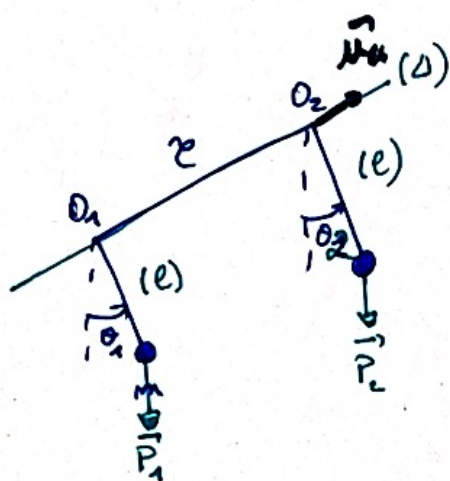


# 1] Système classique : les pendules couplés :

a) Le système :



On considère un système de deux pendules couplés par un fil de torsion  $J, m \Rightarrow$  Identiques

\* d'étude se fera dans le référentiel du laboratoire galiléen.

\* Système à deux degrés de liberté géométriques

On fait un bilan des forces :  $\vec{P}_1, \vec{P}_2$   
 bilan des moments :  $\mathcal{M}_1(\vec{P}_1), \mathcal{M}_2(\vec{P}_2), \vec{r}_{12} \cdot \vec{c} = -c(\theta_1 - \theta_2)$

$$\vec{r}_{12} \cdot \vec{c} = -c(\theta_2 - \theta_1)$$

b) Mise en équation

On applique le théorème du moment cinétique scalaire au pendule (1) et à (2)

$$\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 = -mgl\theta_1 - c(\theta_1 - \theta_2) & (1) \\ J\ddot{\theta}_2 = -mgl\theta_2 - c(\theta_2 - \theta_1) & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{mgl}{J}\theta_1 + \frac{c}{J}(\theta_1 - \theta_2) \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{mgl}{J}\theta_2 + \frac{c}{J}(\theta_2 - \theta_1) \end{cases}$$

Objectif : résoudre  $J$

Résolution

$$\hookrightarrow \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_0^2 + \omega_c^2 & -\omega_c^2 \\ -\omega_c^2 & \omega_0^2 + \omega_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = 0$$

On obtient une équation matricielle et on cherche des solutions particulières

on pose donc

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$$

$$\text{et } \omega_c^2 = \frac{c}{J}$$

c). Recherche de solutions particulières: Modes propres!

(2)

Commençons par définir la notion de modes propres.

des modes propres sont des solutions <sup>harmoniques</sup> de l'équation du mouvement indépendante en régime libre.

Ainsi un mouvement quelconque se décompose comme une somme de modes propres.

**NB: N modes propres pour N oscillateurs.**

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_0^1 e^{j\omega t} \\ \theta_2 = \theta_0^2 e^{j\omega t} \end{cases}$$

→ recherche des fréquences propres.

i) faut diagonaliser.  $\Gamma \rightarrow \det(\lambda \text{Id} - \Gamma) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - \omega_0^2 - \omega_c^2 & \omega_c^2 \\ \omega_c^2 & \lambda - \omega_0^2 - \omega_c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - \omega_0^2 - \omega_c^2)^2 - \omega_c^4 = 0$$

on obtient :

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \omega_0^2 \\ \omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\omega_c^2 \end{cases}$$

on obtient donc les pulsations propres

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \\ \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2} \end{cases}$$

→ recherche des solutions propres i.e les vecteurs propres.

$$\Gamma \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = (\omega_0^2 + 2\omega_c^2) \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

Dans la base  $\theta_1$  et  $\theta_2$

~~cas 1)  $\vec{v}_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = S$  mode symétrique.  $\eta(t) = \theta_1 + \theta_2$~~

~~les deux pendules oscillent en phase.~~

~~on a donc  $\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta_0 \cos(\omega_1 t + \varphi)$~~

~~Se mode s'obtient par exemple avec les conditions initiales :~~

~~$\theta_{10} = \theta_0 = \theta_{20}$~~

~~$\dot{\theta}_1(t=0) = \dot{\theta}_2(t=0) = 0$~~

cas (2)

$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  soit la variable  $\theta_1 - \theta_2 = A(t) = \theta_0 \cos(\omega_2 t)$

l'oscillateur  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont en opposition de phase.

ce mode est excité si les conditions initiales sont  $\theta_{10} = -\theta_{20} \Rightarrow$  et la vitesse initiale nulle

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$$

faire la manip.



Rq: on a S et A solution d'équations d'oscillateur d'harmonique.

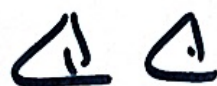


Rq: ② la fréquence du mode symétrique est toujours  $< 0$  à celle du mode antisym qui elle dépend de  $\epsilon$



Rq: 3: 2 oscillateurs deux modes propres

Rq 4: L'excitation des modes propres dépend des CI !!



c) Solution plus générale: décomposition en modes propres: Battements

CI  $\theta_1(0) = \theta_{10}$

$\theta_2(0) = 0$

$\dot{\theta}_{1,2}(0) = 0$



on peut montrer

on a donc

$$\theta_1 = \frac{S+A}{2} = \frac{\theta_{10}}{2} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))$$

$$\theta_2(t) = \frac{S-A}{2} = \frac{\theta_{10}}{2} (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t))$$

relat Trigo  $\Rightarrow$

$$\theta_1(t) = \theta_{10} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$$

$$\theta_2(t) = \theta_{10} \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$$

Supposons  $\omega_c \ll \omega_0 \Rightarrow$  Hypothèse de couplage faible alors  $\theta_1 \approx \theta_{10} \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{\text{rapide}} \underbrace{\cos(\omega_c t)}_{\text{lent}}$  (4)

$$\theta_2 = \theta_{20} \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_c t)$$

## II] La molécule d'ammoniac.

(4)

### 1) Modèle de la mole

#### 1) Généralisation :

La molécule d'ammoniac a une forme pyramidale (USEP)  
le passage de l'atome d'azote de par et d'autre de (P) se modélise par ~~un~~ l'effet tunnel de par et d'autre de la barrière locale de Potentielle.

ON néglige les dde de rotation et de vibration ainsi que de translation

ON modélise donc le couplage par un hamiltonien :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & -A \\ -A & E_2 \end{pmatrix}$$

termes induisant une transition

$$A \approx 2A \sim 10^{-4} \text{ eV}$$

A chaque état est associée une NRT

dans la base associée à  $|\psi_0\rangle$  et  $|\psi_d\rangle$   
( $|\psi_0\rangle, |\psi_d\rangle$ )

NRT en l'absence de couplage comme si la barrière était  $\infty$ .  
Les états  $|\psi_d\rangle$  et  $|\psi_g\rangle$  ont la m NRT

$E_0$  : hauteur de la

2) Grâce en équation: évolution du système:

A l'instant  $t$  :  $|\psi(t)\rangle = c_d(t) |\psi_d\rangle + c_g(t) |\psi_g\rangle$ .

ON a donc :  $i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H} |\psi(t)\rangle$ .

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_g \\ \dot{c}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & -A \\ -A & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_g \\ c_d \end{pmatrix}$$

ON applique la m méthode on D2  $\mathcal{H}$

même méthode on D2  $\tilde{H}$ :

(5)

$$\begin{cases} \tilde{H}|\psi_g\rangle = E_1|\psi_g\rangle - A|\psi_d\rangle \\ \tilde{H}|\psi_d\rangle = -A|\psi_g\rangle + E_1|\psi_d\rangle. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{H}(|\psi_d\rangle + |\psi_g\rangle) = (E_1 - A)(|\psi_g\rangle + |\psi_d\rangle) \\ \tilde{H}(|\psi_g\rangle - |\psi_d\rangle) = (E_1 + A)(|\psi_g\rangle - |\psi_d\rangle) \end{cases}$$

Pour les vecteurs propres  $\sum_p E_A$  condit<sup>o</sup> de normalisat<sup>o</sup>  $\sum_p \bar{E}_S$

$$|\psi_s\rangle = \frac{|\psi_g\rangle + |\psi_d\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|\psi_a\rangle = \frac{|\psi_g\rangle - |\psi_d\rangle}{\sqrt{2}}$$

Evolution: on applique l'opérateur d'évolution.

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right) \text{ dans la base } |\psi_s\rangle, |\psi_a\rangle.$$

$$\text{si à } t=0 \quad |\psi(0)\rangle = a|\psi_s\rangle + b|\psi_a\rangle.$$

$$\text{alors } |\psi(t)\rangle = \hat{U}|\psi(0)\rangle = a e^{-\frac{i(E_0+A)t}{\hbar}} |\psi_s\rangle + b e^{-\frac{i(E_0-A)t}{\hbar}} |\psi_a\rangle.$$

$$P_a = |\langle\psi_a|\psi\rangle|^2 = b^2$$

$$P_s = |\langle\psi_s|\psi\rangle|^2 = a^2$$

si le \$ est dans un état propre  $\rightarrow$  il y reste !