

POB78: 2P Ondes évanescentes.

16h30.

Niv: 22:

Définition ondes évanescentes: ~~qui ne se propage pas~~
 $\Rightarrow$ forme d'atténuation dans le milieu.
et qui ne permet aucune transmission de l'énergie.

Forme générale: $\vec{E}(r, t) = f(t) e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}}$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$$

Nature de l'onde en fonction de $\vec{k}$

- si $\vec{k}$ est réel $\Rightarrow$ propagation. $\times$
- si $\vec{k}$ est ~~complexe~~ $\Rightarrow$ propagation et atténuation $\times$
- si $\vec{k}$ est ~~imaginaire~~ pur $\Rightarrow$ atténuation. $\langle \vec{\Pi} \rangle = 0$

Nous allons étudier différentes applications et milieux qui nous mènent à une onde évanescente: tout d'abord la réflexion totale frustrée.

I Modélisation de la réflexion sur un conducteur en incidence normale

1) Modèle de Drude pour un conducteur

On applique le PFD à un électron:

Système un e^- référentiel galiléen.

BdF: force de viscosité:

- Force de Lorentz: $\vec{E}$ et $\vec{B}$

$\frac{m}{\tau} \vec{v}(t)$ avec $\tau = 10^{-14}$ pour Cu.

$$\text{Car: } m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{m_e}{\tau} \vec{v} - e \vec{E}(t) - e \vec{v} \wedge \vec{B}(t)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{v} = - \frac{e}{m_e} \vec{E}(t)$$

Ld e^- non relativiste.
 $\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{E}\|} \approx \frac{v}{E} \ll 1$

On se place maintenant avec un champ sinusoïdal.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t - \delta z) \quad (\text{OPPH})$$

$$\text{En } \vec{v} \text{ on écrit } \vec{v} = \vec{v}_0 \exp(i\omega t) \text{ et } \vec{v} = \vec{v}_0 \exp(i\omega t)$$

$$- \omega^2 \vec{v}_0 + \frac{i\omega}{\tau} \vec{v}_0 = - \frac{e \vec{E}_0}{m_e}$$

$$\text{On obtient alors: } \vec{v}_0 = \frac{+ e \vec{E}_0 / m_e}{\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau}}$$

On en déduit la polarisation volumique: $\vec{P} = -m_e \vec{n} = \vec{P}_0 e^{i\omega t}$

$$\vec{P}_0 = \frac{- m_e^2 \vec{E}_0 / m_e}{\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau}}$$

$$\text{Or: } \vec{P} = \chi(\omega) \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\gamma \vec{P} = +i\omega \chi(\omega) \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\chi(\omega) = \frac{+i\gamma}{\omega \epsilon_0}$$

Donc $\chi(\omega) = \frac{-me^2 \vec{E}_0}{m_e \epsilon_0 (\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau})}$

Enfin: $\vec{J} = \gamma \vec{E} \left(+i\omega \vec{P} = +\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) = -e m_e \vec{v}_e = -e m_e \frac{d\vec{x}}{dt} = -e m_e \vec{a}$

$$\vec{J} = \frac{-e m_e \omega \epsilon_0 \vec{E}_0}{\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau}} \quad \text{et } \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

Donc $\gamma = \frac{-e m_e \omega \epsilon_0}{-i\omega - \frac{1}{\tau}} = \frac{m_e e^2}{m_e} \left(\frac{1}{i\omega\tau + 1} \right)$

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau} \quad \text{avec} \quad \gamma_0 = \frac{m_e e^2 \tau}{m_e}$$

Or on: $\chi(\omega) = \frac{-1}{\omega \epsilon_0} \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau} = \frac{-\gamma_0/\epsilon_0}{i\omega - \omega\tau} = \frac{\gamma_0/\epsilon_0}{(-i\omega/\tau + \omega^2)}$

~~propagation / dispersion~~

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \rightarrow \frac{i\mu_0 \gamma_0 \omega}{1+i\omega\tau}$$

→ γ_0/ϵ_0

2): Relation de passage et formules de Fresnel:

On étudie une OPPH dans un conducteur.

On se place en incidence normale - Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont tangents à l'interface (OPPH)

Absence de courants surfaciques: continuité du champ électrique et magnétique (tangential).

Donc $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t$ et $\vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_t$ au point de l'interface

$\Rightarrow$ on a une seule équation car pour avoir une solution non triviale.

$$(1) \underline{E}_{oi} + \underline{E}_{or} = \underline{E}_{ot} \quad \text{et} \quad (2) \underline{B}_{oi} + \underline{B}_{or} = \underline{B}_{ot}$$

On a par définition: $\underline{E}_{or} = \Delta \underline{E}_{oi}$ et $\underline{E}_{ot} = \Gamma \underline{E}_{oi}$

Dans le cadre des OPPH on peut définir l'indice n du milieu tel que: $\underline{B}_{oi} = \frac{n_1}{c} \underline{E}_{oi}$, $\underline{B}_{or} = \frac{n_1}{c} \underline{E}_{or}$ et $\underline{B}_{ot} = \frac{n_2}{c} \underline{E}_{ot}$

$$(1) \quad 1 + \Delta = \Gamma \quad (2) \quad \text{d'où} \quad \frac{n_1 \underline{E}_{oi}}{c} + \frac{n_1 \underline{E}_{or}}{c} = \frac{n_2 \underline{E}_{ot}}{c}$$

$$(1 - \Delta) n_1 = n_2 \Gamma$$

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$\Gamma = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2}$$

ici n_2 complexe:
 $n_2 = n_2' + i n_2''$

$$\text{En énergie} \quad R = |\Delta|^2 = \frac{(n_1 - n_2')^2 + n_2''^2}{(n_1 + n_2')^2 + n_2''^2}$$

$$T = \frac{n_2}{n_1} |\Gamma|^2 = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2')^2 + n_2''^2}$$

ici $n_1 = 1$ air

et $n_2 = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{1 + \chi_e}$

$$\begin{cases} \text{div}(\vec{P}) = -\text{div}(\vec{P}) \\ \text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = 0 \\ \vec{D} = \epsilon_0 \left(\frac{D}{\epsilon_0} + \chi_e \right) \vec{E} \\ = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \end{cases}$$

3) Application à l'onde lumineuse

Visible $\lambda \in [400, 800] \text{ nm}$ $\lambda = 600 \text{ nm}$

$\omega \sim 3,14 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

on rappelle τ pour air : 10^{-14} s

Donc $\omega \tau \gg 1$

Donc : $\chi_e = \frac{\gamma_0}{i\omega\epsilon_0}$

On a $\epsilon_r = 1 + \chi_e$

et $\chi_e = \frac{\gamma_0}{i\omega\epsilon_0}$

Donc $\epsilon_r = 1 - \frac{\gamma_0}{\omega^2\epsilon_0}$

$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ avec $\omega_p = \left(\frac{\gamma_0}{\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{\frac{1}{2}}$

ici pour Cu :

$n_{\text{Cu}} = 2 \cdot 10^{23}$

$d_{\text{Cu}} = 8,96 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$

$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$\omega_p = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$

Ainsi on a : $\omega < \omega_p$ donc $\frac{\omega_p}{\omega} > 1$

donc $1 + \chi_e = \epsilon_r < 0$

Ainsi $n_2 = i \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$

On a pour $\vec{E}_e = \vec{E}_0 \exp \left(-k_0 \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} z \right) \exp(i\omega t)$

4 Req: Calculons δ :
$$\delta = \frac{1}{\epsilon_0 \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/2}}$$

 $\lambda = 600 \text{ nm} \quad \delta = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ m}$

De plus pour R on a $m_2' = 0$.

Donc $R = 1$ et $T = 0$.

On a bien $\langle T \rangle = 0$.

$R = 1$: on voit bien notre reflet et on l'utilise sous forme de couches minces.

Transition: Ici on a vu l'onde évanescence dans les conducteurs on peut maintenant s'intéresser, aux ondes évanescence dans les diélectriques et notamment à une ~~exp~~ application important la microscopie en champ proche.

II. Interface entre deux diélectriques: introduction de la réflexion.

1) Modélisation de l'interface:

On considère des milieux non absorbants, non magnétiques et sans charges ni microcourant superficielle. (ϵ, μ) linéaire homogène, isotrope.

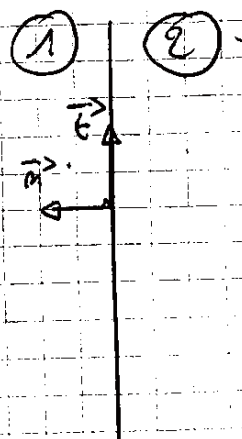
On a pour les relations de continuité:

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \quad \text{NF}$$

$$\vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n} \quad \text{PG}$$

$$\vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n} \quad \text{PG}$$

$$\vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t} \quad \text{NF}$$



2) loi de Snell Descartes:

On a pour le champ électrique:

$$\vec{E}_i(n,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \text{ et } |\vec{k}_i| = n_1 \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$(\vec{E}_r(n,t) = \vec{E}_0' e^{i(\omega' t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \text{ et } |\vec{k}_r| = n_1 \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$E_t(n,t) = \vec{E}_0'' e^{i(\omega'' t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \text{ et } |\vec{k}_t| = n_2 \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

D'après la relation de continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$.

$$\vec{E}_{iT} + \vec{E}_{rT} = \vec{E}_{tT}$$

$\Rightarrow \omega = \omega' = \omega''$ pour une solution non triviale.

$$\forall \vec{r} \in \text{diophr.} \quad \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + \vec{E}_0' e^{+i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} = \vec{E}_0'' e^{-i\vec{k}_t \cdot \vec{r}}$$

On se peut le même raisonnement qu'avant.

$$\text{On a } (\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\vec{k}_i \cdot \vec{F}) \quad \vec{k}_i - \vec{k}_r = \alpha \vec{n}$$

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_i - \vec{k}_t = \beta \vec{n}$$

1^{re} loi de SD:

$\vec{k}_i, \vec{k}_r$ et $\vec{k}_t$ sont dans le même plan: plan d'incidence.
(Soit $\vec{n}$ vecteur $\perp$ au plan d'incidence ($\vec{k}_i, \vec{n}$) $\rightarrow$ scalaire nulle ok)

2^{de} loi de SD:

$$\vec{k}_{it} = \vec{k}_{rt} \quad \cos(\mu_1) = \cos(\mu_1') \quad \mu_1 = \pm \mu_1' \quad \text{car } |\vec{k}_i| = |\vec{k}_r|$$

et

$$\vec{k}_i = \vec{k}_t \quad n_1 \sin(\mu_1) = n_2 \sin(\mu_2)$$

On reconnaît pour: $\sin \alpha = \arcsin\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$ ($i_2 = \frac{\pi}{2}$)

si $i_1 > i_m$ on a réflexion totale.

Et qu'on dit côté ②? sin

On a: ~~$\sin(i_2) = \frac{m_1}{m_2} \sin(i_1)$~~
~~ou $\sin(i_2) > 1$~~

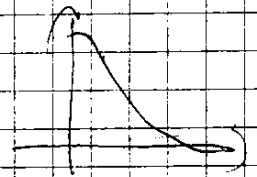
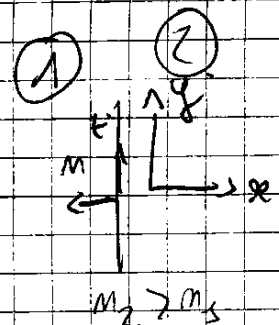
On a toujours: $\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = \vec{k}_e \cdot \vec{r}$ ou $k_{\text{ext}} = m_2 \sin(i_2) \left(\frac{\omega}{c}\right)$

et $k_z^2 = k_{\text{em}}^2 + k_{2e}^2 = \left(m_2 \frac{\omega}{c}\right)^2$

Donc: $k_{\text{em}}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (m_2^2 - m_1^2 \sin^2(i_1))$

Or $i_1 > i_2$ donc: $\frac{m_1}{m_2} \sin(i_1) > 1$.

$k_{\text{em}} = \pm j \frac{\omega}{c} \sqrt{m_1^2 \sin^2(i_1) - m_2^2} = \pm jK$



Pour $\vec{E}_2 = \vec{E}_0 e^{-j(k_{\text{em}} z - \omega t + k_{2e} \vec{r} \cdot \vec{n})}$

Onde évanescente selon la normale.

AN: Si $m_1 = 1,5$ $m_2 = 1$ $i_1 = 60^\circ$ $\delta = \frac{1}{K}$

et $\lambda = 632 \text{ nm}$

$\delta = \frac{1}{K} = 78 \text{ nm}$

35 Application à la microscopie à champ proche:

Microscopie classique: en lumière visible: limitée par la diffraction.
on peut descendre à λ , (critère de Rayleigh $\propto \frac{\lambda}{2}$)
 $d = 0,25 \mu\text{m}$.

Idée: Balayer la surface d'un solide et récolter l'onde évanescente.

1972 $\Rightarrow$ Electron $\Rightarrow$ effet tunnel

1985 $\Rightarrow$ Force atomique $\Rightarrow$ SFA, AFM, forces interatomiques inter atomiques.

1983. Optique: D. Pohl.

Sonde optique $\Rightarrow$ pointe très fine

résolution de $\frac{\lambda}{20}$ soit $\approx 30 \text{ nm}$.

En voir un lecteur d'empreinte digitale c'est un peu ça.

Idées: microscopie ondes évanescentes transformées en ondes homogènes.

$\Rightarrow$ Diffraction: passe bas. avec la propagation

Pour capter les détails il faut être proche de l'objet

$$\delta x \delta k_x = 2\pi$$

$$\delta y \delta k_y = 2\pi$$

Si $\delta x \gg \lambda$ et $\delta y \gg \lambda$ alors $\delta k_x < \frac{2\pi}{\lambda}$ et $\delta k_y < \frac{2\pi}{\lambda}$ ou

Critère limite. $k_x < k_{\text{max}}(\theta)$ deux points peuvent être séparés

si $\delta x \gg \frac{\lambda}{\sin(\theta)}$ limite de Rayleigh.