

Mécanique des fluides (PT, TSI)

1 Statique des fluides	1
1.1 Pression dans un fluide en équilibre	1
1.2 Cas des gaz	1
1.3 Cas des liquides	2
2 Description d'un écoulement incompressible	2
3 Énergétique d'un écoulement stationnaire laminaire	2
3.1 Caractérisation d'un écoulement visqueux	2
3.2 Généralisation du Premier Principe en écoulement visqueux	3

1 Statique des fluides

1.1 Pression dans un fluide en équilibre

En sommant les contributions de la force pressante surfacique $\overrightarrow{dF}_p = -P \overrightarrow{dS}$ autour d'un volume élémentaire dV d'une particule fluide, on obtient son expression volumique :

$$\overrightarrow{dF}_p = -\overrightarrow{\text{grad}} P dV$$

Ainsi, pour une particule fluide en équilibre dans le champ de pesanteur, la force volumique de pression s'oppose à la somme des autres forces volumiques (le poids, dans un référentiel galiléen, auquel s'ajoute la force d'inertie d'entraînement en référentiel non galiléen). Cet équilibre conduit à la **loi de l'hydrostatique**, où $\overrightarrow{a}_{\text{ent}}$ est l'accélération d'entraînement de la particule :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho (\overrightarrow{g} - \overrightarrow{a}_{\text{ent}})$$

1.2 Cas des gaz

► Sur de courtes distances

Pour une dénivellation $H \leq 100 \text{ m}$ avec $\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, la variation de pression dans l'air est $\rho g H \leq 1300 \text{ Pa} \sim P_{\text{atm}}/100$.

Dans un récipient de faible volume, la pression d'un gaz peut donc être considérée comme uniforme.

► Sur de grandes distances : modèle de l'atmosphère isotherme

Établissons le profil de pression dans un modèle d'atmosphère isotherme à T_o , considérée comme un gaz parfait dans un champ de pesanteur uniforme. La loi de l'hydrostatique couplée à celle des gaz parfaits conduit à un profil exponentiel de pression :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{PM}{RT} g$$

$$P(z) = P_{\text{atm}} \exp\left(\frac{-Mgz}{RT}\right)$$

Ce facteur exponentiel (appelé facteur de Boltzmann) illustre la compétition entre l'organisation d'origine gravitaire et l'agitation thermique. A forte température l'agitation thermique l'emporte, et la gravité ne contrôle plus la répartition verticale des particules dans cette atmosphère.

1.3 Cas des liquides

La masse volumique des liquides étant au moins 10^3 plus élevée que celle des gaz, les variations de pression dans les liquides ne sont pas négligeables devant la pression atmosphérique. En prenant l'axe (Oz) orienté vers le haut, la loi de l'hydrostatique s'applique en tout point :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

La résultante des forces pressantes exercées sur un système à l'équilibre dans un référentiel galiléen est la **poussée d'Archimède** $\vec{\pi}$; elle s'oppose à la somme des forces volumiques appliquées.

Propriété

Pour un système à l'équilibre soumis uniquement à son poids et à $\vec{\pi}$, la poussée d'Archimède est l'opposée du poids du fluide déplacé : $\vec{\pi} = -m_{\text{fluide}} \vec{g}$

2 Description d'un écoulement incompressible

L'écoulement d'une veine fluide de section S , de masse volumique ρ et de vitesse $\vec{v}$ est caractérisé par son **débit massique** $D_m = \iint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$. Son **débit volumique** est $D_v = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S}$. Ainsi, pour une vitesse uniforme sur la section de l'écoulement, on a $D_m = \rho v S = \rho D_v$ en tout point. L'écoulement est dit **incompressible** si les particules de fluides sont de volume constant lors de l'écoulement. C'est notamment le cas de l'air à une vitesse inférieure à celle du son.

Propriété

Pour un fluide en **écoulement stationnaire**, le débit massique D_m se conserve le long d'un tube de courant, y compris pour un écoulement à plusieurs entrées/sorties :

$$\sum_{\text{entrees}} D_m(i) = \sum_{\text{sorties}} D_m(j)$$



Pour un écoulement stationnaire, toutes les dérivées temporelles décrivant l'écoulement sont nulles. Attention : cela ne signifie pas qu'une particule de fluide aura une vitesse constante tout au long de son trajet. Par exemple, elle accélère dans un étranglement d'après la conservation du débit massique entre A et B (avec $\rho = C^{\text{te}}$) : $v_A S_A = v_B S_B$ donc $v_B > v_A$ si $S_B < S_A$.

3 Énergétique d'un écoulement stationnaire laminaire

3.1 Caractérisation d'un écoulement visqueux

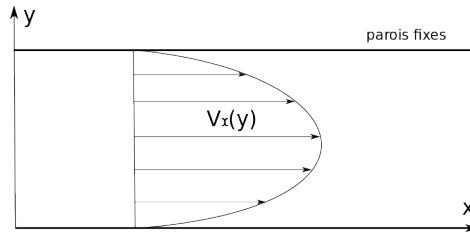
Un fluide est dit **visqueux** s'il existe des forces de frottement entre les particules de fluide ou entre le fluide et les parois qui le guident dans son écoulement. Si ces forces peuvent être négligées, on parle d'écoulement de fluide **parfait**.

En coordonnées cartésiennes, dans l'écoulement d'un fluide visqueux selon (Ox), le profil de vitesse $v_x(y)$ illustré ci-dessous dépend de la distance aux parois, fixes ou mobiles, selon (Oy). Le

gradient de vitesse $\frac{\partial v_x(y)}{\partial y}$ est alors à l'origine d'un cisaillement des couches de fluide, donnant lieu à une force surfacique de cisaillement entre couches, s'opposant à l'écoulement :

$$\vec{dF}_{\text{visc}} = -\eta \frac{\partial v_x(y)}{\partial y} \vec{dS}$$

où η est la **viscosité dynamique** du fluide (exprimée en $\text{Pa}\cdot\text{s}$). Si le cisaillement est proportionnel au taux de déformation ($\eta = \text{cste}$), on parle de **fluide newtonien**. C'est notamment le cas de l'air, de l'eau, ou des huiles de lubrification. Par définition, un **fluide non newtonien** ne suit pas cette loi linéaire ; par exemple le dentifrice ne s'écoule pas sous son propre poids (fluide à seuil), et la maïzena voit sa viscosité augmenter quand on la cisaille (fluide rhéoépaississant).



La description d'un écoulement nécessite généralement que l'on connaisse les conditions aux limites du profil de vitesse dans le fluide. Ainsi, un écoulement visqueux est généralement supposé adhérer localement aux parois de la conduite : la vitesse du fluide sur les bords est prise égale à la vitesse de la paroi (**hypothèse d'adhérence**).

► Quelques ordres de grandeur de viscosité :

$$\eta_{\text{air}} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\eta_{\text{R134a}} = 2 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\eta_{\text{eau}} = 1,0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\eta_{\text{huile}} \simeq 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\eta_{\text{miel}} \simeq 10 - 100 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\eta_{\text{roche}} \simeq 10^{22} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Propriété

Le niveau de mélange des couches de fluide d'un écoulement est caractérisé par le **nombre de Reynolds** (sans dimension) défini par $Re = \frac{\rho V L}{\eta}$, où V est la vitesse moyenne de l'écoulement, et L la distance caractéristique sur laquelle le gradient de vitesse varie.

- ▷ L'écoulement est dit **laminaire** si $Re \leq 1$ (ex. : fluide visqueux à faible vitesse);
- ▷ L'écoulement est dit **turbulent** si $Re \geq 10^4$ (ex. : fluide peu visqueux à vitesse élevée).

3.2 Généralisation du Premier Principe en écoulement visqueux

En présence de dissipation visqueuse dans l'écoulement, le Premier Principe thermo-industriel se généralise en tenant compte d'une puissance perdue par le fluide lors de son écoulement :

$$D_m[h + e_c + e_p]_e^s = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_q + \mathcal{P}_{\text{visc}}$$

où la puissance dissipée par viscosité $\mathcal{P}_{\text{visc}}$ s'ajoute à la puissance utile $\mathcal{P}_u$ et à la puissance calorifique $\mathcal{P}_q$ définies au chapitre précédent. D'autre part, afin d'opérer un tri efficace des phénomènes, l'enthalpie massique peut s'écrire en fonction de la pression et de la température : $h = c_P T + \frac{P}{\rho}$.

► **Cas d'un écoulement parfait, calorifugé, sans pièce mécanique mobile :**

Avec $P_u = P_q = P_{\text{visc}} = 0$, si l'on suppose de plus l'écoulement isotherme, on obtient entre les points A et B de l'écoulement la **relation de Bernoulli** :

$$\frac{P_A}{\rho_A} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\rho_B} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B$$

► **Ajout d'une pièce mécanique mobile (pompe, turbine, compresseur, etc.) :**

En tenant compte des pièces mécaniques mobiles rencontrées par le fluide dans le composant industriel traversé, et en supposant la masse volumique uniforme, on a :

$$\rho D_v [h + e_c + e_p]_e^s = \mathcal{P}_u$$

En introduisant la notion de **charge de l'écoulement** $C = P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z$, le Premier Principe thermo-industriel s'écrit, pour un fluide parfait :

$$[P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z]_e^s = \Delta C = \frac{\mathcal{P}_u}{D_v}$$

► **Ajout de dissipations visqueuses (pertes de charge) :**

La dissipation visqueuse est responsable de pertes de charges ($\Delta C < 0$) dans un écoulement. Sans pièce mécanique mobile, le Premier Principe en écoulement s'écrit alors :

$$[P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z]_e^s = \Delta C = \frac{\mathcal{P}_{\text{visc}}}{D_v}$$

Afin d'évaluer les pertes de charge, il faut formuler des hypothèses sur chaque zone de l'écoulement.

▷ **Dans une canalisation lisse** de rayon R , un écoulement de viscosité η et de débit volumique

$$D_v \text{ subit une } \underline{\text{perte de charge régulière}} \text{ par unité de longueur : } \frac{dC}{dx} = -\frac{8\eta D_v}{\pi R^4}.$$

▷ **Dans une canalisation de rugosité relative connue** et de diamètre D , la perte de charge régulière

s'écrit $\frac{dC}{dx} = -\frac{\xi}{D} \frac{\rho v^2}{2}$, où le coefficient de perte de charge linéique ξ se déduit du diagramme de Moody en fonction du nombre de Reynolds $\mathcal{Re}$ (ci-dessous).

▷ **À la traversée d'un changement brutal de géométrie** (coude, clapet, changement de canalisation, ...) le fluide subit une perte de charge singulière, proportionnelle à l'énergie cinétique

massique du fluide : $\Delta C = -K \frac{\rho v^2}{2}$, où le facteur K dépend de l'obstacle traversé. Quelques exemples de coefficients de pertes de charge singulières sont donnés ci-dessous.

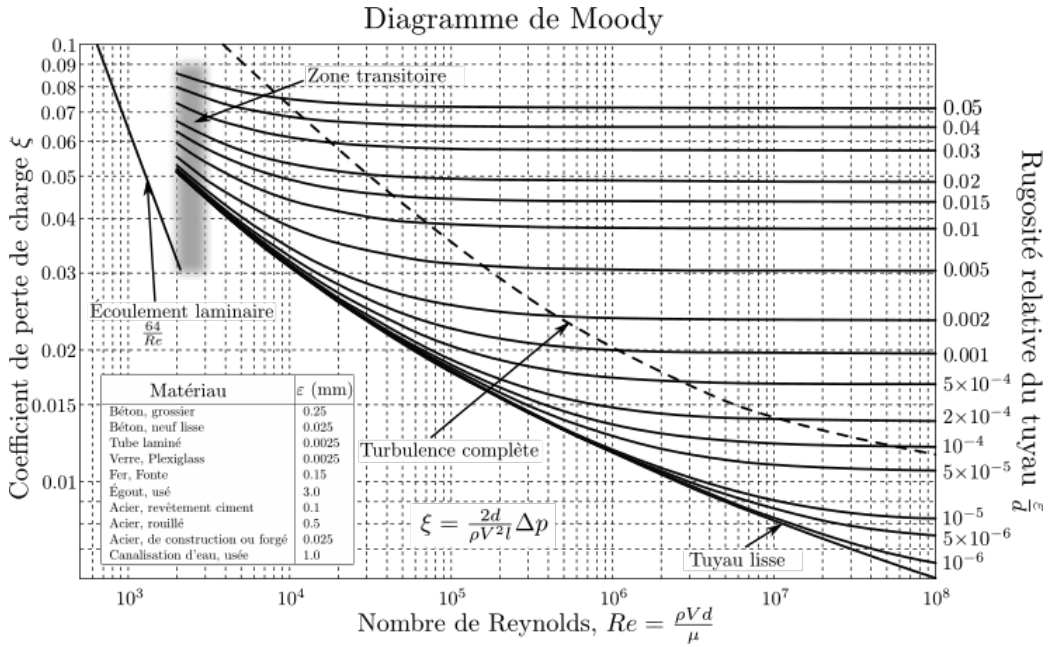


Fig. 1 – Diagramme de Moody donnant le coefficient de pertes de charge régulières ξ en fonction du nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho V d}{\mu}$ qui caractérise l'écoulement, et de la rugosité relative adimensionnée $\frac{\varepsilon}{d}$ du tuyau d'écoulement.

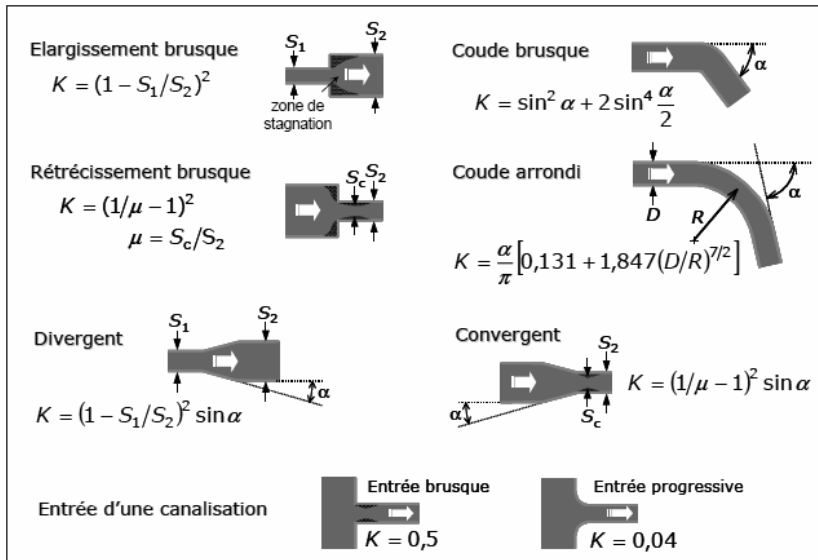


Fig. 2 – Exemples de coefficients de pertes de charge singulières K .