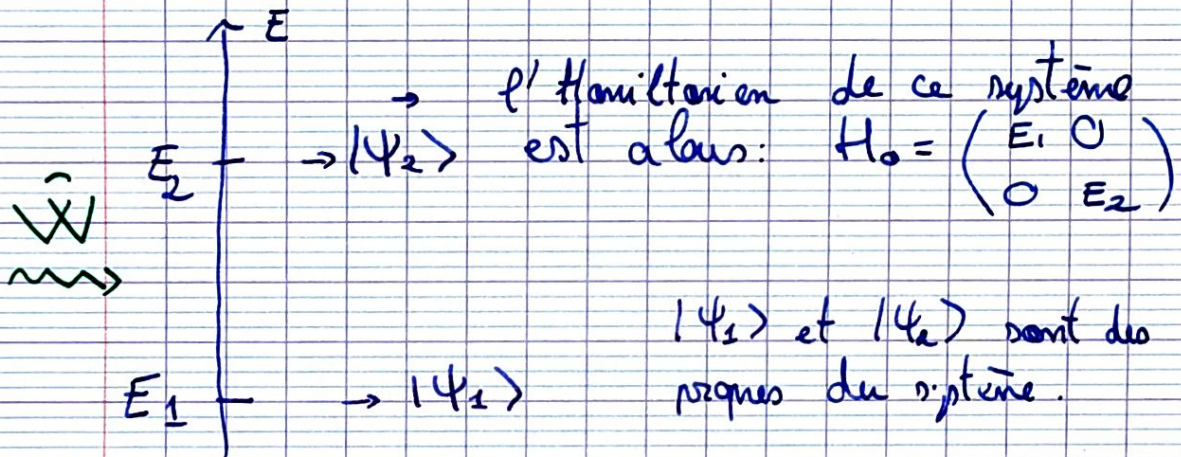


1

# I - Système à 2 niveaux - couplage la molécule d'amine

## 1/ Position du problème

→ Considérons un système isolé composé de 2 niveaux:



$|\psi_1\rangle$  et  $|\psi_2\rangle$  sont des états propres du système.

→ Rejoignons un couplage entre  $|\psi_1\rangle$  et  $|\psi_2\rangle$

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{pmatrix}$$

Le nouvel hamiltonien du système devient alors:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W} = \begin{pmatrix} E_1 & W \\ W & E_2 \end{pmatrix}$$

→  $|\psi_1\rangle$  et  $|\psi_2\rangle$  ne sont donc plus état propre.

## 2/ Calcul des états propres et énergie propre

→ Diagonalisation de  $\hat{H}$ :



2

$$\det(\hat{H}) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (E_1 + E_2)\lambda + E_1 E_2 - W^2 = 0$$

$$\Delta = (E_1 + E_2)^2 - 4(E_1 E_2 - W^2)$$

$$\text{D'où } E_{\pm} = \frac{E_1 + E_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4W^2}$$

$$\begin{cases} \alpha E_1 + \beta W = E_- \alpha \\ \alpha W + \beta E_2 = E_- \beta \end{cases}$$

La détermination des états propres nous donnerait:

$$\begin{cases} |\Psi_+\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |\Psi_1\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |\Psi_2\rangle \\ |\Psi_-\rangle = -\sin \frac{\theta}{2} |\Psi_1\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |\Psi_2\rangle \end{cases}$$

$$\text{avec } \tan \theta = \frac{2W}{E_1 - E_2} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

→ Les états propres sont des combinaisons linéaires de  $|\Psi_1\rangle$  et  $|\Psi_2\rangle$

### 3) Oscillations de Rabi

→ Supposons qu'à  $t=0$ , on ait préparé l'état

$$|\Psi(t=0)\rangle = |\Psi_1\rangle$$

En utilisant l'équation de Schrödinger:



3

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

Pour connaître l'évolution, il faut décomposer  $|\psi_1\rangle$  sur la base  $|\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |\psi_+\rangle - \sin \frac{\theta}{2} |\psi_-\rangle$$

$$\text{D'où } |\psi(t)\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\bar{E}_+ t}{\hbar}} |\psi_+\rangle - \sin \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\bar{E}_- t}{\hbar}} |\psi_-\rangle$$

Regardons la probabilité de passer de 1  $\rightarrow$  2:

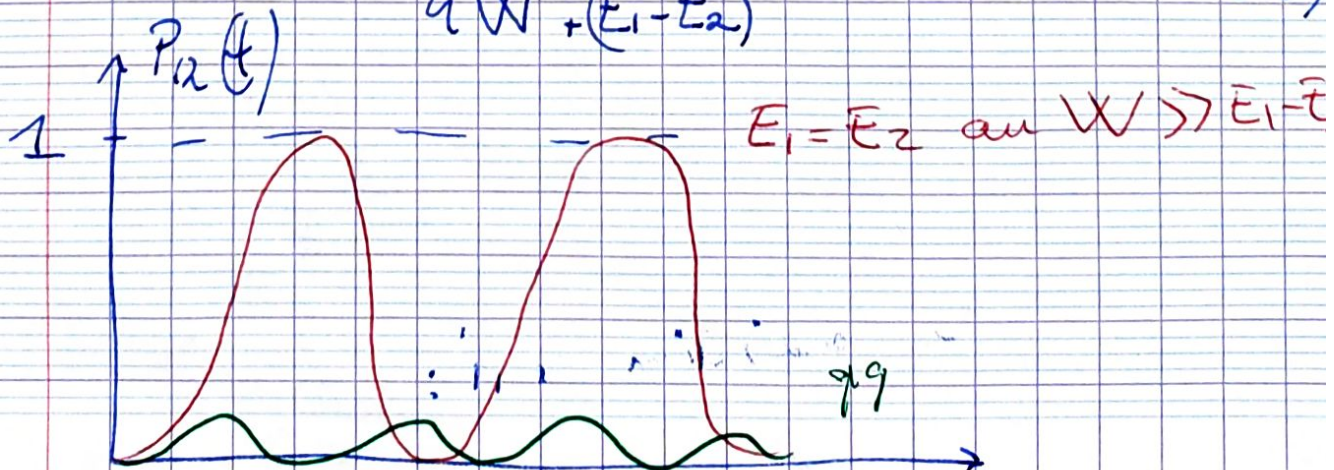
$$P_{12}(t) = |\langle \psi_2 | \psi(t) \rangle|^2$$

$$= \left| \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\bar{E}_+ t}{\hbar}} \langle \psi_2 | \psi_+ \rangle - \sin \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\bar{E}_- t}{\hbar}} \langle \psi_2 | \psi_- \rangle \right|^2$$

$$= \left| \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left( e^{-\frac{i\bar{E}_+ t}{\hbar}} - e^{-\frac{i\bar{E}_- t}{\hbar}} \right) \right|^2$$

$$= \sin^2 \theta \sin^2 \left( \frac{\bar{E}_+ - \bar{E}_-}{2\hbar} t \right)$$

$$\Rightarrow P_{12}(t) = \frac{4W^2}{4W^2 + (\bar{E}_1 - \bar{E}_2)^2} \sin \left( \sqrt{4W^2 + (\bar{E}_1 - \bar{E}_2)^2} \frac{t}{2\hbar} \right)$$





4

## 1) - Résonance magnétique :

### 1/ Champs statique et tournant

→ Soit un spin dans un champ statique  $B_0 \vec{u}_z$ .

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= - \vec{\gamma} \cdot \hat{B}_0 = - \gamma \hat{S} \cdot \hat{B}_0 \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} \text{ avec } \omega_0 = \gamma B_0 \end{aligned}$$

{ $|+\rangle, |-\rangle$ }

$\hat{S}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  On rajoute un champ tournant  $\vec{B}_1(t) = B_1 \cos(\omega t) \vec{e}_x + B_1 \sin(\omega t) \vec{e}_y$

$\hat{S}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  D'où  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \omega_1 [\cos(\omega t) \hat{S}_x + \sin(\omega t) \hat{S}_y]$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}$$

→ L'hamiltonien dépend du temps.

### 2/ Résolution dans le référentiel tournant

On a  $|\psi\rangle = a_+(t) |+\rangle + a_-(t) |-\rangle$

$$\left[ \text{On pose } |\tilde{\psi}\rangle_{t_0} = \underbrace{a_+(t) e^{i\omega t/2}}_{b_+(t)} |+\rangle + \underbrace{a_-(t) e^{-i\omega t/2}}_{b_-(t)} |-\rangle \right]$$



5

→ on se place dans le ref tournant.

→ L'équation de Schrödinger:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} a_+(t) |+\rangle = \frac{\omega_0 \hbar}{2} a_+(t) + \frac{\omega_1 \hbar}{2} a_-(t) e^{-i\omega t} \\ i\hbar \frac{d}{dt} a_-(t) |-\rangle = -\frac{\omega_0 \hbar}{2} a_-(t) + \frac{\omega_1 \hbar}{2} e^{i\omega t} a_+(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} b_+(t) = -\frac{\Delta\omega}{2} b_+(t) + \frac{\omega_1}{2} b_-(t) \\ i\hbar \frac{d}{dt} b_-(t) = \frac{\Delta\omega}{2} b_-(t) + \frac{\omega_1}{2} b_+(t) \end{cases}$$

Donc on a  $i\hbar \frac{d}{dt} |\bar{\Psi}\rangle = \bar{H} |\bar{\Psi}\rangle$

avec  $\bar{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\Delta\omega & \omega_1 \\ \omega_1 & \Delta\omega \end{pmatrix}$

$$|\Psi_1\rangle \rightarrow |+\rangle$$

$$|\Psi_2\rangle \rightarrow |-\rangle$$

$$E_1 \rightarrow -\frac{\hbar \Delta\omega}{2}$$

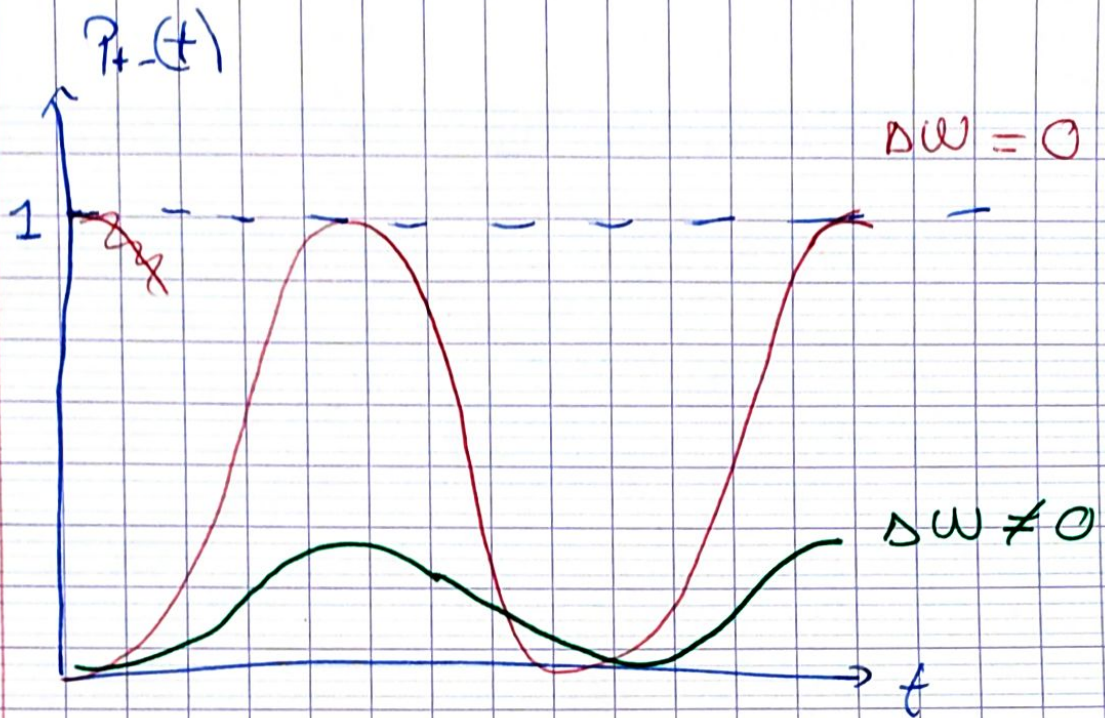
$$V = \frac{\hbar \omega_1}{2}$$

$$E_2 \rightarrow \frac{\hbar \Delta\omega}{2}$$

$$\Rightarrow \left[ P_{+-}(t) = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\Delta\omega)^2} \sin\left(\sqrt{\omega_1^2 + (\Delta\omega)^2} \frac{t}{2}\right) \right]$$



6



1/2 fact done  $\omega = \omega_0 = \gamma B_0$

$$\frac{d\langle \hat{n} \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \hat{n}}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{n}, \hat{H}] \rangle$$

$$\vec{B}_{\text{eff}} = (1-\sigma) \vec{B}_0$$

$$\omega_{\text{eff}} = (1-\sigma) \omega_0$$

$$\delta = \frac{\omega_{\text{eff}} - \omega_0}{\omega_{\text{ref}}} \times 10^6$$

qubits are  
super

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \sim 300 \text{ MHz}$$

$$\frac{\omega_1}{2\pi} \sim 500 \text{ KHz}$$