The image shows the interior of an anechoic chamber, characterized by a dense array of wooden pyramidal electromagnetic absorbers designed to eliminate reflections. A white, curved waveguide structure is suspended horizontally across the center of the frame. A small, black electronic device is mounted on the waveguide. The lighting is bright, highlighting the texture and color of the wood.

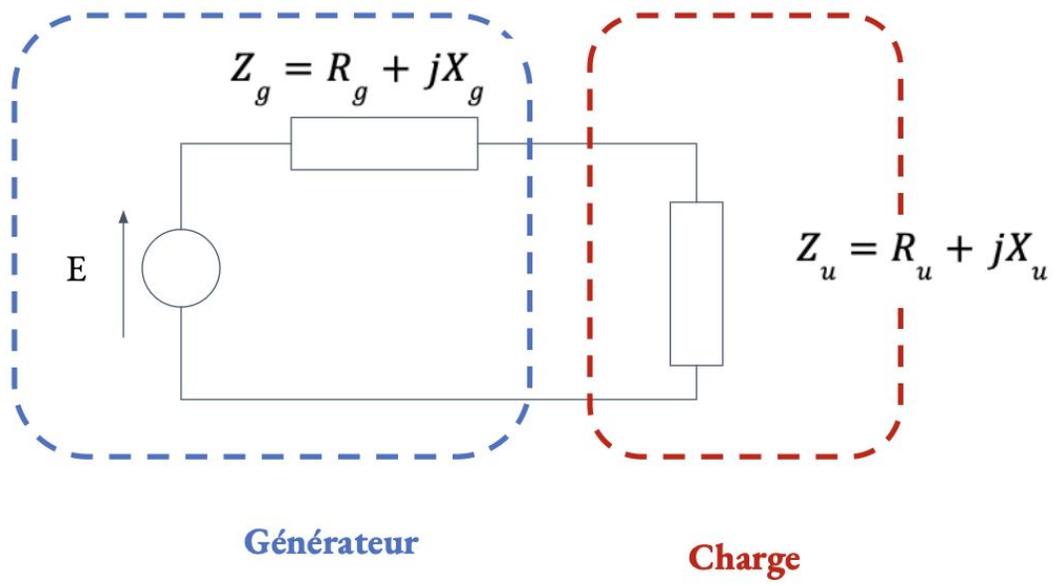
Adaptation d'impédance :  
exemples d'applications  
Niveau : Licence 2

# Prérequis

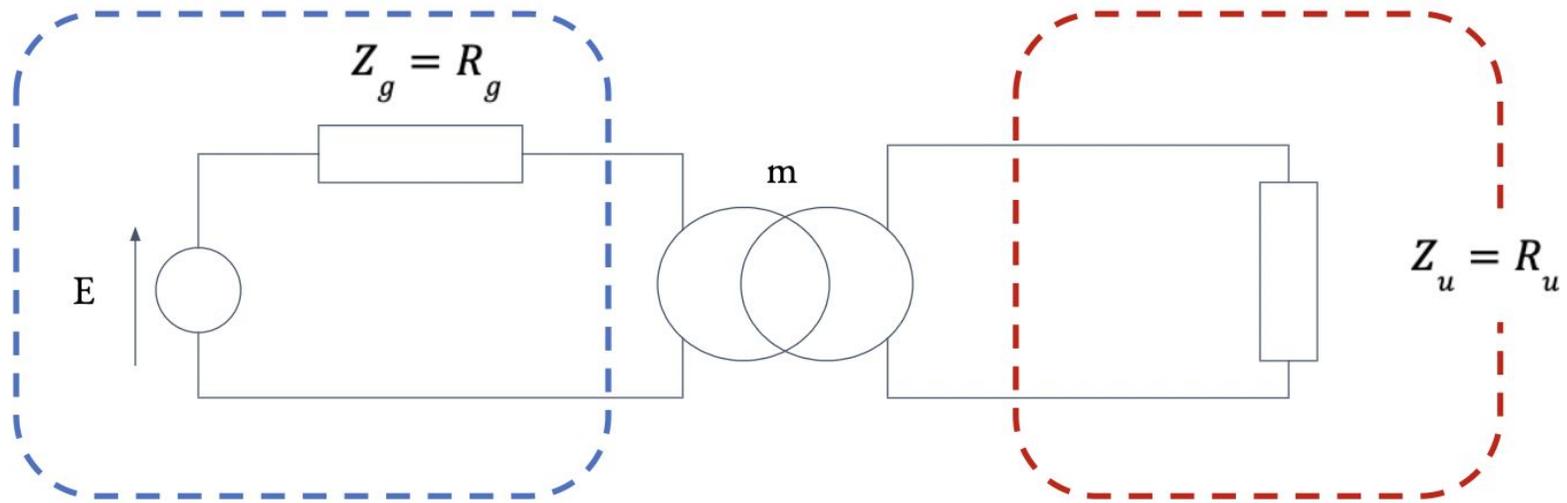
## Notion

- Approximation acoustique, équation d'Euler, établissement de l'équation de d'Alembert, relations de continuité des grandeurs acoustiques.
- Équations de d'Alembert : corde vibrante, champ électromagnétique.
- Electrocinétique : notion d'impédance, lois de Kirchoff, puissance électrique, fonctionnement d'un transformateur.
- Ondulatoire : onde plane progressive harmonique.



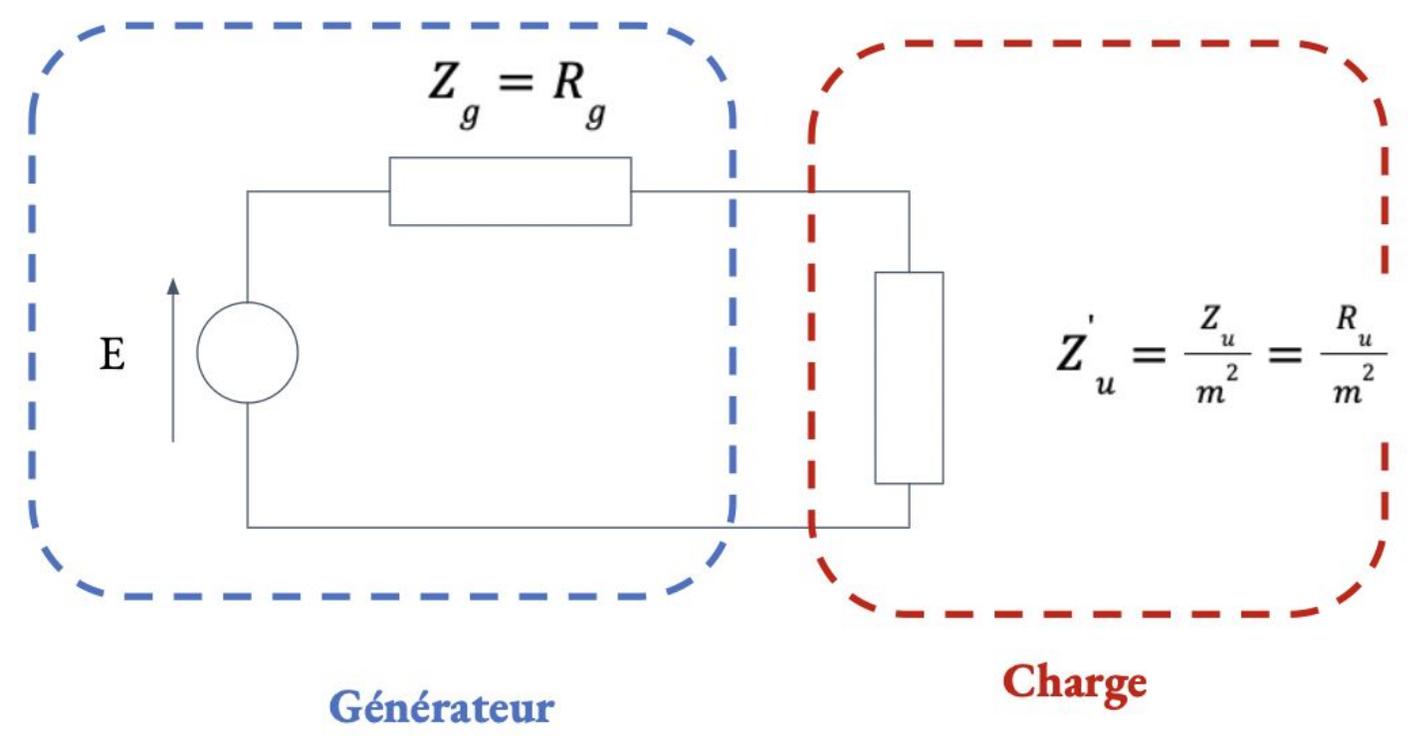




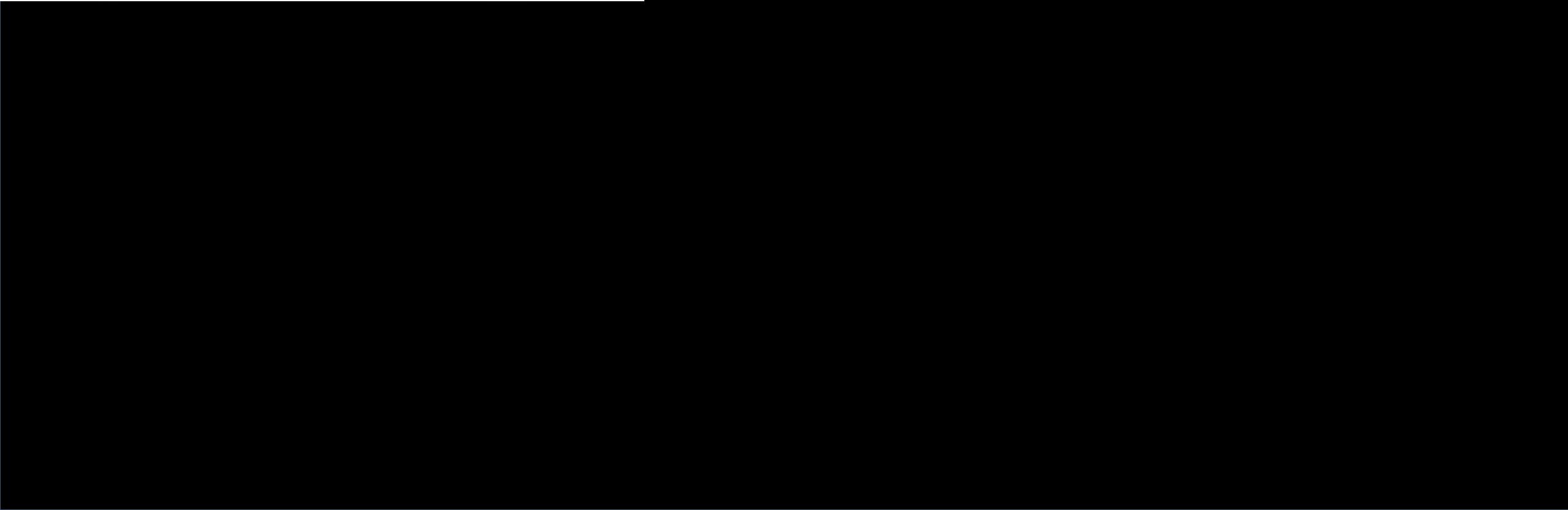
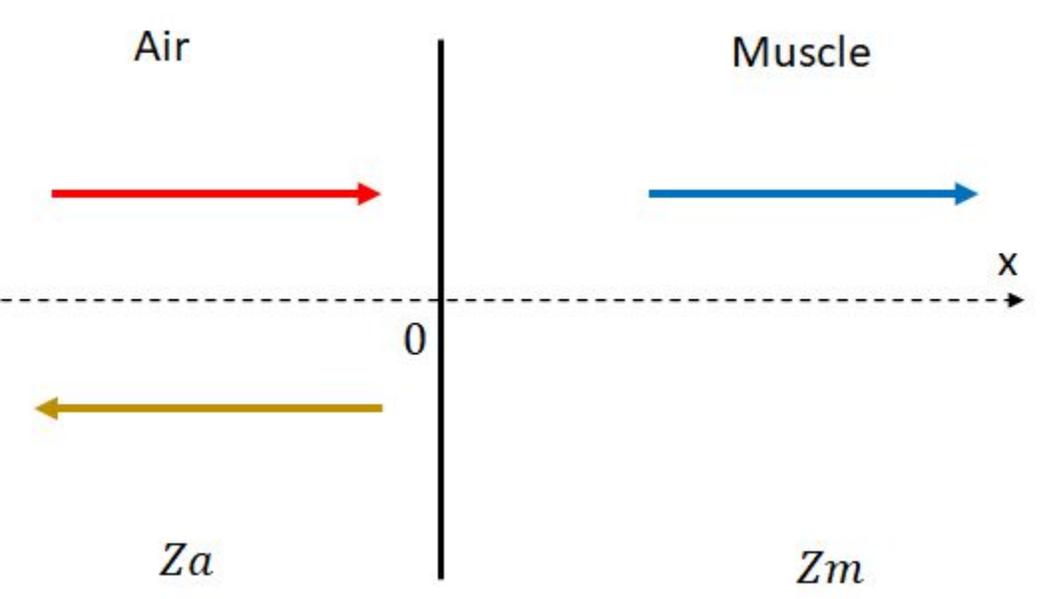


**Générateur**

**Charge**



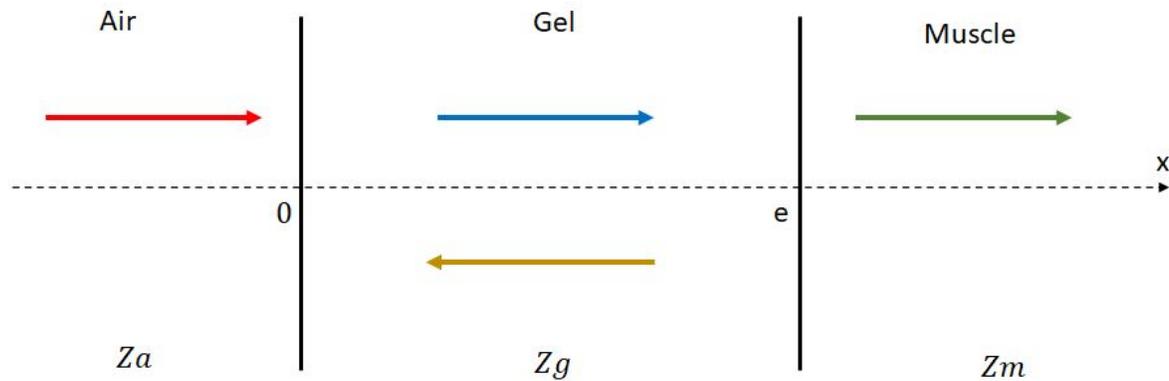




# Impédance acoustique de différents milieux

<b>Milieu</b>	<b>Impédance (<math>kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}</math>)</b> $Z_{20^{\circ}C} = \rho \times c$
<b>Eau</b>	$1.48 \times 10^6$
<b>Air</b>	440
<b>Sang</b>	$1.66 \times 10^6$
<b>Muscle</b>	$1.65 - 1.74 \times 10^6$
<b>Foie</b>	$1.65 \times 10^6$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{p}_a = p_0 e^{i(\omega t - k_a x)} ; \underline{v}_a = \frac{p_0}{Z_a} e^{i(\omega t - k_a x)} \quad x < 0 \\ \underline{p}_g = p_1 e^{i(\omega t - k_g x)} + p_2 e^{i(\omega t + k_g x)} ; \underline{v}_g = \frac{p_1}{Z_g} e^{i(\omega t - k_g x)} - \frac{p_2}{Z_g} e^{i(\omega t + k_g x)} \quad x \in [0, e] \\ \underline{p}_m = p_3 e^{i(\omega t - k_m x)} ; \underline{v}_m = \frac{p_3}{Z_m} e^{i(\omega t - k_m x)} \quad x > e \end{array} \right.$$



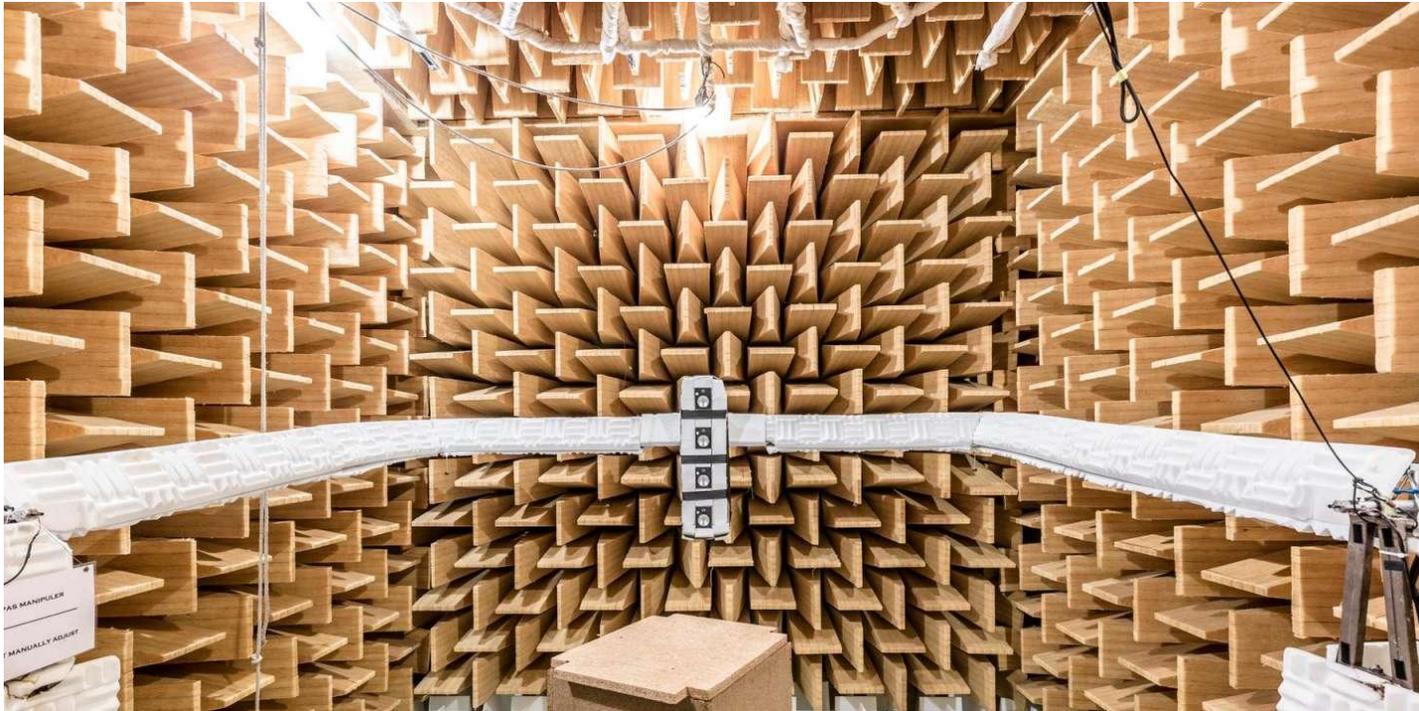


# Câble coaxial



- Impédance de  $50 \Omega$  (transport information) ou  $75 \Omega$  (TV, images).
- Nécessité d'adapter l'impédance des appareils électriques en entrée.

# Chambre anéchoïque



- Chambre recouverte de dièdre en mousses polymères ou fibres de verre.

## Applications multiples :

- Essais de directivité ou sensibilité d'un microphone.
- Mesure de la bande passante d'un haut-parleur.
- Positionner les sources de bruit d'une machine.



# Conclusion



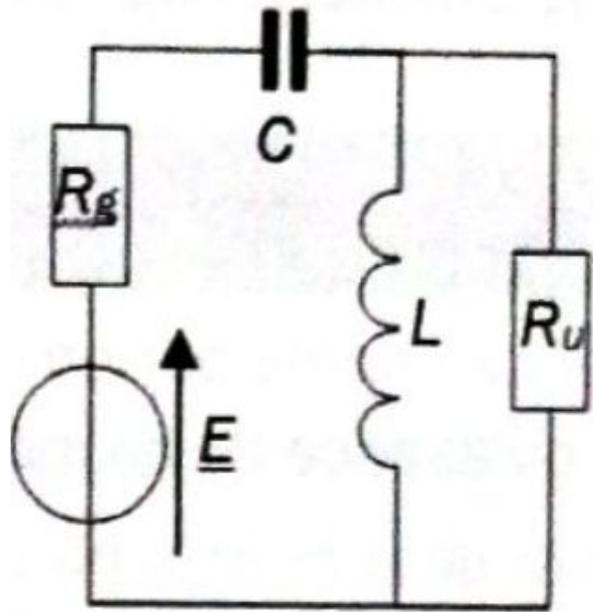


# Plan du Cours

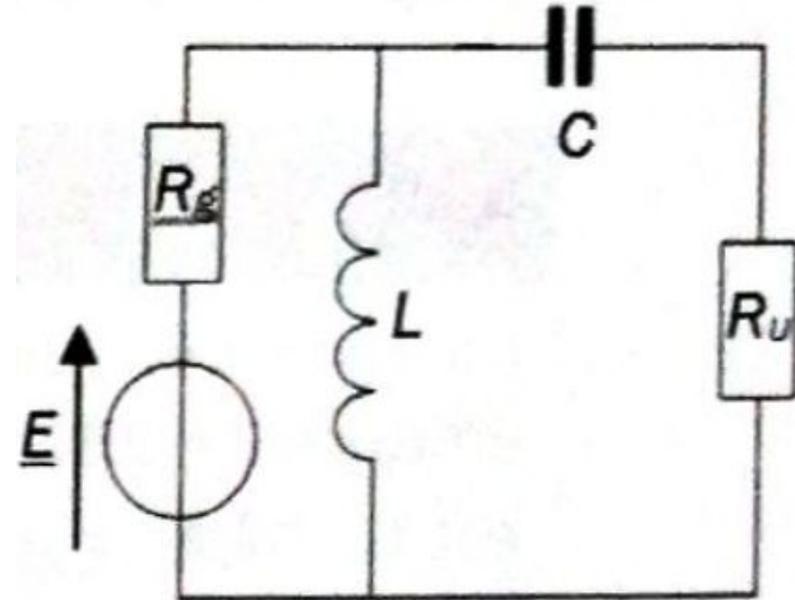
- I. Adaptation d'impédance pour transfert de puissance électrique
  1. Résultat préliminaire.
  2. Adaptation entre un générateur et une charge.
  3. Solution technologique : le transformateur.
  
- II. Impédance à une interface : Echographie.
  1. Position du problème.
  2. Adaptation d'impédance avec un gel.
  
- III. Impédance acoustique d'une conduite : les instruments à vent.
  1. Impédance acoustique.
  2. Déduction des modes propres.

Conclusion :

# Exemple d'adaptation d'impédance circuit LC



$$L = \frac{R_u}{\omega} \times \sqrt{\frac{R_g}{R_u - R_g}}$$
$$C = \frac{1}{\omega \times \sqrt{R_g \times (R_u - R_g)}}$$



$$L = \frac{R_u^2 C^2 \omega^2 + 1}{C \omega^2}$$

# Rayonnement sonore

b) La surpression  $p_1(r, t)$  vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial r^2}$$

La fonction  $rp_1$  est solution de :

$$\frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial r^2}$$

qui est une équation de d'Alembert à une dimension. On en déduit la forme générale de la surpression :

$$p_1(r, t) = \underbrace{\frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}}_{\text{onde sphérique divergente}} + \underbrace{\frac{g\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}}_{\text{onde sphérique convergente}}$$

c) La surpression est :  $p_1(r, t) = \frac{A}{r} \exp(j(\omega t - kr))$

L'équation d'Euler linéarisée,  $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial p_1}{\partial r}$ , permet de déterminer la vitesse particulière :

$$\underline{u}(r, t) = \frac{A}{\mu_0 c r} \left(1 - \frac{i}{kr}\right) \exp(i(\omega t - kr)) \vec{e}_r$$

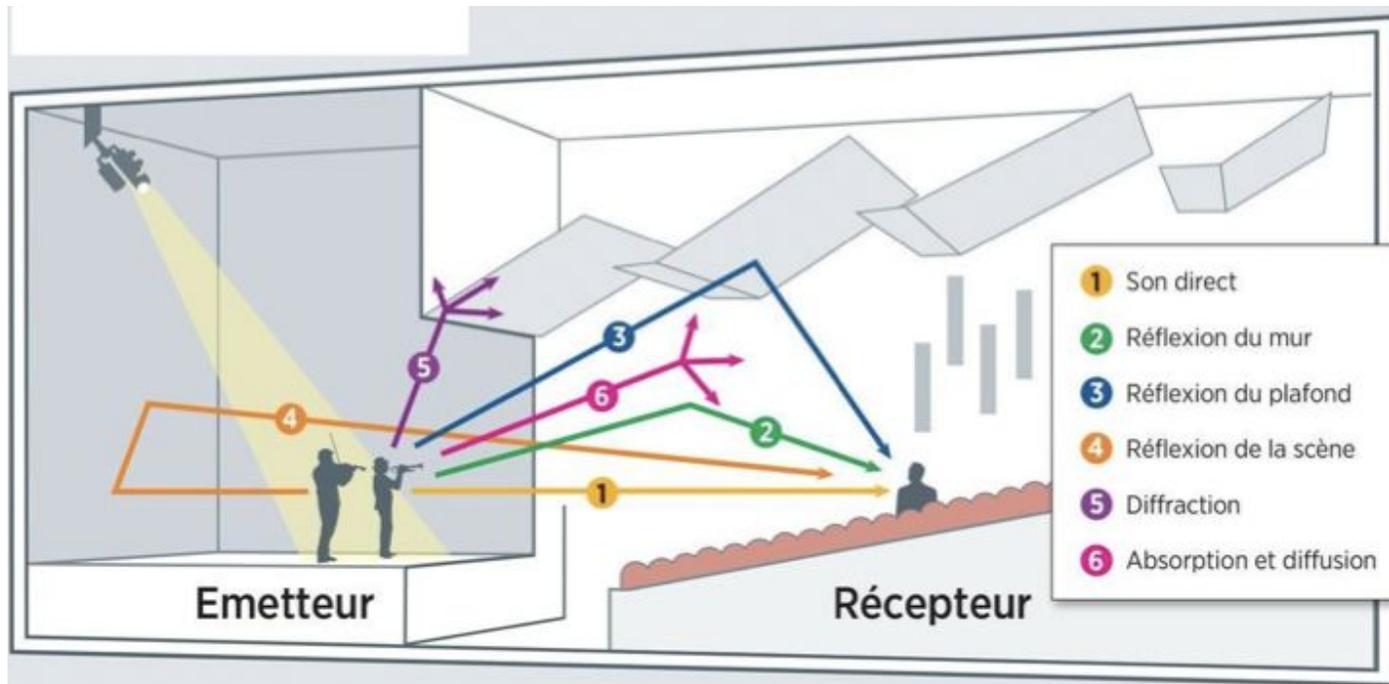
L'impédance acoustique en  $r = a$  est :

$$\underline{Z}_a = \frac{p_1(a, t)}{2\pi a^2 \underline{u}(a, t)} = \frac{\mu_0 c}{2\pi a^2} \frac{1}{1 - \frac{i}{ka}}$$

d) La puissance moyenne rayonnée vers l'extérieur est (en posant  $S = 2\pi a^2$ ) :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p_1(a, t) \underline{u}^*(a, t) S) = \frac{|A|^2 \pi}{\mu_0 c}$$

# Salle de concert

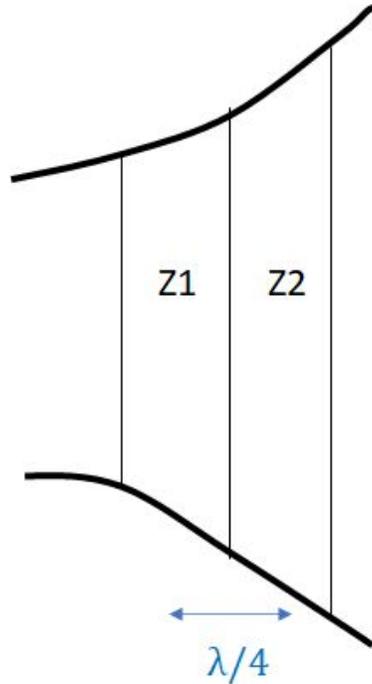


- Mur tapissé de mousse ou de feutre.
- Maximum d'énergie sonore absorbée par le mur.

# Impédance dans différents domaines de la physique

	Electromagnétisme	Electricité	Acoustique	Mécanique dans les solides	Mécanique dans les cordes
Impédance caractéristique	$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$	$Z = \frac{P}{v} = \rho c$	$Z = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{\partial \xi}{\partial t}}$	$Z = \sqrt{T_0 \mu}$

# Exemple du pavillon : cas de la trompette



$$\text{On a } R = -\frac{\Delta Z}{2Z} = -\frac{1}{2Z} \frac{dZ}{dx} dx$$

On prend alors  $dx = \frac{\lambda}{4}$ , distance caractéristique de l'onde

On prend également  $R \approx \alpha$ , infiniment petit d'ordre 1 indépendant de  $x$

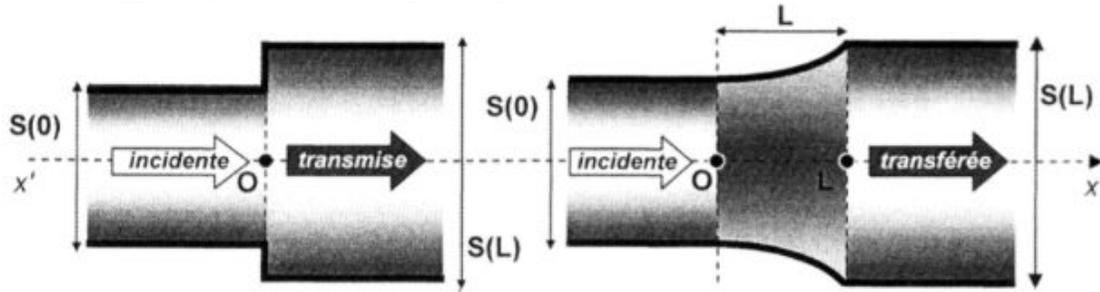
$$-\frac{8\alpha Z}{\lambda} = \frac{dZ}{dx}$$

$$Z(x) = Z_0 \exp\left(-\frac{8\alpha x}{\lambda}\right)$$

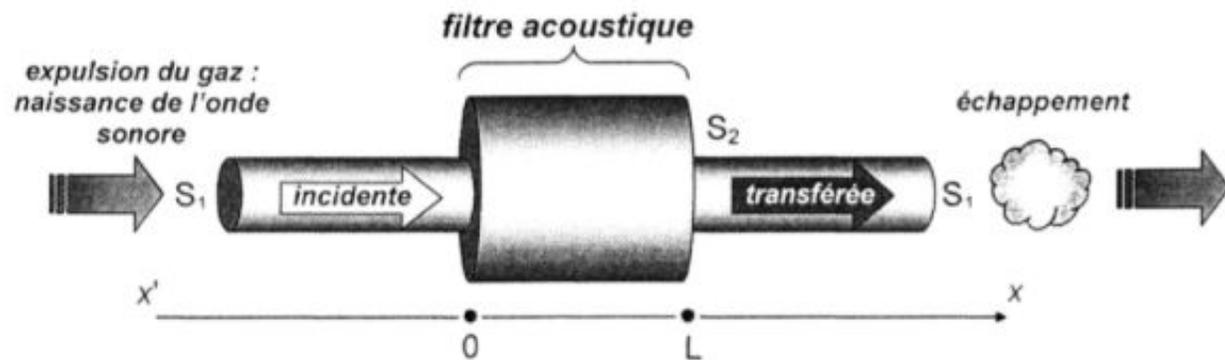
$$\text{Or, } Z = \frac{\rho c}{S(x)} = \frac{\rho c}{\pi r^2(x)}$$

$$\text{D'où : } r(x) = \sqrt{\frac{\rho c}{\pi Z_0}} \exp\left(4\alpha \frac{x}{\lambda}\right)$$

# Pavillon exponentiel : adaptation de l'impédance



# Acoustique d'un silencieux d'automobile





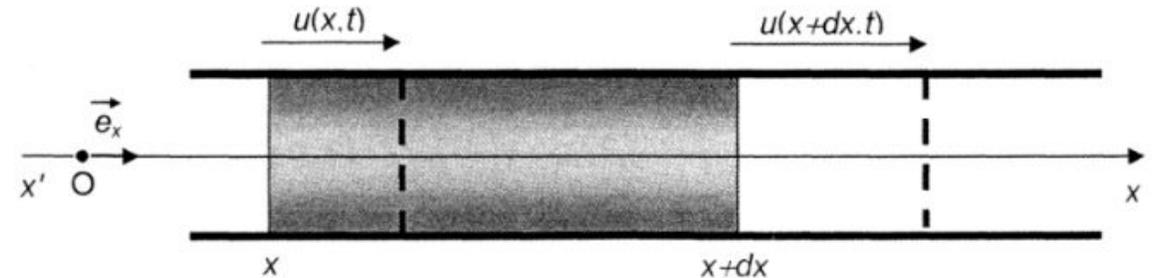
# Approximation acoustique

## Hypothèses

- Fluide parfait et incompressible
- pas d'effets de viscosité ni d'échanges thermiques dans le fluide.
- Les détente et compressions locales du fluide sont isentropiques :

$$\chi_s = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_s$$

- Propagation des ondes sonores associée à un écoulement irrotationnel.
- Effets de pesanteur négligés.



## Hypothèses

- $u(x,t)$  : déplacement à  $t$  du fluide situé au repos en  $x$
- $v(x,t)$  : vitesse acoustique

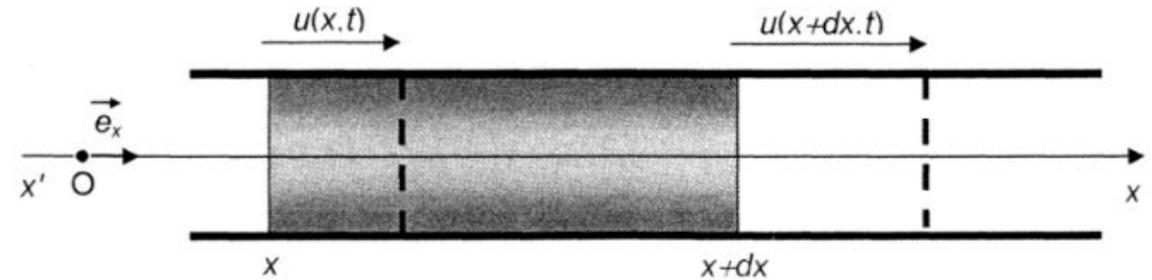
$$\vec{v}(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \vec{e}_x$$

# Approximation acoustique

$$P(x, t) = P_0 + p(x, t), \quad |p(x, t)| \ll P_0$$

$$\mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t), \quad |\mu_1(x, t)| \ll \mu_0$$

$$|\vec{v}(x, t)| \ll c_{son}$$



## Equation de propagation de la surpression

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c_{son}^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2}$$

$$c_{son} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

# Impédances

## Impédance

- Impédance caractéristique du fluide :

$$Z = \frac{p(x,t)}{v(x,t)} = \mu_0 c_{son} \left( kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1} \right)$$

$$Z_{solide} \gg Z_{liquide} \gg Z_{gaz}$$

- Impédance acoustique de la conduite :

$$Z_a = \frac{\text{ce qui cause le mouvement}}{\text{le flux résultant}} = \frac{p(x,t)}{Sv(x,t)} = \frac{\mu_0 c_{son}}{S} \left( kg \cdot m^{-4} \cdot s^{-1} \right)$$

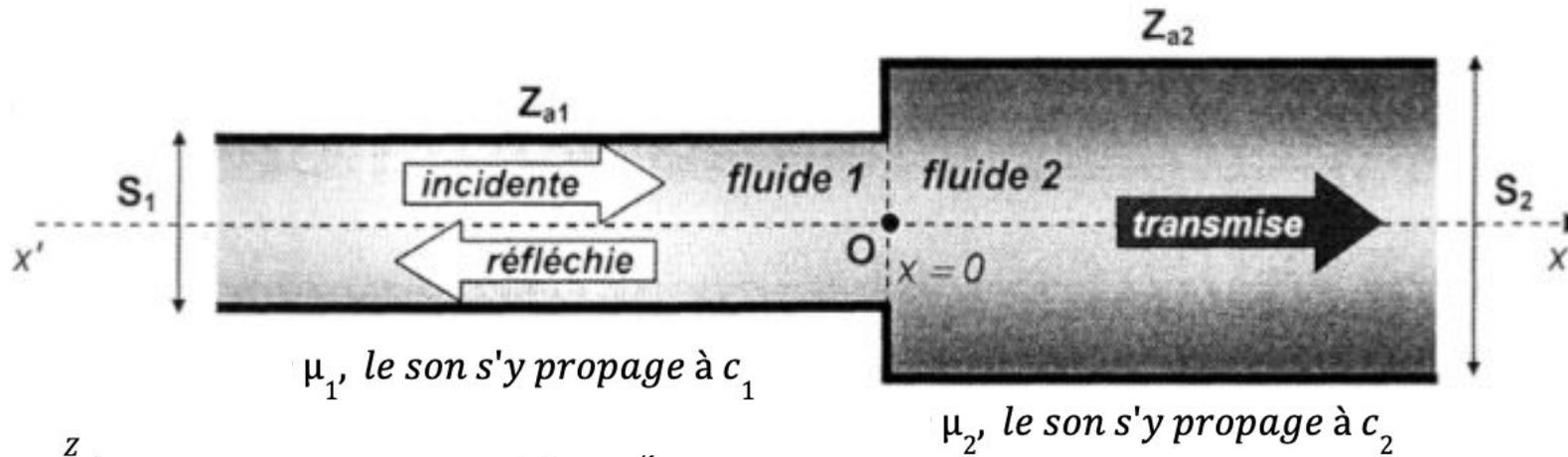
# Intensité sonore

## Intensité sonore

- $I_{dB} = 10 \times \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$
- $I = \langle \vec{\pi}(x, t) \rangle = \langle p(x, t) \times \vec{v}(x, t) \rangle$

	I (en $\text{W.m}^{-2}$ )	I (en dB)	$P_m$ (en Pa)	$V_m$ (en $\text{m.s}^{-1}$ )	$U_m$ (en m)
<b>seuil de perception</b>	$10^{-12}$	0	$3 \cdot 10^{-5}$	$0,7 \cdot 10^{-7}$	$10^{-11}$
<b>seuil de douleur</b>	1	120	30	$0,7 \cdot 10^{-1}$	$10^{-5}$

# Acoustique d'un silencieux d'automobile



$$\alpha = \frac{Z_{a1}}{Z_{a2}}$$

$$Z_{a1} = \frac{\mu_1 c_1}{S_1} = \frac{Z_1}{S_1}$$

$$Z_{a2} = \frac{\mu_2 c_2}{S_2} = \frac{Z_2}{S_2}$$

Pressions acoustiques incidente, transmise et réfléchie

$$p_i(x, t) = P_{im} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{C_1} \right) \right]$$

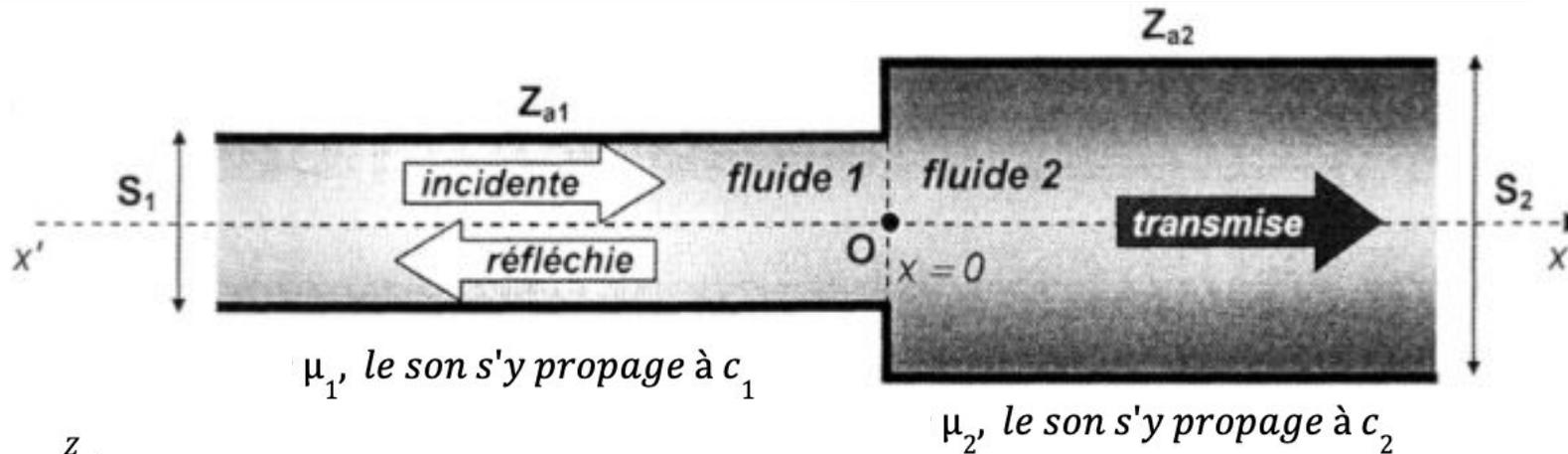
$$p_t(x, t) = P_{tm} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{C_2} \right) \right]$$

$$p_r(x, t) = P_{rm} \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{C_1} \right) \right]$$

Coefficients réflexion/transmission en puissance

$$R = \left| \frac{\langle \mathcal{P}_r \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} \right| \quad \text{et} \quad T = \left| \frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} \right|$$

# Acoustique d'un silencieux d'automobile



$$\alpha = \frac{Z_{a1}}{Z_{a2}}$$

$$Z_{a1} = \frac{\mu_1 c_1}{S_1} = \frac{Z_1}{S_1}$$

$$Z_{a2} = \frac{\mu_2 c_2}{S_2} = \frac{Z_2}{S_2}$$

$$\alpha = \frac{Z_{a1}}{Z_{a2}}$$

- Surface infinitésimale  $dS$  en  $x=0$  : égalité des forces de pression

$$P_1(0, t) = P_2(0, t)$$

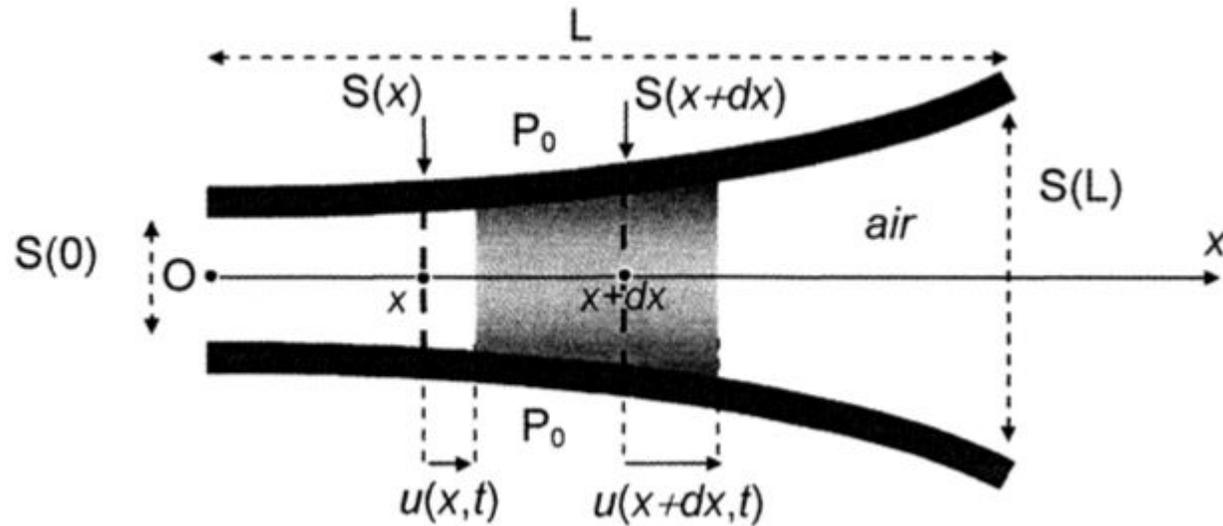
- Pas d'accumulation de matière en  $x=0$  donc unicité du débit volumique.

$$S_1 \vec{v}_1(0, t) = S_2 \vec{v}_2(0, t)$$

- $$T = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$$

- $$R = \left( \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right)^2$$

# Pavillon exponentiel



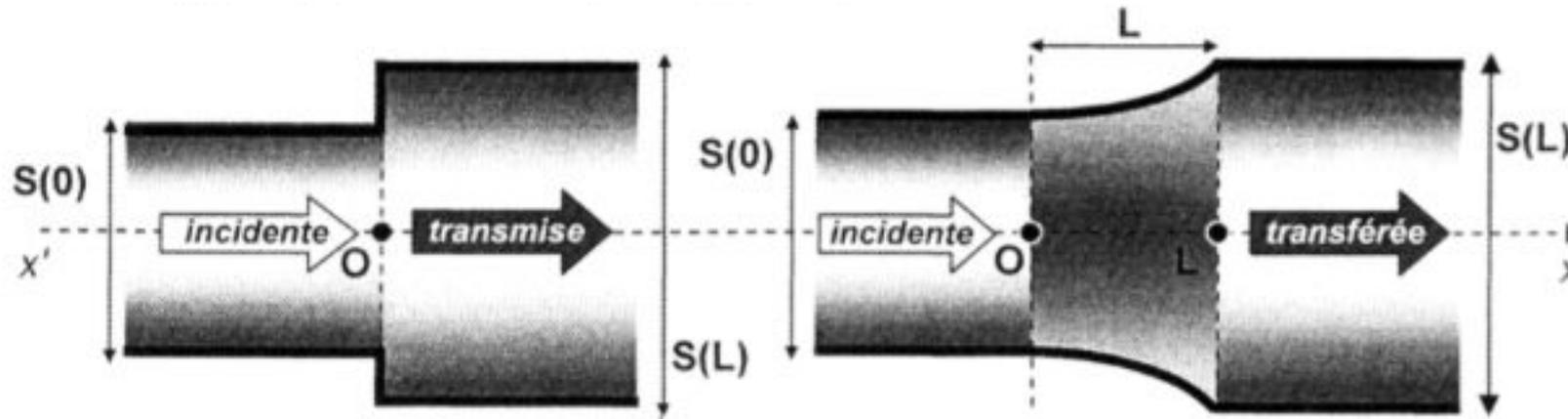
$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d \ln S(x)}{dx} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

La section circulaire du pavillon varie selon la loi :  $S(x) = S(0) e^{x/a}$ , avec  $a > 0$ .

## Relation de dispersion

- $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{jk}{a}$
- $\omega_c = \frac{c}{2a}$

# Pavillon exponentiel : adaptation de l'impédance



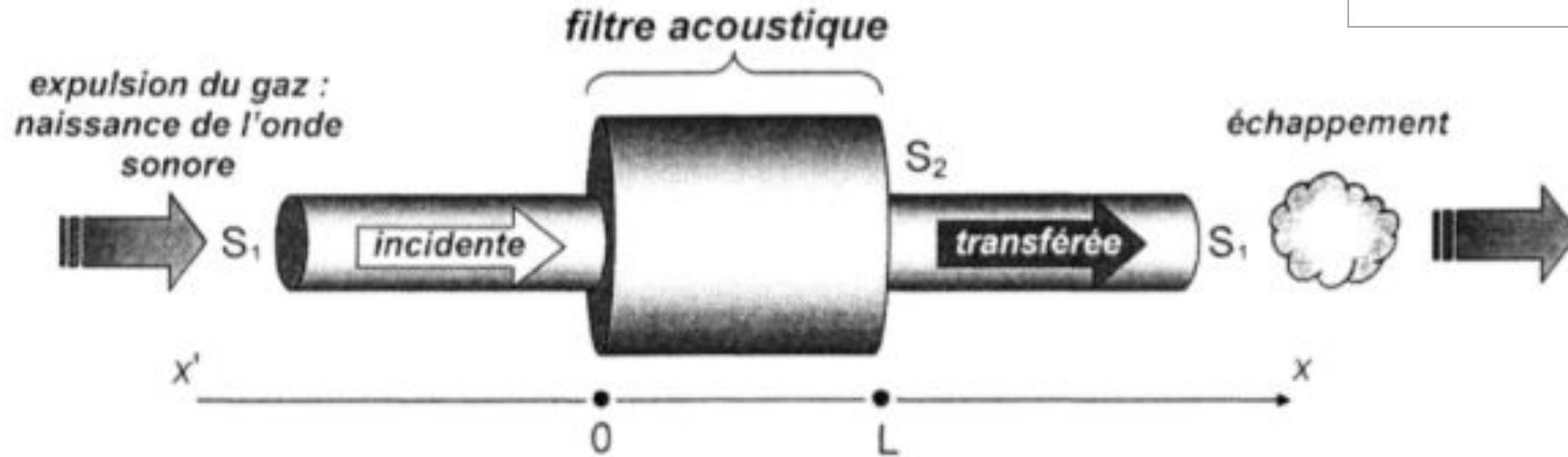
$$\langle P(x) \rangle = \frac{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}{2\mu_0 c} P(0)^2 S(0)$$

$$T_{\text{pavillon}} = \omega \gg 10\omega_c \quad 1$$

# Acoustique d'un silencieux d'automobile

## Gaz d'échappement

- $T = 250 \text{ }^\circ\text{C}$
- $C = 460 \text{ m/s}$



$$T = \frac{1}{1 + \frac{(S_1^2 - S_2^2)^2}{4S_1^2 S_2^2} \sin^2(kL)}$$

$$T = T_{\min} \text{ pour } f = \frac{f_0}{2} = \frac{c}{2L_m}$$

$$S_2 = 20 \times S_1 \text{ pour } T_{f=200 \text{ Hz}} = 10^{-2}$$