Centrale-Supélec TSI 2016. Physique-Chimie 1. Pompe à chaleur. [1]

1 Étude thermodynamique du système fermé

A - Modèle de Carnot

1. *Applications des deux premiers principes*

   (a) Premier principe : $\Delta U = W + Q_f + Q_c$; pour un cycle $\Delta U = 0$. En conséquence : $\boxed{0 = W + Q_f + Q_c}$. Ce résultat ne dépend pas du caractère réversible ou non de la transformation.

   (b) Second principe : $\Delta S = \dfrac{Q_c}{T_c} + \dfrac{Q_f}{T_f}$ car le cycle est supposé réversible ; pour un cycle $\Delta S = 0$. En conséquence : $\boxed{0 = \dfrac{Q_c}{T_c} + \dfrac{Q_f}{T_f}}$. Ce résultat dépend du caractère réversible de l'évolution.

2. *Échanges*

   (a) Les échanges algébriques sont définis comme reçus par le système. Le compresseur fournit un travail mécanique $\boxed{W > 0}$ permettant d'inverser le sens des échanges thermiques. Dans le cas d'une pompe à chaleur, la source froide fournit de l'énergie au fluide qui s'évapore à son contact $\boxed{Q_f > 0}$. Le fluide évacue de l'énergie thermique dans la source chaude en se condensant à son contact $\boxed{Q_c < 0}$.

   (b) Comme $Q_c = -W - Q_f$ avec $Q_f > 0$ et $W > 0$, on a nécessairement $\boxed{|Q_c| > |Q_f|}$.

3. *Éfficacité d'un réfrigérateur*

   (a) L'efficacité est le rapport de l'énergie utile, ici Q_f (on veut refroidir la source froide, l'intérieur du réfrigérateur) sur l'énergie coûteuse, ici W, le travail du compresseur :

   $$\eta_{fc} = \frac{Q_f}{W} = \frac{Q_f}{-Q_c - Q_f} = \frac{1}{-1 - Q_c/Q_f} = \frac{1}{-1 + T_c/T_f}$$

   C'est à dire $\boxed{\eta_{fc} = \dfrac{T_f}{T_c - T_f}}$.

   (b) A.N. : $\eta_{fc} = \dfrac{273,15}{26} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta_{fc} \approx 11}$.

   (c) Pour une machine réelle, $\boxed{\eta_{fc}^{\text{réel}} \approx 3}$.

4. *Éfficacité d'une pompe à chaleur*

   (a) L'efficacité est le rapport de l'énergie utile, ici $-Q_c$ (on veut chauffer la source chaude, la maison) sur l'énergie coûteuse, ici W, le travail du compresseur :

   $$\eta_{fc} = \frac{-Q_c}{W} = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f} = \frac{1}{1 + Q_f/Q_c} = \frac{1}{1 - T_f/T_c}$$

   C'est à dire $\boxed{\eta_{fc} = \dfrac{T_c}{T_c - T_f}}$.

   (b) A.N. : $\eta_{fc} = \dfrac{273,15 + 26}{26} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta_{fc} \approx 12}$. L'efficacité est légèrement supérieure au cas précédent du fait que $|Q_c| > |Q_f|$.

B - Modèle des pseudo-sources

1. *Principes pour le fluide*

   (a) Pour une évolution infinitésimale pour laquelle on suppose que le fluide décrit un quasi-cycle, on a : $\boxed{0 = \delta W + \delta Q_c + \delta Q_f}$.

   (b) De même, pour un quasi-cycle réversible : $\boxed{0 = \dfrac{\delta Q_c}{T_c} + \dfrac{\delta Q_f}{T_f}}$.

2. *Premier principe pour les sources*

   (a) Le fluide recevant δQ_f de la source froide, la source froide reçoit $-\delta Q_f$ du fluide. En appliquant le premier principe à l'eau de la source froide dont la température varie de $\mathrm{d}T_f$, on a :

   $$\boxed{m_e c_e \mathrm{d}T_f = -\delta Q_f}$$

   (b) De même : $\boxed{m_e c_e \mathrm{d}T_c = -\delta Q_c}$

   (c) En utilisant le résultat du second principe appliqué au fluide, on en déduit :

   $$\frac{\delta Q_c}{T_c} + \frac{\delta Q_f}{T_f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}T_f}{T_f} + \frac{\mathrm{d}T_c}{T_c} = 0}$$

3. *Analyse des courbes* :

   (a) L'équation précédente s'intègre selon :
   $\mathrm{d}\ln(T_f) + \mathrm{d}\ln(T_c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\ln(T_f T_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_f T_c = cste$

1. Remarques : cedric.grange@laposte.net

C'est à dire en utilisant la condition initiale : $T_f(t)T_c(t) = T_0^2 \quad \Rightarrow$ $\boxed{\sqrt{T_f(t)T_c(t)} = T_0}$. **On constate que ce terme reste constant égal à la température initiale en conformité avec la courbe fournie.**

La source chaude reçoit de l'énergie du fluide donc sa température augmente en accord avec la courbe.

La source froide cède de l'énergie au fluide donc sa température diminue en accord avec la courbe.

(b) Au-delà de 1500 s, l'eau de la source froide atteint 0°C (Cf. courbe). L'énergie prise sur la source froide fait geler l'eau et **la température reste bloquée durant le changement d'état**.
En appelant δm la masse d'eau qui gèle durant dt et ℓ_f l'enthalpie massique de fusion de la glace, on a : $\boxed{\delta Q_f = \delta m \times \ell_f}$.

4. *Efficacité avec les pseudo-sources*

(a) Comme précédemment : **énergie utile sur énergie coûteuse**.

(b) Comme précédemment à ceci près que les températures ne sont plus constantes :

$$\boxed{\eta_t = \frac{T_c(t)}{T_c(t) - T_f(t)}}$$

(c) Avec $T_0^2 = T_c(t)T_f(t)$, on en déduit :

$$\eta_t = \frac{T_c(t)}{T_c(t) - T_0^2/T_c(t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta_t = \frac{T_c^2(t)}{T_c^2(t) - T_0^2}}$$

(d) Aux temps courts $\Delta T \to 0$ et le terme $T_0/\Delta T$ est le terme dominant. Dans les premiers temps, on peut donc écrire :

$$\eta_t \approx \frac{T_0}{\Delta T}$$

L'écart de température variant, dans les premiers temps, quasi-linéairement avec le temps, on obtient finalement une allure en $x \to 1/x$, pour la courbe de l'efficacité en fonction du temps.

5. On considère un cylindre compris entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$ et de hauteur H. On applique un bilan d'enthalpie pour l'eau contenue dans ce système entre deux instants voisins

$$\mathrm{d}H = \delta m_e \times c_e \mathrm{d}T = \rho_e H \times 2\pi r \mathrm{d}r \times c_e \frac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}t$$

Les échanges thermiques s'identifient au flux thermiques en r et $r + \mathrm{d}r$:

$$\delta Q = [\Phi(r,t) - \Phi(r + \mathrm{d}r, t)]\, \mathrm{d}t = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathrm{d}r \mathrm{d}t$$

Sachant que $\Phi(r,t) = j_Q(r,t) \times 2\pi r H = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial r} \times 2\pi r \times H$.

On en déduit :

$$\rho_e H \times 2\pi r \mathrm{d}r \times c_e \frac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}t = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \times 2\pi r \times H \right) \mathrm{d}r \mathrm{d}t$$

C'est à dire :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho_e c_e} \times \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)}$$

6. Par homogénéité, le terme $\dfrac{\lambda}{\rho_e c_e}$ est dimensionné à une longueur au carré divisé par un temps. En conséquence pour que la température s'homogénéise par diffusion sur une distance R' cela nécessite un temps caractéristique :

$$\frac{R'^2}{\tau} \approx \frac{\lambda}{\rho_e c_e} \quad \Rightarrow \quad \tau \propto \frac{R'^2 \rho_e c_e}{\lambda}$$

Application numérique :

$$\tau \approx \frac{0,04^2 \times 1000 \times 4,2 \times 10^3}{0,60} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau \approx 1,1 \times 10^4 \text{ s}}$$

Cette durée est très supérieure aux temps d'évolution observés sur la figure 6 de l'énoncé. Il faut donc accélérer le processus de diffusion en agitant.

2 Étude thermodynamique de l'écoulement stationnaire

A - Écoulements stationnaires à travers les différents composants

1. Dans le seau de gauche, **l'équilibre entre l'eau liquide et la glace** assure que la température est constante, égale à la température de changement d'état.

2. **La graduation de température indique la température de changement d'état** du fluide pour la pression indiquée. Si on dispose d'une mesure de la température, on peut savoir quel est l'état, liquide ou vapeur, du fluide en ce point.

3. Cf. cours sur les bilans.

4. *Détendeur*

(a) **La durée de passage dans le détendeur est très courte** vis à vis des durées de passage dans les échangeurs. Les échanges thermiques peuvent donc être négligés.

(b) En l'absence de travail utile et de transfert thermique, le premier principe industriel assure que **l'enthalpie massique se conserve**.

5. *Compresseur*

(a) Comme pour le détendeur, la durée courte de passage dans le compresseur permet de négliger les échanges thermiques ce qui assure l'**adiabaticité**. Pour assurer le caractère isentropique de l'évolution, il faudrait de plus que la transformation soit **réversible** ce qui ne peut être qu'une approximation.

(b) Le premier principe appliqué au fluide dans le compresseur s'écrit :

$$\boxed{w_{i12} = \Delta h_{12} = h_2 - h_1 = 22 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

Ce travail est positif car reçu par le fluide.

B - Diagramme enthalpique

1. **À basse pression, le fluide peut être assimilé à un gaz parfait dont l'enthalpie massique ne dépend que de la température**. Les isothermes sont donc confondues avec des évolutions à enthalpie fixée et sont quasi-verticales. À plus haute pression, le gaz n'est plus un gaz parfait et les isothermes se courbent en particulier pour l'état fluide au voisinage du point critique

Dans le domaine diphasé, les isothermes sont des isobares donc horizontales car, pour un corps pur, la température impose la pression lors d'un changement d'état.

Pour le liquide, l'enthalpie massique est aussi une unique fonction de la température et les isothermes sont aussi quasi-verticales.

2. Compte tenu du tableau 2, on obtient le cycle indiqué (Cf page suivante).

3. *Changement d'état*

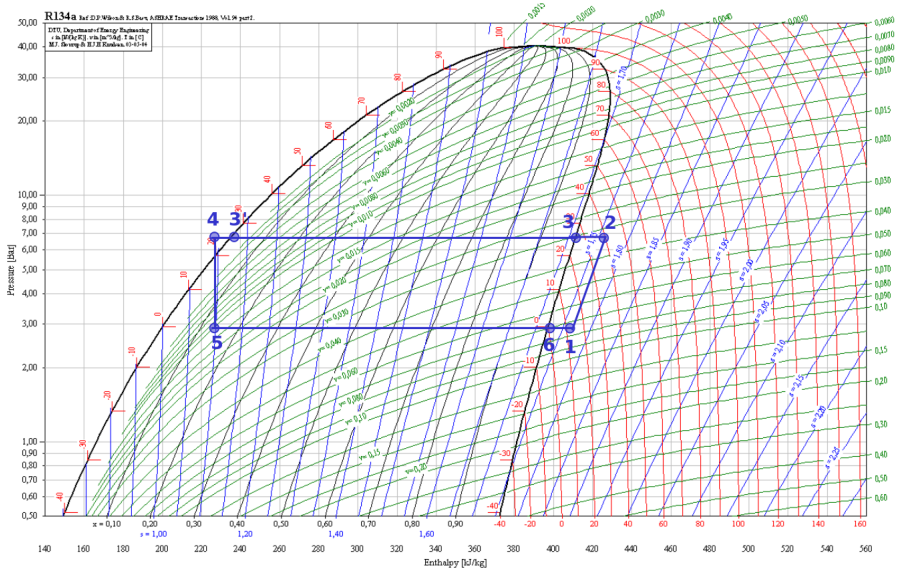
(a) Pour un changement d'état, on doit avoir $\boxed{\Delta s_{AB}(T) = \dfrac{\Delta h_{AB}(T)}{T}}$.

(b) Grâce aux données du tableau 2, pour les points notés 3 et 3', à $T = 299 \text{ K} = 26° \text{ C}$, $\Delta h(299) = 412 - 233 = 179 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ce qui donne $\boxed{\Delta h/T = 0,60 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$ alors que d'après les données $\boxed{\Delta s = 0,59 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$, les résultats sont en accord.

(c) Par lecture graphique :

$\boxed{\Delta h_{vap}(273) = h_{vap} - h_{liq} = 398 - 200 \approx 2,0 \times 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$.

Cette valeur est significativement inférieure à celle de l'eau de l'ordre de $2,3 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$



4. La transformation $4 \to 5$ étant isenthalpique, $h_4 = h_5$. Le titre massique en vapeur est défini par :

$$x_5 = \frac{h_5 - h_{liq}(273)}{h_{vap}(273) - h_{liq}(273)} = \frac{226 - 200}{398 - 200} \quad \boxed{x_5 = 0,13}$$

Cette valeur semble en accord avec les courbes iso-titre du document.

C - Estimation du débit massique

Le compresseur aspire le fluide au volume massique $v_1 = 0,073 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ (tableau 2). Ce volume de fluide est aspiré au rythme du moteur de 2800 $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$ (annexe). À chaque tour, le volume aspiré est celui de la cylindrée « displacement » de $3,13 \text{ cm}^3$ (fiche technique du document à rendre). En conséquence :

$$D_m = \frac{2800}{60} \times \frac{3,13 \times 10^{-6}}{0,073} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_m = 2,0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Cette valeur est compatible avec la donnée fournie dans la suite de l'énoncé.

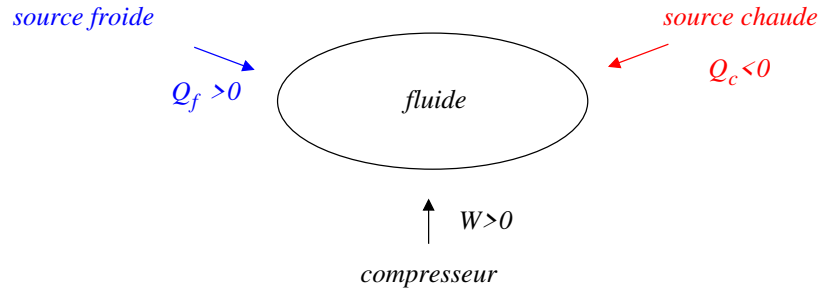
D - Efficacité de la pompe à chaleur

1. Pour déterminer la puissance utile $\mathcal{P}_u$ du compresseur, il faut multiplier le travail massique par le débit massique, ce qui donne pour le rendement r du compresseur :

$$r = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}} = \frac{w_{i12} \times D_m}{\mathcal{P}} = \frac{22 \times 10^3 \times 2,12 \times 10^{-3}}{110} \quad \boxed{r = 0,42}$$

2. *Efficacité pompe à chaleur*

(a) Principe de la pompe à chaleur :



(b) L'efficacité s'écrit :

$$\boxed{\eta_c = \frac{|q_c|}{w_{i12}} = \frac{|q_{24}|}{w_{i12}}}$$

(c) A.N. : $\eta_c = \dfrac{h_2 - h_4}{w_{i12}} = \dfrac{430 - 226}{22} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta_c = 9,3}$.
Comme attendu l'efficacité est inférieure à l'efficacité de Carnot, certaines étapes comme la détente n'étant pas réversibles.

(d) La désurchauffe et le sous-refroidissement permettent d'optimiser l'échange d'énergie avec la source chaude et d'augmenter $|q_c|$ ce qui **améliore le rendement du dispositif**.

(e) Si l'on tient compte du rendement du compresseur $\boxed{\eta = \eta_c \times r = 3,9}$. Le rendement est donc fortement diminué par les pertes dans le compresseur.

3. Pour la machine réfrigérante, on prélève à la source froide (intérieur de l'habitation) et l'on donne à la source chaude (extérieur).
L'efficacité est donnée par : $\eta_f = \dfrac{q_{51}}{w_{i12}} = \dfrac{408 - 226}{22}$ $\boxed{\eta_f = 8,3}$. Elle est inférieure à l'efficacité de Carnot calculée au début du sujet.
La surchauffe permet d'augmenter q_{51} et d'améliorer l'efficacité de la machine.
En tenant compte du rendement du compresseur : $\boxed{\eta = 3,5}$.
4. La surchauffe permet de garantir le bon fonctionnement du compresseur en s'assurant que **le fluide pénètre dans le compresseur uniquement sous forme de vapeur**.
5. La puissance thermique reçue lors de la surchauffe :
$\mathcal{P}_s = D_m \times q_{61} = 2,12 \times 10^{-3} \times (408 - 396) \times 10^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_s = 25,4 \text{ W}}$

3 Fonctionnement du compresseur

A . ARQS : **taille du circuit faible devant la longueur d'onde**.

B . Cf. cours : $\boxed{\vec{B}(M,t) = \mu_0 n i(t) \vec{u}}$ avec $\vec{u}$ l'axe du solénoïde orienté conforme au courant.

C . En utilisant la linéarité des équations de Maxwell

$$\vec{B}(O,t) = \mu_0 n I_0 \left[\cos(\omega_0 t)\vec{u}_x - \cos(\omega_0 t \pm \pi/2)\vec{u}_y\right]$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad \vec{B}(O,t) = \mu_0 n I_0 \left[\cos(\omega_0 t)\vec{u}_x \pm \sin(\omega_0 t)\vec{u}_y\right]}$$

On obtient donc un champ tournant à la vitesse angulaire ω_0 dans le sens trigonométrique pour $\alpha = \pi/2$ et dans le sens horaire pour $\alpha = -\pi/2$.

D . Pour réaliser le déphasage de $\pi/2$, il faut placer un **condensateur** sur l'un des enroulements.

E . Avec un diamètre $2a$, il y a $n = 1/(2a)$ spires jointives par unité de longueur et en tenant compte des 4 rangées de spires, on obtient :

$$\|\vec{B}(O\| = \frac{4\mu_0 I_0}{2a} = \frac{4 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 0,1}{2 \times 0,25 \times 10^{-3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\|\vec{B}(O\| = 1 \text{ mT}}$$

F. Équation électrique.

1. Si les vitesses de rotation ne sont pas égales, le **flux du champ magnétique est variable** au sein de la bobine, ce qui génère une force électromotrice et un courant induit pour ce circuit fermé.
2. La spire parcourue par un courant électrique va subir un **couple des forces de Laplace** qui va mettre en rotation la spire.
3. Le flux du champ magnétique à travers la bobine :
$\Phi = N B_0 S \cos[(\omega_0 - \omega)t] = \Phi_0 \cos(\Omega t)$
Pour cette spire fermée sur elle-même, la loi des mailles s'écrit :

$$Ri = e = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[Li + \Phi_0 \cos(\Omega t)\right] \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \Phi_0 \Omega \sin(\Omega t)}$$

G . Couple des forces de Laplace

1. On considère l'équation différentielle en régime forcé :

$$R\underline{I} + jL\Omega\underline{I} = \Phi_0 \Omega e^{-j\pi/2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{I} = \frac{\Phi_0 \Omega e^{-j\pi/2}}{R + jL\Omega}$$

C'est à dire : $\boxed{i_m = |\underline{I}| = \dfrac{\Phi_0 \Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}}}$ et $\arg(\underline{I}_m) = -\pi/2 - \arctan\left(\dfrac{L\Omega}{R}\right)$.

C'est à dire $\boxed{\psi = \arctan\left(\dfrac{L\Omega}{R}\right)}$.

2. $\boxed{\vec{M} = Ni(t)\vec{S}}$.

3. $\vec{\Gamma}_{Lap}(t) = \vec{M} \wedge \vec{B}_0 = Ni(t)\vec{S} \wedge \vec{B}_0$, donc :
$\boxed{\vec{\Gamma}_{Lap}(t) = \Phi_0 i_m \sin(\Omega t - \psi)\sin(\Omega t)\vec{u}_z}$

4. La spire est soumise au couple moteur des forces de Laplace et au couple résistant $-\Gamma\vec{u}_z$ dû au reste du dispositif entraîné en rotation par la spire. Le théorème du moment cinétique donne :
$$\boxed{J\ddot{\theta} = \Phi_0 i_m \sin(\Omega t - \psi)\sin(\Omega t) - \Gamma}$$

5. En régime établi $\ddot{\theta} = 0$: $\boxed{\Gamma(t) = \Phi_0 i_m \sin(\Omega t - \psi)\sin(\Omega t)}$.

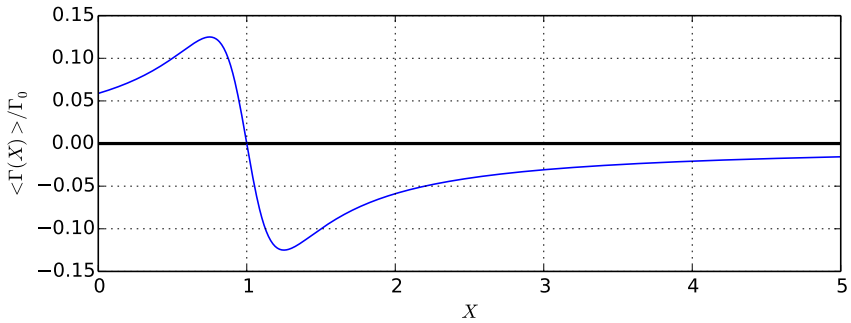
H. Couple moyen, point de fonctionnement.

1. À l'aide des relations de trigonométrie :
$$\Gamma(t) = \frac{\Phi_0 i_m}{2}\left[-\cos(2\Omega t - \psi) + \cos(\psi)\right]$$
C'est à dire, en moyenne dans le temps : $\langle\Gamma\rangle = \dfrac{\Phi_0 i_m}{2}\cos(\psi)$.
Avec $\cos(\psi) = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}}$ (car $\psi = \arg(R + jL\Omega)$), on en déduit :
$$\langle\Gamma\rangle = \frac{\Phi_0 i_m}{2}\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} = \frac{\Phi_0^2\Omega}{2}\frac{R}{R^2 + L^2\Omega^2}$$
Expression que l'on peut réécrire :
$$\langle\Gamma\rangle = \frac{\Phi_0^2\omega_0}{2R} \times \frac{1 - \omega/\omega_0}{1 + \dfrac{L^2\omega_0^2}{R^2}\left(1 - \dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$
Ce qui impose par identification $\boxed{\Gamma_0 = \dfrac{\Phi_0^2\omega_0}{2R}}$ et $\boxed{\lambda = \dfrac{L\omega_0}{R}}$.

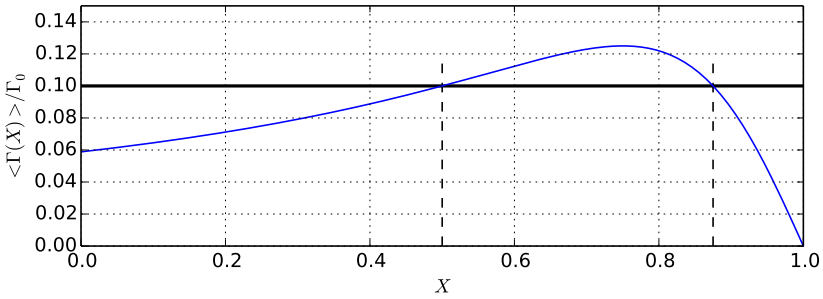
2. Tracé de la courbe.

On constate que le couple n'est pas nul pour $\omega = 0$. Le moteur asynchrone peut démarrer sans aide extérieure.

Si on souhaite un couple moteur, il faut se limiter à $\boxed{\omega < \omega_0}$.



3. Comme indiqué sur la figure, on obtient en général deux points de fonctionnement.



Considérons le premier point de fonctionnement $X_1 = \omega_1/\omega_0$. Imaginons que pour une raison quelconque la spire accélère (ω augmente, donc X augmente), alors le couple moteur augmente et la spire accélère encore plus, la position associée à ω_1 est instable.

Considérons le second point de fonctionnement $X_2 = \omega_2/\omega_0$. Imaginons que pour une raison quelconque la spire accélère, alors le couple diminue et la spire décélère, la position associée à ω_2 est stable.

4. $\langle\mathcal{P}\rangle = \langle\Gamma\rangle\,\omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{\langle\mathcal{P}\rangle = \dfrac{\Gamma_0\omega_0 X(1-X)}{1 + \lambda^2(1-X)^2}}$
Cette puissance est logiquement nulle pour $X = 0$ (rotation nulle) et pour $X = 1$ (couple nul car rotation synchrone l'effet d'induction disparaît).

5. La point de fonctionnement stable correspond à $X_2 = 0,92$, c'est à dire :
$$\omega_2 = 0,92\omega_0 = 0,92 \times 2\pi \times 50 = 289 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$
ou tout aussi bien $\boxed{2,8 \times 10^3 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}}$ en accord avec la vitesse de rotation du moteur indiqué en annexe de l'énoncé.