Exercices

Lois de Coulomb du frottement solide

1 **Oscillateur avec frottement solide** 1

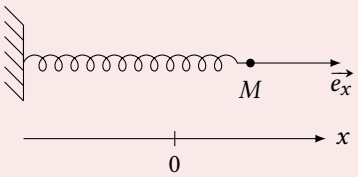
2 **Mouvement d'un pendule** 4

3 **Barre de traction** 6

4 **Cage d'écureuil** 8

1 Oscillateur avec frottement solide

On considère un oscillateur masse-ressort horizontal avec un frottement solide de coefficient $f_s = f_d = f$. Le ressort est de raideur k et l'origine $x = 0$ correspond à sa longueur à vide. La masse M est abandonnée sans vitesse initiale à l'abscisse x_0 vérifiant $kx_0 > fmg$.



Déterminer l'équation du mouvement puis tracer x en fonction de t.

On étudie le système M assimilé à un point matériel dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ supposé galiléen. Dans ce référentiel, le système est soumis à :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, vertical dirigé vers le bas ;
- la force de rappel élastique $\vec{F} = -kx\vec{e_x}$;
- la réaction normale $\vec{R_N}$, verticale dirigée vers le haut ;
- la réaction tangentielle $\vec{R_T}$, portée par $\vec{e_x}$ mais dont le sens dépend de la direction de déplacement du mobile.

La deuxième loi de Newton en projection sur $\vec{e_z}$ donne immédiatement :

$$R_N = mg.$$

Dans le cas du glissement, on a donc :

$$\|\vec{R_T}\| = fmg.$$

Analyse qualitative :

- Les frottements dissipent de l'énergie et mènent à une diminution de l'amplitude des oscillations.
- La vitesse de M s'annule toutes les demi-périodes. Si, lors de cet arrêt, on a $k|x| < fmg$, la force de rappel élastique n'est plus suffisante pour vaincre les frottements et M reste immobile.

Initialement, M se déplace dans le sens des x décroissants :
La réaction tangentielle est dirigée selon $+\overrightarrow{u_x}$ et se met sous la forme : $\overrightarrow{R_T} = fmg\overrightarrow{u_x}$. La deuxième loi de Newton en projection sur $\overrightarrow{e_x}$ donne ainsi :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = fg,$$

et la solution générale de cette équation différentielle est :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{fgm}{k} \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Avec $x_0 > 0$ la position initiale, l'abscisse $x(t)$ de M est :

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{fmg}{k}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{fmg}{k}.$$

La vitesse du point M est :

$$\dot{x} = -\left(x_0 - \frac{fmg}{k}\right)\omega_0 \sin(\omega_0 t).$$

La vitesse s'annule pour $\omega_0 t = \pi$, soit après une demi-période : $t = \dfrac{T_0}{2}$. On a alors $\cos(\omega_0 t) = -1$ et l'abscisse de M est alors :

$$x\left(\frac{T_0}{2}\right) = -x_0 + 2\frac{fmg}{k}$$

Remarque:
Dans le cas d'un oscillateur élastique sans frottements, M oscillerait autour de $x = 0$ dans un mouvement d'amplitude x_0 et la première annulation de sa vitesse surviendrait donc en $x = -x_0$.

M peut ensuite se déplacer dans le sens des x croissants :
La réaction tangentielle est dirigée selon $-\overrightarrow{u_x}$ et se met sous la forme : $\overrightarrow{R_T} = -fmg\overrightarrow{u_x}$. La deuxième loi de Newton en projection sur $\overrightarrow{e_x}$ donne ainsi :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -fg,$$

et la solution générale de cette équation différentielle est :

$$x(t) = B\cos(\omega_0 t + \psi) - \frac{fgm}{k}.$$

En utilisant $x\left(\dfrac{T_0}{2}\right)$ comme nouvelle condition initiale, l'abscisse de M s'écrit :

$$x(t) = \left(-x_0 + 3\frac{fmg}{k}\right)\cos\left[\omega_0\left(t - \frac{T_0}{2}\right)\right] - \frac{fmg}{k}.$$

La vitesse s'annule à nouveau pour $t = T_0$ et l'abscisse vaut :

$$x(T_0) = x_0 - 4\frac{fmg}{k}.$$

En tenant ce calcul pour la n^{e} demi-période, on trouve :

$$x\left(n\frac{T_0}{2}\right) = (-1)^n\left(x_0 - 2n\frac{fmg}{k}\right).$$

Une fois arrêté, le mobile ne repart plus en sens inverse si $|R_T| < f|R_N|$. Or, à la position limite d'équilibre, on a :

$$\begin{cases} R_N = mg, \forall t \\ R_T = k\left|x\left(n\frac{T_0}{2}\right)\right| \end{cases}$$

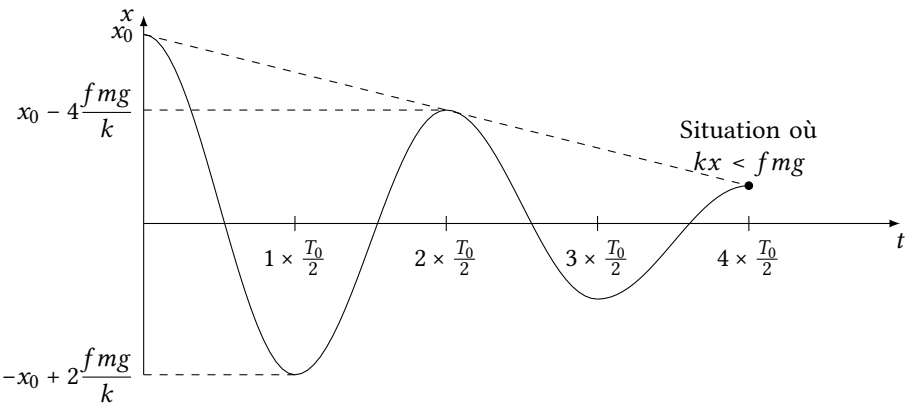
Le système reste donc définitivement à l'arrêt au n^{e} demi-tour si :

$$k\left(x_0 - 2n\frac{fmg}{k}\right) < fmg,$$

ou encore :

$$kx_0 < fmg\left(1 + \frac{2n}{k}\right).$$

Remarque:
On constate logiquement que la masse fera d'avantage de demi-tours si l'allongement initial x_0 augmente.



Alors que l'enveloppe du mouvement est exponentielle dans le cas du frottement fluide, on constate ici que l'enveloppe est affine.

Pour le prouver, calculons la pente de la droite reliant l'origine x_0 aux extrema positifs $x_{2n} = x\left(2n\frac{T_0}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} \frac{x_0 - x_{2n}}{nT_0} &= \frac{1}{nT_0}\left(x_0 - \left(x_0 - 4n\frac{fmg}{k}\right)\right) \\ &= 4\frac{fmg}{kT_0} \end{aligned}$$

La pente est bien constante, ce qui prouve le caractère affine de l'enveloppe.