir d'un sel hexahydraté $\text{FeCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ dont la susceptibilité est donnée dans le Tab. 1. La courbe de dénivellation mesurée sur l'écran en fonction de la différence du carré des normes du champ au niveau des deux interfaces est tracée sur la Fig. 3. Deux ajustements affines $\Delta h_{mes} = a(B_E^2 - B_0^2) + b$ sont réalisés, l'un pour les mesures en champ croissant (en bleu), l'autre pour celles en champ décroissant (en rouge). La pente de l'ajustement en champ croissant (resp. décroissant) est $a_c = (15,37 \pm 0,13) \text{ cm} \cdot \text{T}^{-2}$ (resp. $a_d = (15,65 \pm 0,14) \text{ cm} \cdot \text{T}^{-2}$). L'incertitude-type sur B_E est due à la précision de la sonde à effet Hall indiquée par le constructeur qui est de 1 % sur la gamme étudiée et à l'incertitude liée à sa résolution d'au plus 1 mT. L'incertitude-type de 0,9 mm sur Δh_{mes} est due à l'étalement d'environ 3 mm du ménisque sur l'écran. Les ordonnées à l'origine sont très faibles devant les valeurs typiques de dénivellation mesurées, et celle obtenue en champ croissant n'est pas compatible avec zéro. Ce dernier point ainsi que l'origine de l'écart (ici minime) entre ces deux courbes seront expliqués

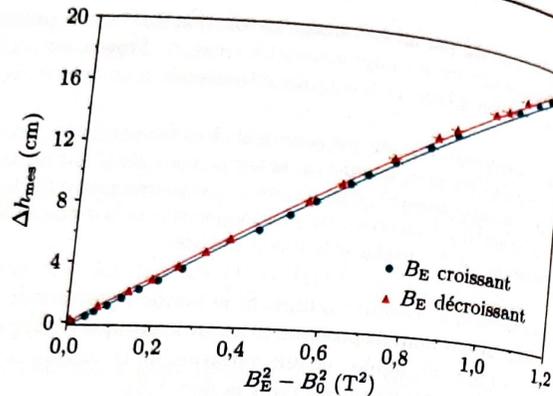


Fig. 3 Dénivellation mesurée sur l'écran pendant un cycle complet (montée et descente du champ magnétique) en fonction du carré du champ magnétique dans l'entrefer. Un ajustement affine $\Delta h_{mes} = a(B_E^2 - B_0^2) + b$ a été réalisé indépendamment sur les deux courbes. On obtient $a_c = (15,37 \pm 0,13) \text{ cm} \cdot \text{T}^{-2}$ et $b_c = (-0,26 \pm 0,04) \text{ cm}$ pour la montée (en bleu), et $a_d = (15,65 \pm 0,14) \text{ cm} \cdot \text{T}^{-2}$ et $b_d = (-0,04 \pm 0,04) \text{ cm}$ pour la descente (en rouge).

dans la Sec. 4. En combinant les Éq. (10) et (11), on exprime la susceptibilité volumique du sel en fonction de la pente des ajustements expérimentaux (notée a).

$$\chi_{sel} = a \frac{2\mu_0 \rho_{sel} g (1 + S_2/S_1)}{\Gamma t_m} + \left(1 - \frac{1}{t_m}\right) \frac{\rho_{sel}}{\rho_{eau}} \chi_{eau}. \quad (12)$$

Les diamètres des tubes d_1 et d_2 sont mesurés au pied à coulisse³ et permettent de calculer les sections S_1 et S_2 tandis que le grandissement Γ est obtenu par le rapport entre la distance mesurée sur l'écran séparant un certain nombre de graduations et leur distance réelle sur la pipette. Les valeurs numériques utiles sont reportées dans le Tab. 2.

Grandeur	Valeur	Grandeur	Valeur
Γ	$11,9 \pm 0,2$	ρ_{sel}	$1,82 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ [5]
t_m	$0,583^4$	S_1	$(2,8 \pm 0,1) \times 10^{-5} \text{ m}^2$
d_1	$(6,0 \pm 0,1) \text{ mm}$	S_2	$(4,9 \pm 0,4) \times 10^{-6} \text{ m}^2$
d_2	$(2,5 \pm 0,1) \text{ mm}$		

Tab. 2 Valeurs numériques des paramètres de l'expérience.

3. L'incertitude est notablement plus large que la résolution du pied à coulisse (0,02 mm) car il est difficile de mesurer les rayons internes des tubes de verre très précisément.

4. L'incertitude sur t_m est très faible devant les autres incertitudes et est donc négligée.

La valeur de la susceptibilité du sel moyennée pour les champs croissant et décroissant est $\chi_{\text{FeCl}_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O, exp}} = (1,19 \pm 0,03) \times 10^{-3}$. (13)

La valeur tabulée donnée dans le Tab. 1 est $\chi_{\text{FeCl}_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O, tab}} = (1,29 \pm 0,03) \times 10^{-3}$ où l'incertitude vient de la plage de température sur laquelle est référencée cette valeur (entre 285 K et 300 K). L'écart entre ces deux valeurs provient probablement de l'Éq. (10), qui néglige surtout les interactions entre espèces différentes (ici l'eau et le sel paramagnétique). Lors de la dilution du sel paramagnétique dans l'eau, la modification des interactions entre les moments magnétiques des espèces peut conduire à une diminution de la susceptibilité de la solution. Pour étudier cet effet de solvatation, on pourrait répéter l'expérience pour différents titres massiques afin de vérifier la validité de la loi de Wiedemann.

4 Hystérésis de mouillage

Si les tubes sont initialement mal lavés, il apparaît un effet d'hystérésis de mouillage plus important entre la montée et la descente du liquide dans le tube. Nous montrons comment le mouillage modifie la loi (11) et comparons nos résultats aux courbes expérimentales obtenues avec la même solution et le même dispositif expérimental que dans la section précédente (seule la valeur du grandissement Γ change par rapport au Tab. 2).

4.1 Effets capillaires

L'angle de contact entre le ménisque et la paroi du tube n'est pas le même lorsque le liquide monte ou descend (Fig. 4). Cet angle, appelé **angle de mouillage**, varie entre un angle d'avancée θ_a quand le liquide monte et un angle de reculée θ_r lorsqu'il descend. Ce phénomène, nommé hystérésis de mouillage, est dû à la présence de rugosités ou d'hétérogénéités chimiques sur les parois des tubes [11, 12] et est donc d'autant plus présent que le tube n'a pas été soigneusement nettoyé (voir la Sec. 3.1).

Les effets capillaires dominent la pesanteur aux petites échelles, en deçà de la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\gamma_{sol}/\rho_{sol}g}$, où γ_{sol} est le coefficient de tension superficielle entre l'air et la solution. Une mesure de la tension superficielle de la solution par la méthode d'arrachement [10] donne $\gamma_{sol} = (66 \pm 2) \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, valeur proche de la

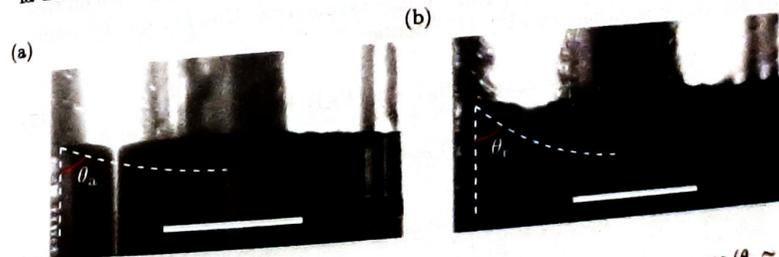


Fig. 4 Ménisque de la surface libre du tube 2 (a) lorsque le liquide avance ($\theta_a \approx 75^\circ$), et (b) lorsqu'il recule ($\theta_r \approx 50^\circ$). Le trait blanc mesure 1 mm.

croissant et décroissant. On en déduit expérimentalement la valeur moyenne des sinus des angles d'avancée $\cos(\theta_n) = 0,27 \pm 0,03$ et de reculée $\cos(\theta_r) = 0,18 \pm 0,02$ correspondant aux valeurs des plateaux.

En utilisant l'Éq. (19), avec un grandissement valant cette fois $\Gamma = 10,1 \pm 0,1$, on prédit une ordonnée à l'origine $b_c^{att} = (-2,6 \pm 0,4)$ cm (champ croissant) et $b_d^{att} = (-2,6 \pm 0,4)$ cm. Celle-ci est à comparer à la valeur expérimentale $b_c - b_d = (-1,6 \pm 0,1)$ cm. Le modèle simplifié présenté surestime l'ordonnée à l'origine en valeur absolue. En effet, $d_2 \simeq l_c$, le ménisque n'est donc pas rigoureusement sphérique et sa courbure réelle en son milieu est plus faible [11]. Le modèle présenté est toutefois une explication satisfaisante et un ordre de grandeur correct pour l'ordonnée à l'origine observée.

D'autres méthodes de mesure de la susceptibilité magnétique existent. La balance de Gouy permet par exemple de mesurer la variation du poids apparent d'un échantillon lorsqu'il est placé dans un champ magnétique. La balance d'Evans constitue une amélioration du dispositif de Gouy : l'échantillon est placé entre deux aimants dont le champ est connu, reliés par un fil de torsion [13]. La mesure de la force exercée par l'échantillon sur l'un des aimants permet de remonter à la susceptibilité magnétique. La popularité de ce dispositif tient au fait qu'il permet des mesures à la fois rapides et précises (incertitude relative de l'ordre de 1%). À l'origine, on mesurait la force à partir du courant qu'il fallait imposer à une bobine pour que le système revienne à l'équilibre ; désormais, ces mesures sont réalisées par des méthodes optiques, plus précises. Enfin, plusieurs techniques fondées sur la résonance magnétique nucléaire (RMN) permettent de déterminer la susceptibilité avec une grande précision, notamment celles de matériaux diamagnétiques, en mesurant la distorsion du champ magnétique et donc le déplacement chimique, pour diverses orientations spatiales de l'échantillon [9].

Complément A - Force subie par un matériau aimantable

En toute généralité, la force F subie par un moment magnétique M placé dans un champ magnétique extérieur B_{ext} s'écrit [1]

$$F = \nabla(M \cdot B_{ext}), \quad (20)$$

où le moment magnétique M doit être considéré constant au cours de la dérivation. Dans une base orthonormée (e_x, e_y, e_z) , les composantes de cette force sont

$$F_x = M \cdot \frac{\partial B_{ext}}{\partial x}, \quad F_y = M \cdot \frac{\partial B_{ext}}{\partial y}, \quad F_z = M \cdot \frac{\partial B_{ext}}{\partial z}. \quad (21)$$

Puisque M est considéré constant dans l'Éq. (20), on peut montrer par analyse vectorielle que $F = \nabla(M \cdot B_{ext}) = (M \cdot \nabla) B_{ext} + M \times (\nabla \times B_{ext})$. Dans le

cas spécifique d'un champ B_{ext} à rotationnel nul (donc en l'absence de courants extérieurs au voisinage du moment magnétique), on a $F = (M \cdot \nabla) B_{ext}$. Considérons maintenant, dans un échantillon de matériau magnétique d'aimantation M , un élément de volume mésoscopique dV portant un moment magnétique $dM = M dV$. Cet élément est soumis à une force magnétique $dF = \nabla(dM \cdot B')$, où B' est le champ magnétique créé par l'ensemble des sources de champ à l'exception du volume de matériau considéré dV , c'est-à-dire par les courants libres et le reste du matériau aimantable. La force volumique dans le matériau s'écrit

$$f_{mag} = \nabla(M \cdot B').$$

Dans le volume de l'échantillon, le champ B' s'assimile à B , qui désigne le champ magnétique total dans le matériau. En revanche, B n'est pas défini à sa surface car l'aimantation y est discontinue. On peut cependant prouver que le champ B' défini cette fois relativement à un élément de surface infinitésimal du matériau, est continu à l'interface. La contribution de l'interface n'est pas négligeable, et il est difficile d'écrire une expression générale exploitable de la force volumique subie par le matériau.

Si on suppose le matériau linéaire et de susceptibilité magnétique $\chi \ll 1$, on peut se restreindre à calculer cette force au premier ordre en χ . En notant B_0 le champ magnétique extérieur produit uniquement par des courants libres circulant en dehors du matériau magnétique, on obtient $B' \simeq B \simeq B_0$ et

$$M = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi}{\chi + 1} B \simeq \frac{\chi}{\mu_0} B_0. \quad (22)$$

On peut alors donner une expression de la force volumique magnétique appliquée sur le matériau :

$$f_{mag} \simeq \frac{\chi}{\mu_0} (B_0 \cdot \nabla) B_0 + \frac{\chi}{\mu_0} B_0 \times (\nabla \times B_0) = \frac{\chi}{2\mu_0} \nabla(B_0^2), \quad (23)$$

où dans la dernière égalité nous avons utilisé que $\nabla \times B_0 = 0$ dans le corps aimanté.

Si l'on ne s'intéresse qu'à la résultante des forces, il n'est plus nécessaire de supposer $\chi \ll 1$ puisque la résultante des forces internes exercées par des moments du matériau sur d'autres moments est nulle, ce qui permet d'écrire

$$F = \iiint_V f_{mag} dV = (M \cdot \nabla) B_0 + M \times (\nabla \times B_0), \quad (24)$$

et ce même si le moment magnétique total M du matériau dépend de B_0 .

Complément B - Fonctionnement d'une sonde à effet Hall

Une sonde à effet Hall est constituée d'une plaque semi-conductrice, parcourue par un courant (Fig. 6). Une fois plongée dans un champ magnétique, la plaque acquiert une tension U_H , dite de Hall, liée à la composante normale à la plaque B du champ magnétique par la relation $U_H = R_H i B/d$, où i est l'intensité la traversant, R_H la constante de Hall et d son épaisseur selon la direction e_z perpendiculaire à

tension superficielle de l'eau à température ambiante. La masse volumique de la solution est $\rho_{sol} = (1,350 \pm 0,001) \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. La masse volumique de l'air est de l'ordre de $1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, c'est-à-dire de l'ordre du diamètre du tube 2. Dans ce tube, les effets capillaires ne sont pas négligeables et nous devons les inclure dans l'équation de la statique du fluide et discuter de leurs conséquences.

4.2 Modélisation

Dans le tube 2, la pression p_2 du liquide à l'interface liquide/air dépend du rayon de courbure du ménisque R_2 , considéré sphérique, selon la loi de Laplace [12]

$$p_2 = p_{atm} - \frac{2\gamma_{sol}}{R_2}$$

En revanche, le diamètre du tube 1 étant grand devant la longueur capillaire, on peut négliger l'effet du mouillage dans ce tube ($p_1 \simeq p_{atm}$ en très bonne approximation). Dans toute la suite, nous supposons que le ménisque du tube 2 est sphérique, c'est-à-dire $R_2 = d_2/2 \cos(\theta_2)$ avec θ_2 l'angle de mouillage. L'assimilation du rayon de courbure à celui d'une sphère n'est valable que si $d_2 \ll r_c$, alors que dans notre cas le diamètre du tube 2 est de l'ordre de la longueur capillaire; néanmoins nous nous contentons de cette approximation pour simplifier la modélisation. L'intégration du bilan des forces fait apparaître un terme supplémentaire par rapport à l'Éq. (6), dû à la différence de pression entre les tubes :

$$\frac{\chi_{sol}}{2\mu_0} (B_E^2 - B_0^2) = \rho_{sol}g(z_1 - z_2) + p_{atm} - p_2 \quad (15)$$

où z_1 et z_2 désignent les cotes des bas des ménisques dans les tubes 1 et 2 respectivement. L'angle de mouillage θ_2 dépend des conditions initiales. Que l'on ait ou non déjà effectué une fois l'expérience, on a initialement $\theta_2 = \theta_a$ ⁵. Comme aucun champ magnétique n'est appliqué initialement, l'Éq. (15) donne

$$0 = \rho_{sol}g(z_1(B_0) - z_2(B_0)) + \frac{4\gamma_{sol} \cos(\theta_a)}{d_2} \quad (16)$$

On retrouve le phénomène d'ascension capillaire dû au mouillage et à la différence de diamètre entre les deux tubes décrit par la loi de Jurin [10, 12].

Appliquons un champ magnétique croissant dans l'entrefer : le ménisque du tube 2 recule et passe de θ_a à θ_r , l'angle de mouillage est modifié. Une fois que ce dernier atteint une valeur stationnaire, l'Éq. (15) donne

$$\frac{\chi_{sol}}{2\mu_0} (B_E^2 - B_0^2) = \rho_{sol}g(z_1(B_E) - z_2(B_E)) + \frac{4\gamma_{sol} \cos(\theta_r)}{d_2} \quad (17)$$

La soustraction de l'Éq. (16) à l'Éq. (17) donne

$$\frac{\chi_{sol}}{2\mu_0} (B_E^2 - B_0^2) = \rho_{sol}g \left(1 + \frac{S_2}{S_1} \right) \frac{\Delta h_{mes}}{\Gamma} + \frac{4\gamma_{sol}}{d_2} (\cos(\theta_r) - \cos(\theta_a)) \quad (18)$$

5. À la fin d'une expérience, nous annulons le champ magnétique en éteignant l'électroaimant : le ménisque du tube 2 remonte. Il en est de même lorsque l'on vient de remplir le tube en U.

L'Éq. (18) prédit une ordonnée à l'origine si l'on trace Δh_{mes} en fonction de $B_E^2 - B_0^2$

$$b^{alt} = - \frac{4\Gamma\gamma_{sol} (\cos(\theta_r) - \cos(\theta_a))}{\rho_{sol}gd_2(1 + S_2/S_1)} \quad (19)$$

Cette valeur est négative car $\cos(\theta_r) > \cos(\theta_a)$ (la Fig. 4 montre que $\theta_r < \theta_a$). Si maintenant on diminue le champ après qu'il a atteint son maximum, l'angle passe à nouveau de θ_r à θ_a dans le tube 2. La condition finale, une fois la descente effectuée, est la même que la condition initiale avec $\theta_2 = \theta_a$. Dès lors, l'ordonnée à l'origine prédite par l'Éq. (18) doit être nulle pour la courbe de champ décroissant. Ce changement d'angle de mouillage, et donc d'ordonnée à l'origine, est la signature du phénomène d'hystérésis de mouillage.

4.3 Mesure des angles de mouillage

En utilisant la même solution, le même montage et le même protocole qu'en Sec. 3 mais cette fois sans nettoyer les tubes, on photographie le ménisque dans le tube 2 au cours de l'ascension et de la descente du liquide pour chaque valeur de B_E , puis on détermine son rayon de courbure en l'ajustant par un cercle. Connaissant le diamètre du tube, on évalue le cosinus de l'angle de mouillage grâce à la relation géométrique $R_2 = d_2/2 \cos(\theta)$. Cette procédure donne une valeur plus précise qu'en évaluant directement l'angle de mouillage sur l'image, car les bords intérieurs du tube ne sont pas toujours nets et la tangente au ménisque est difficile à estimer. La Fig. 5(b) montre l'évolution du cosinus de l'angle de mouillage en fonction de l'écart entre les carrés des champs au niveau des deux ménisques pour les mesures en champ

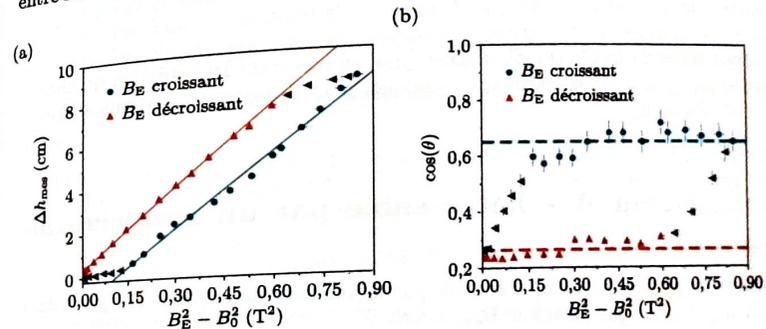


Fig. 5 (a) Cycle complet observé de la dénivellation du liquide dans le tube. Un ajustement affine $\Delta h_{mes} = a(B_E^2 - B_0^2) + b$ est réalisé indépendamment sur les deux portions du cycle. On obtient $a_c = (11,2 \pm 0,2) \text{ cm} \cdot \text{T}^{-2}$ et $b_c = (-1,2 \pm 0,1) \text{ cm}$ pour la montée (en bleu) et $a_d = (12,2 \pm 0,2) \text{ cm} \cdot \text{T}^{-2}$ et $b_d = (0,4 \pm 0,1) \text{ cm}$ pour la descente (en rouge). Les points gris sont les points pour lesquels l'angle de mouillage varie significativement. (b) Évolution du cosinus de l'angle de mouillage dans le tube 2 en fonction de $B_E^2 - B_0^2$. Le cycle met en évidence l'hystérésis de mouillage au cours de l'expérience. On en déduit $\cos(\theta_a) = 0,27 \pm 0,03$ et $\cos(\theta_r) = 0,65 \pm 0,04$.

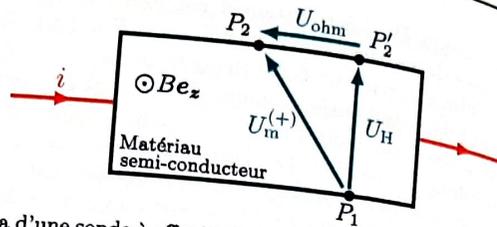


Fig. 6 Schéma d'une sonde à effet Hall, composée d'un matériau semi-conducteur parcouru par une intensité i . Placée orthogonalement à un champ magnétique Be_z , une différence de potentiel U_H , dite de Hall, apparaît entre les soudures P_1 et P'_1 . La mesure se fait cependant entre P_1 et P_2 , la tension $U_m^{(+)}$ mesurée contient alors une composante ohmique U_{ohm} dont il faut s'affranchir.

la plaque [4]. La mesure d'un champ magnétique avec une telle sonde peut cependant présenter une erreur systématique, due à un défaut d'alignement des sondes. Notons P_1 et P_2 les points de mesure du potentiel sur la plaque semi-conductrice, a priori non alignés selon l'axe orthogonal à la direction du courant, et P'_1 le point opposé à P_1 par rapport à la direction du courant (Fig. 6). La différence de potentiel $U_m^{(+)} = U_H + U_{ohm}$ mesurée entre les deux soudures P_1 et P_2 contient alors la tension de Hall U_H entre P_1 et P'_1 et un terme ohmique U_{ohm} entre P_2 et P'_2 , dû au passage du courant i dans la sonde. Pour s'affranchir de U_{ohm} , il faut retourner la sonde. Le champ magnétique vu par la sonde est alors de sens opposé et la tension mesurée devient $U_m^{(-)} = -U_H + U_{ohm}$. En prenant la différence des deux tensions, on obtient deux fois la tension recherchée : $U_m^{(+)} - U_m^{(-)} = 2U_H$. Comme la sonde possède une tension proportionnelle au champ que l'on mesure, on obtient $B^{(+)} - B^{(-)} = 2B$, où $B^{(+)}$ est le champ lu sans retourner la sonde et $B^{(-)}$ le champ lu en la retournant.

Références

- [1] M. BERTIN, J.-P. FAROUX et J. RENAULT, *Électromagnétisme 4, milieux diélectriques et milieux aimantés*. Dunod, 1996.
- [2] S. BLUNDELL, *Magnetism in condensed matter*. Oxford University Press, 2001.
- [3] B. DIU, C. GUTHMANN, D. LEDERER et B. ROULET, *Physique statistique*. Hermann, 1996.
- [4] C. GARING, *Magnétisme : statique, induction et milieux*. Ellipses, 1999.
- [5] W. HAYNES, *CRC handbook of chemistry and physics*, 95^e éd. CRC Press, 2014.
- [6] L. DETTWILLER, « Propagation de la lumière, dispersion et absorption » dans : *Optique géométrique et propagation*, J.-L. MEYZONNETTE, éd., Hermann Lavoisier, 2003.
- [7] R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON et M. SANDS, *Le cours de physique de Feynman : électromagnétisme 2*, 2^e éd. Dunod, 2013.

- [8] G. QUINCKE, « Electrical investigations », *Ann. Phys.*, **24** (3), p. 347-416, 1885.
- [9] P. KUCHEL, B. CHAPMAN, W. BUBB, P. E. HANSEN et al., « Magnetic susceptibility: solutions, emulsions, and cells », *Concepts Magn. Reson. A*, **18** (1), p. 56-71, 2003.
- [10] M. FRUCHART, P. LIDON, E. THIBIERGE, M. CHAMPION et A. LE DIFFON, *Physique expérimentale*. De Boeck Supérieur, 2016.
- [11] E. GUYON, J.-P. HULIN et L. PETIT, *Hydrodynamique physique*, 3^e éd. EDP Sciences, 2012.
- [12] P.-G. DE GENNES, F. BROCHARD-WYART et D. QUÉRÉ, *Gouttes, bulles, perles et ondes*, 2^e éd. Belin, 2005.
- [13] D. EVANS, « A new type of magnetic balance », *J. of Phys. E : Sci. Instr.*, **7** (4), p. 247-249, 1974.