

I. L'oreille externe : un pavillon acoustique

1. Hypothèse vérifiée si la section $S(z)$ varie lentement avec z , c'est à dire si la distance caractéristique de décroissance de $S(z)$ est grande devant la longueur d'onde de l'onde sonore.

2. Transformation adiabatique et réversible

3. $\chi_0 = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S$

4. $\chi_0 = \frac{1}{\rho_0 + \rho_a} \frac{\rho_0 + \rho_a - \rho_0}{\rho_0 + P - P_0} \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_a}{P}$ donc : $\rho_a(z, t) = \rho_0 \chi_0 p(z, t)$ (1)

5. $dm = m(t+dt) - m(t) = \rho(z, t+dt) S(z) dz - \rho(z, t) S(z) dz = \frac{\partial \rho}{\partial t}(z, t) dt S(z) dz$

et aussi : $dm =$ masse « entrant » en z pendant dt - masse « sortant » en $z+dz$ pendant dt

$$= \rho(z, t) v(z, t) S(z) dt - \rho(z+dz, t) v(z+dz, t) S(z+dz) dt$$

$$= - \frac{\partial}{\partial z} (\rho(z, t) v(z, t) S(z)) dz dt$$

En égalant les deux expressions de dm : $S(z) \frac{\partial \rho}{\partial t}(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho(z, t) v(z, t) S(z)) = 0$

6. La relation précédente s'écrit en développant :

$$S \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \underbrace{v \cdot S \frac{\partial \rho_a}{\partial z}}_{\substack{\uparrow \text{ordre 1} \\ \text{négligeable}}} + \underbrace{(\rho_0 + \rho_a) S \frac{\partial v}{\partial z}}_{\substack{\approx \rho_0 S \frac{\partial v}{\partial z} \\ \text{à l'ordre 1}}} + \underbrace{(\rho_0 + \rho_a) v \frac{dS}{dz}}_{\substack{\approx \rho_0 v \frac{dS}{dz} \\ \text{à l'ordre 1}}} = 0$$

donc : $S \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \left[S \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{dS}{dz} \right] = 0 \Rightarrow S \frac{\partial \rho_a}{\partial t}(z, t) + \rho_0 \frac{\partial}{\partial z} (S(z) v(z, t)) = 0$ (2)

7. Cela revient à écrire l'équation d'Euler : $\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = - \text{grad} P$

8. Linéarisation : $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial z}$ (3)

9. On dérive (3) par rapport au temps : $\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)$

(1) $\Rightarrow P = \frac{1}{\rho_0 \chi_0} \rho_a$ donc : $\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{1}{\rho_0 \chi_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial t} \right)$

(2) $\Rightarrow \frac{\partial \rho_a}{\partial t} = - \frac{1}{S} \rho_0 \frac{\partial}{\partial z} (S v)$ donc : $\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{S} \rho_0 \frac{\partial}{\partial z} (S v) \right)$

Donc : $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial z} (S v) \right) = 0$ avec : $c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_0}$

10. On a : $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{S} \frac{dS}{dz} v + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0$ On : $\frac{dS}{dz} = - \frac{1}{\delta}$
 $= - \frac{1}{\delta}$

Il reste : $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{c^2}{\delta} \frac{\partial v}{\partial z} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$

11. Par rapport à l'équation d'onde classique de D'Alembert, il y a en plus le terme $\frac{c^2}{\delta} \frac{\partial v}{\partial z}$

12. En notation complexe : $-\omega^2 \underline{v} + \frac{c^2}{\delta} i k \underline{v} - c^2 (-k^2 \underline{v}) = 0$

D'où : $k^2 + \frac{i}{\delta} k - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$

13. Discriminant : $\Delta = -\frac{1}{\delta^2} + 4 \frac{\omega^2}{c^2}$

Reimaginaire pur si $\Delta < 0 \Rightarrow \omega < \frac{c}{2\delta} \Rightarrow$ fréquence : $f < \frac{c}{4\pi\delta}$

A.N : $f < 5 \text{ kHz}$. C'est vérifié pour les fréquences caractéristiques de la parole

14. On a : $k = \frac{1}{2} \left[-\frac{i}{\delta} \pm i \sqrt{\frac{1}{\delta^2} - 4 \frac{\omega^2}{c^2}} \right] = \frac{1}{2} \left[-\frac{i}{\delta} \pm \frac{i}{\delta} \sqrt{1 - \frac{4\omega^2 \delta^2}{c^2}} \right]$

$\ll 1$ pour $f = 1 \text{ kHz}$

donc : $k \approx -\frac{i}{\delta}$ ou $k \approx 0$ (cas exclu)

• On a alors : $\underline{v}(z,t) = v_0 e^{i(-\frac{i}{\delta})z} e^{-i\omega t} = v_0 e^{\frac{z}{\delta}} e^{-i\omega t} \Rightarrow v(z,t) = v_0 e^{\frac{z}{\delta}} \cos \omega t$

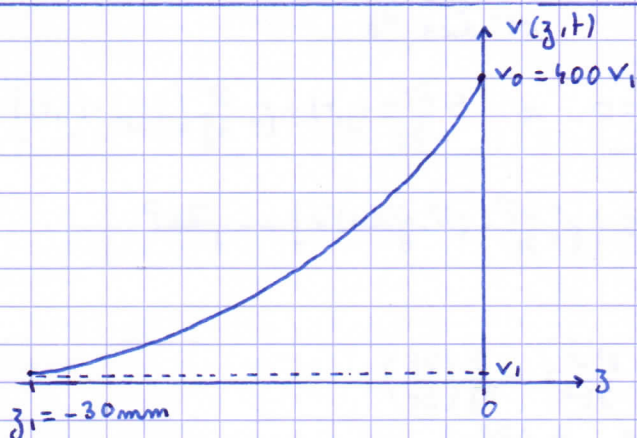
• Pour $z = z_1 = -30 \text{ mm}$: $v_1 = v_0 e^{\frac{z_1}{\delta}} \Rightarrow v_0 = v_1 e^{-\frac{z_1}{\delta}} \Rightarrow v(z,t) = v_1 e^{\frac{z-z_1}{\delta}} \cos \omega t$

• Au niveau du tympan : $v(0,t) = v_1 e^{-\frac{z_1}{\delta}} \cos \omega t$

L'amplitude de la vitesse particulière est : $v_1 e^{-\frac{z_1}{\delta}} = v_1 e^{-\frac{-30}{5}} = v_1 e^6 \approx 400 v_1$

A.N : amplitude en $z=0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$

15.



On se place à t tel que $\cos \omega t = 1$

$\Rightarrow v(z,t) = v_0 e^{\frac{z}{\delta}}$

16. L'oreille externe joue le rôle d'amplificateur par un facteur 400.

II - L'oreille moyenne

17 - Continuité de la pression acoustique en $z=0$:

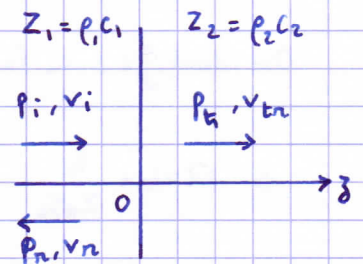
$$p_i(0,t) + p_r(0,t) = p_{tr}(0,t)$$

Continuité de la vitesse particulaire en $z=0$

$$v_i(0,t) + v_r(0,t) = v_{tr}(0,t) \quad \text{relation de structure} \quad \frac{p_i(0,t)}{Z_1} - \frac{p_r(0,t)}{Z_1} = \frac{p_{tr}(0,t)}{Z_2}$$

En divisant ces deux relations par $p_i(0,t)$: $\begin{cases} 1 + r = \tau \\ \frac{1 - r}{Z_1} = \frac{\tau}{Z_2} \end{cases}$

$$\text{D'où: } r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad \tau = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$



18. On a: $R = \frac{\langle p_r(0,t) \cdot v_r(0,t) \rangle}{\langle p_i(0,t) \cdot v_i(0,t) \rangle} \quad T = \frac{\langle p_{tr}(0,t) \cdot v_{tr}(0,t) \rangle}{\langle p_i(0,t) \cdot v_i(0,t) \rangle}$

$$\Rightarrow R = r^2 = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \quad T = 1 - R = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

19. A.N: $T = 10^{-3}$ ($Z_1 = 425 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$; $Z_2 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1} \gg Z_1$)

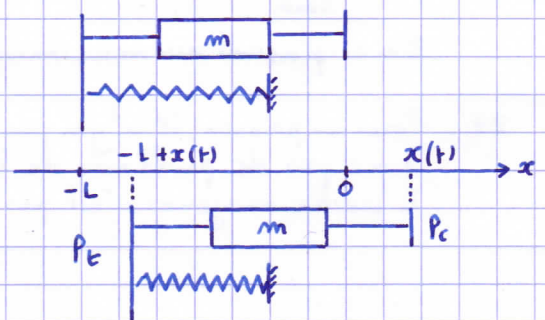
La transmission de l'air dans l'eau est très mauvaise

20. Référentiel Galiléen

Système: $\{m + \text{les 2 pistons}\}$

Principe fondamental de la dynamique en projection selon Oxc:

$$m\ddot{x} = -kx + p_t S_t - p_c S_c$$



21. $Z_0 = \frac{p_c(t)}{\dot{x}(t)}$

22. On a en notation complexe: $\ddot{x} = \frac{p_c}{Z_0} \Rightarrow \ddot{x} = -i\omega \frac{p_c}{Z_0}$ et $\underline{x} = -\frac{p_c}{i\omega Z_0}$

L'équation du mouvement devient: $-im\omega \frac{p_c}{Z_0} = \frac{k}{i\omega Z_0} \underline{p_c} - \underline{p_c} S_c + \underline{p_t} S_t$

$$\underline{p_c} \left[S_c - im\omega \frac{1}{Z_0} - \frac{k}{i\omega Z_0} \right] = \underline{p_t} S_t$$

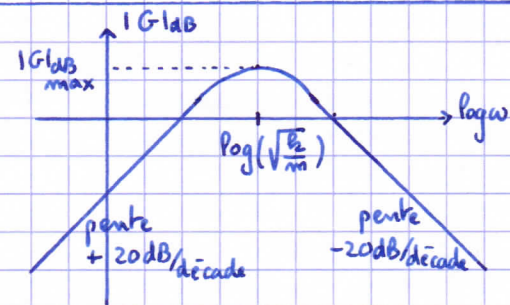
$$\text{d'où: } G(\omega) = \frac{S_t}{S_c + \frac{i}{Z_0} \left(\frac{k}{\omega} - m\omega \right)}$$

23. $|G(\omega)| = \frac{S_t}{\sqrt{S_c^2 + \frac{1}{Z_0^2} \left(\frac{k}{\omega} - m\omega \right)^2}}$

Si $\omega \rightarrow 0$: $|G(\omega)| \approx \frac{Z_0 S_t \omega}{k} \Rightarrow |G(\omega)|_{dB} = 20 \log \omega + \text{cte}$

Si $\omega \rightarrow +\infty$: $|G(\omega)| \approx \frac{Z_0 S_t}{m\omega} \Rightarrow |G(\omega)|_{dB} = -20 \log \omega + \text{cte}$

Si $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$: $|G(\omega)| = \frac{S_t}{S_c} \Rightarrow |G(\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{S_t}{S_c}$



24. On reconnaît un filtre passe-bande.

$$\text{On écrit: } G(\omega) = \frac{\frac{S_k}{S_c}}{1 + \frac{i}{Z_0 S_c} \left(\frac{P_k}{\omega} - m\omega \right)}$$

$$\text{On identifie avec la forme standard d'un passe-bande: } H(\omega) = \frac{H_0}{1 + iQ \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)}$$

$$\Rightarrow Q\omega_0 = \frac{P_k}{Z_0 S_c} \quad \text{et} \quad \frac{Q}{\omega_0} = \frac{m}{Z_0 S_c} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{P_k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{P_k m}}{Z_0 S_c}}$$

A basse fréquence: G en $-i\omega \Rightarrow$ comportement dérivateur

A haute fréquence: G en $\frac{1}{-i\omega} \Rightarrow$ comportement intégrateur

25. $G_{\max} = \frac{S_k}{S_c}$ A.N.: $G_{\max} = 21$

26. $T = \frac{\langle P_c v_c \rangle}{\langle P_t v_t \rangle}$ On a: $v_c = \frac{P_c}{Z_{\text{eau}}}$ (milieu aqueux pour l'oreille interne)

$$v_t = \frac{P_t}{Z_{\text{air}}} \quad (\text{air à gauche du tympan})$$

$$T = \frac{Z_{\text{air}} \langle P_c^2 \rangle}{Z_{\text{eau}} \langle P_t^2 \rangle}$$

$$= \frac{Z_{\text{air}}}{Z_{\text{eau}}} |G|^2$$

En se plaçant au maximum de gain: $T = \frac{Z_{\text{air}}}{Z_{\text{eau}}} G_{\max}^2$ A.N.: $T = 0,13$

27. Pour un poisson, il n'y a pas d'interface air/eau, mais une interface eau/eau donc pas de problème de transmission trop faible. L'oreille moyenne n'est pas nécessaire.

III La cochlée : un spectromètre acoustique

28. Entre les deux extrémités distantes de L , il y a un multiple de la demi-longueur d'onde

$$L = m \frac{\lambda_m}{2} = m \frac{c}{2f_m} \quad m \in \mathbb{N}^*$$

→ fréquences propres : $f_m = m \frac{c}{2L}$ mode propre : $s_m(x, t) = A_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(\omega_m t - \varphi_m)$

29. Une corde vibre si $\omega = \omega_m = 2\pi f_m = m \frac{\pi c}{L}$

Les cordes qui vont vibrer sont celles de longueur $L = \frac{m\pi c}{\omega}$

30. Un son complexe a un spectre composé de plusieurs fréquences.
 Ces différentes fréquences vont être détectées séparément par différentes cordes.
 La cochlée se comporte donc comme un spectromètre.

31. Pour une fréquence donnée, la résonance a lieu à une abscisse x bien précise de la membrane basilaire. Il y a une sélection "locale" des différentes fréquences du spectre sonore.

• Les plus hautes fréquences sont sélectionnées en premier au début de la membrane puis les basses fréquences sont sélectionnées plus loin.

• C'est en accord avec le modèle de Helmholtz où les cordes les plus courtes (qui ont une fréquence fondamentale élevée) sont en premier et les cordes les plus longues (qui ont une fréquence fondamentale faible) sont en dernier.

32. Il y a propagation car le retard de phase augmente lorsque x augmente.

33. Pour une onde plane en $\exp i(kx - \omega t)$, le retard de phase kx due à la propagation est fonction linéaire de x . On aurait donc une allure rectiligne pour la courbe $\varphi(x)$

34. $[c] = LT^{-1}$ c est une vitesse

35. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(c^2 h) - \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0$ or c dépend de x mais pas de $t \Rightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (c^2 h)}{\partial t^2}$

On a donc : $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0$

36. Si c est une constante, on retrouve l'équation d'onde classique de D'Alembert.

Solution du type : $a(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} + B e^{i(-kx - \omega t)}$ avec : $k = \frac{\omega}{c}$

On a deux ondes planes progressives en sens inverse.

37. On calcule : $\frac{\partial A_m}{\partial x} = [f'(x) + i\omega f(x)g'(x)] e^{i\omega g(x)}$

$\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} = [f''(x) + 2i\omega f'(x)g'(x) + i\omega f(x)g''(x) - \omega^2 f(x)g'(x)^2] e^{i\omega g(x)}$

38. $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} A_m = 0$

donc : $f'' + 2i\omega f'g' + i\omega f g'' - \omega^2 f g'^2 + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0$

$(f'' - \omega^2 f g'^2 + \frac{\omega^2}{c^2} f) + i\omega (2f'g' + f g'') = 0$

partie réelle = 0

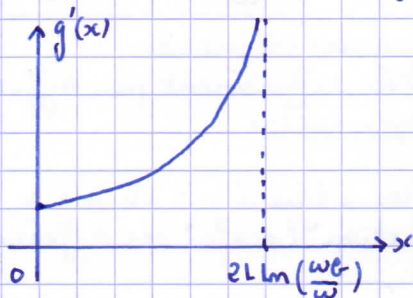
partie imaginaire = 0

d'où : $\boxed{f'' - \omega^2 f g'^2 + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0 \quad 2f'g' + fg'' = 0}$

39. $f'' \ll \omega^2 g'^2 f \Rightarrow -\omega^2 f g'^2 + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0$
 $\Rightarrow g'^2 = \frac{1}{c^2}$

g croissante $\Rightarrow g' > 0$ donc : $\boxed{g'(x) = \frac{1}{c} = \frac{1}{d\sqrt{\omega_0^2 e^{-\frac{x}{L}} - \omega^2}}}$

40. Le retard de phase est $\varphi(x) = \omega g(x) \Rightarrow g'(x)$ est proportionnelle à $\varphi'(x)$
 La courbe de phase de la figure 5 montre que la dérivée $\varphi'(x)$ est faible au début puis augmente fortement lorsque x augmente. C'est en accord avec l'allure du tracé de $g'(x)$



41. $2f'g' + fg'' = 0 \Rightarrow 2\frac{f'}{f} = -\frac{g''}{g'} \Rightarrow 2\ln f = -\ln g' + \text{cte}$
 $\Rightarrow f^2 = \frac{\text{cte}}{g'} = \text{cte} \cdot c$

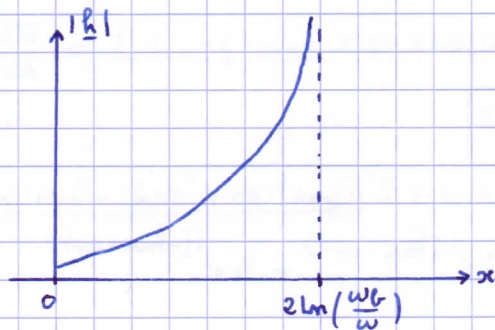
donc : $\boxed{f(x) = K\sqrt{c(x)}}$

42. On a : $c^2 \underline{h} = f(x) e^{i\omega g(x)} e^{-i\omega t} = K\sqrt{c(x)} e^{i\omega g(x)} e^{-i\omega t}$

Donc : $\boxed{|\underline{h}| = K c(x)^{-3/2}}$

43. On a : $|\underline{h}| = K d^{-3/2} (\omega_0^2 e^{-x/L} - \omega^2)^{-3/4} = K d^{-3/2} \frac{1}{(\omega_0^2 e^{-\frac{x}{L}} - \omega^2)^{3/4}}$

D'où l'allure :



44. L'allure de $|\underline{h}|$ correspond bien à l'allure de la courbe expérimentale de l'amplitude en fonction de x pour $x < x_{\max}$ = abscisse de la résonance.

Pour $x \gg x_{\max}$ les calculs précédents ne sont plus valables car l'hypothèse $f'' \ll \omega g'^2 f$ (variation lente de l'amplitude) n'est plus vérifiée.