

8.3.6. Longueur de cohérence spatiale ℓ_s du dispositif des fentes d'Young

Reprenons le montage à deux lentilles, la fente source fine F étant maintenant remplacée par une fente source de largeur b uniformément éclairée, centrée sur F_{L_1} , foyer objet de L_1 (figure 8.24). La fente source large est décomposable

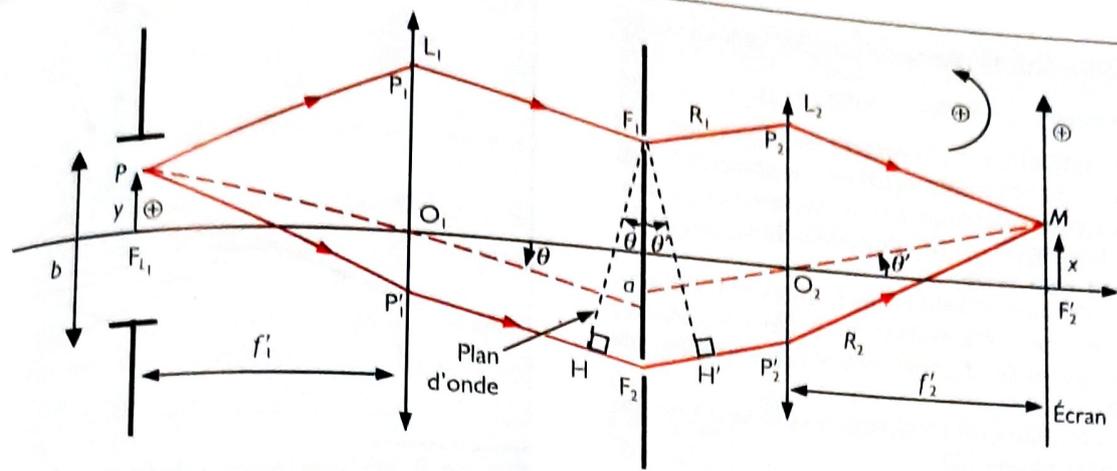


Figure 8.24 Dispositif des fentes d'Young à deux lentilles avec fente source large.

en une infinité de fentes sources élémentaires, de cote $y \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$ et de largeur dy . Chaque fente élémentaire donne en un point M de l'écran une intensité élémentaire :

$$dI(M) = 2dI_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{f_2'} + \frac{y}{f_1'} \right) \right) \right], \text{ où } dI_0 = I_0 \frac{dy}{b}$$

Les fentes élémentaires constituent des sources incohérentes entre elles. L'intensité résultante en M est donc la somme intégrale des intensités élémentaires produites par l'infinité des sources élémentaires :

$$I(M) = \frac{2I_0}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{f_2'} + \frac{y}{f_1'} \right) \right) \right) dy$$

$$= \frac{2I_0}{b} \left[y + \frac{\sin \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{f_2'} + \frac{y}{f_1'} \right) \right)}{\frac{2\pi a}{\lambda f_1'}} \right]_{-b/2}^{+b/2}$$

$$= 2I_0 \left(1 + \frac{\sin \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{f_2'} + \frac{b}{2f_1'} \right) \right) - \sin \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{f_2'} - \frac{b}{2f_1'} \right) \right)}{\frac{2\pi ab}{\lambda f_1'}} \right)$$

D'où, en utilisant la formule trigonométrique $\sin a - \sin b = 2 \sin \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{a+b}{2} \right)$:

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \Gamma(b) \cos \left(\frac{2\pi x}{i} \right) \right)$$

où $i = \frac{\lambda f_2'}{a}$ est l'interfrange, et où $\Gamma(b) = \text{sin}_c \left(\frac{\pi ab}{\lambda f_1'} \right)$, sin_c désignant la fonction **sinus cardinal** définie par $\text{sin}_c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, et $\text{sin}_c(0) = 1$.

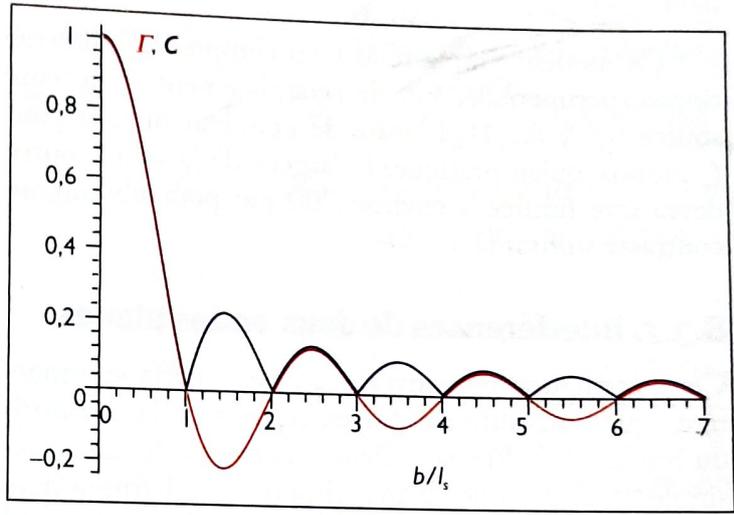


Figure 8.25 Variations de C , en bleu, et de Γ , en rouge, en fonction du rapport b/l_s . l_s est la longueur de cohérence spatiale, valeur minimale de b pour laquelle une annulation de C et Γ est observée.

Interprétation

À partir de la formule précédente, on trouve : $I_{\max} = 2I_0(1 + |\Gamma(b)|)$, $I_{\min} = 2I_0(1 - |\Gamma(b)|)$, d'où $|\Gamma(b)| = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = C(b)$.

$C(b) = |\Gamma(b)|$ est le facteur de contraste, variable avec la largeur b de la fente source, de la figure d'interférences. Les variations de Γ et de C sont représentées figure 8.25.

- Si $b \rightarrow 0$, $\Gamma(b) \rightarrow 1$ et $I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi x}{i} \right) \right)$

Le contraste est maximal, la cohérence spatiale totale et on retrouve l'expression de $I(M)$ pour une fente source infiniment fine disposée en F_{L_1} .

- Si $0 < b < l_s = \frac{\lambda f_1'}{a}$; lorsque b augmente, le contraste $C(b) = |\Gamma(b)|$ diminue rapidement, les franges sont partiellement brouillées. On dit qu'il y a perte de cohérence spatiale.

- Si $b = m\ell_s$; le contraste des franges s'annule, celles-ci sont totalement brouillées. La largeur minimale $b_1 = \ell_s = \frac{\lambda f_1'}{a}$ pour laquelle l'annulation du contraste est observée est appelée **longueur de cohérence spatiale** du dispositif des fentes d'Young. Cette annulation du contraste est observée pour toutes les largeurs $b_m = m\ell_s$ multiples de ℓ_s . La cohérence spatiale est alors nulle.
- Si $\ell_s < b < 2\ell_s$; $I(b)$ est négatif et les franges réapparaissent avec un contraste faible mais inversé. Les franges qui étaient brillantes pour $b < \ell_s$ sont devenues sombres, et réciproquement.
- Si $b \gg \ell_s$; le contraste $C(b)$ tend vers 0 et le système de franges est totalement brouillé.

Ordre de grandeur de ℓ_s :

On prend $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$, $f_1' = 150 \text{ mm}$, $a = 350 \mu\text{m}$,

$$\text{d'où } \ell_s = \frac{\lambda f_1'}{a} = \frac{0,55 \cdot 10^{-6} \times 150 \text{ mm}}{350 \cdot 10^{-6}} \approx 0,25 \text{ mm.}$$

Ce modèle simple rend bien compte des observations expérimentales lors de l'élargissement de la fente source (cf. § 8.2.1). L'ordre de grandeur obtenu pour ℓ_s montre qu'en pratique, la largeur de la fente source devra être limitée à environ $200 \mu\text{m}$ pour obtenir un contraste suffisant.