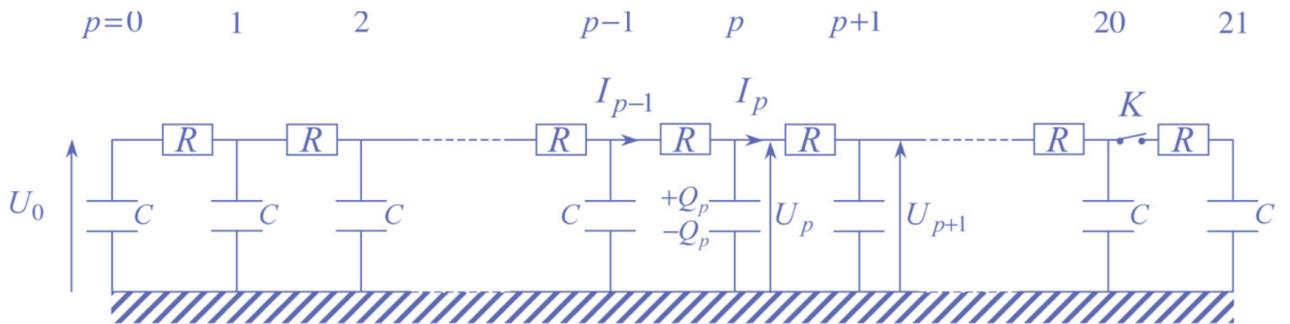
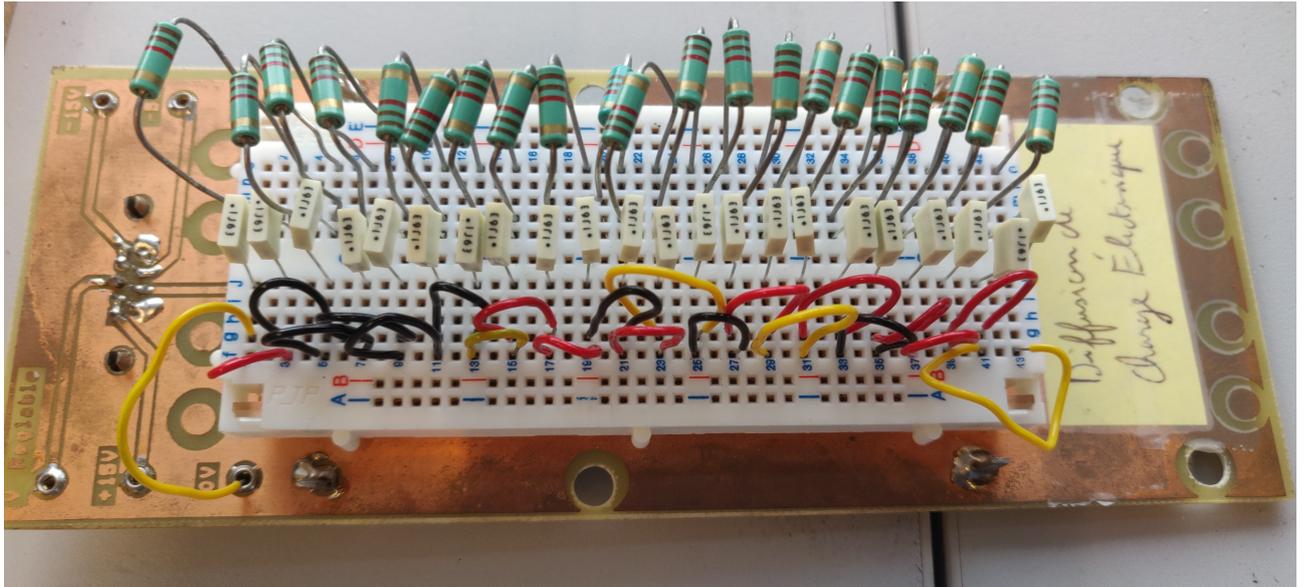


Diffusion de charge électrique à une dimension

1 Montage et modélisation

La maquette est constituée de 21 résistances de $1.1k\Omega$ chacune et 22 condensateurs de $100nF$ chacun



2 Équations

On considère un modèle continu (type câble coaxial sans inductance), donc (lois des mailles et des noeuds) :

$$i(x + dx) = i(x) - \Gamma dx \frac{du}{dt}$$

$$u(x + dx) = u(x) - r dx i(x + dx)$$

Avec Γ la conductance linéique et r la résistance linéique.

Ainsi,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = r\Gamma \frac{du}{dt}$$

On note

$$D = \frac{1}{r\Gamma}$$

En régime forcé sinusoïdal, on impose une tension $U(x = 0, t) = U_0 \cos(\omega t)$ en entrée. En admettant qu'il s'établit un régime sinusoïdal, on va chercher des solutions sous la forme $U(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$.

En notations complexes :

$$\underline{U}(x, t) = \underline{A}(x) e^{i\omega t}$$

avec

$$\underline{A}(x) = A(x) e^{i\omega t}$$

En injectant dans l'équation de diffusion, on obtient :

$$\underline{A}''(x) - i \frac{\omega}{D} \underline{A}(x) = 0$$

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$\underline{A}(x) = B' e^{\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x} + B e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x}$$

Les solutions physiquement acceptables sont

$$\underline{A}(x) = B e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x}$$

En posant $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$:

$$\underline{U}(x, t) = B e^{-(1+i)\frac{x}{\delta}} e^{i\omega t}$$

Et sachant que

$$\underline{U}(x = 0, t) = U_0 e^{i\omega t}$$

On en déduit

$$B = U_0$$

Finalement,

$$\boxed{U(x, t) = U_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}$$

3 Avec des résistances discrètes

Ces équations dépendantes de Γ et de r ne sont pas fidèles au système qui est fait de résistances et condensateurs discrets (et non linéaires). Il suffit alors de considérer des distances l :

$$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \Gamma r}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \frac{C}{l} \frac{R}{l}}} = l \sqrt{\frac{2}{\omega C R}}$$

On a physiquement accès à la tension U_p à la position $x = pl$.

Finalement,

$$\boxed{U_p(t) = U_0 e^{-\frac{p}{\sqrt{\frac{2}{\omega C R}}}} \cos\left(\omega t - \frac{p}{\sqrt{\frac{2}{\omega C R}}}\right)}$$