

①

Résonance magnétique. Approches quantiques et classiques.

Intro = RMN = technique permettant de sonder la matière

↳ IRTM

↳ Vu en chimie.

Mais chimie (comme en médecine), on ne vous a probablement pas expliqué les détails physiques.

But ajd = comprendre en détail cela.

I) Description classique

~~On étudie un moment cinétique $\vec{J}$~~

On étudie un moment cinétique $\vec{J}$

⇒ a un mom mag $\vec{m} = \gamma \vec{J}$ avec γ le moment gyromagnétique

Réf du labo supposé galiléen

1) Influence d'un champ magnétique statique

B_0 et CH

⇒ couple $\vec{m} \wedge \vec{B}_0$

$$\text{TTC} : \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0 \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma \vec{m} \wedge \vec{B}_0} \quad (1)$$

$$(1) \cdot \vec{m} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d\vec{m}^2}{dt} = \gamma (\vec{m} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{m} = 0 \quad \underline{\vec{m} \text{ garde un module constant}}$$

$$(1) \cdot \vec{B}_0 \Rightarrow \frac{d\vec{m}}{dt} \cdot \vec{B}_0 = 0 = \frac{d(\vec{m} \cdot \vec{B}_0)}{dt} \quad \underline{\vec{m} \text{ garde un angle constant p/r à } B_0}$$

(2)

On peut alors résoudre cette équation en supposant $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$

et $\vec{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} : \begin{cases} \frac{dm_z}{dt} = \gamma m_y B_0 \\ \frac{dm_y}{dt} = -\gamma m_x B_0 \\ \frac{dm_x}{dt} = 0 \end{cases}$

$\vec{m} \cdot \vec{B}_0 = \begin{pmatrix} m_y B_0 \\ -m_x B_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On dérive la 1^{re} eq^o p/r au temps et on injecte la 2^e:

$\bullet \frac{d^2 m_x}{dt^2} = -\gamma^2 B_0^2 m_x \Rightarrow \underline{m_x(t) = A \cos(\gamma B_0 t + \varphi)}$

et alors $\frac{dm_y}{dt} = -\gamma B_0 A \cos(\gamma B_0 t + \varphi)$

soit $\underline{m_y(t) = -A \sin(\gamma B_0 t + \varphi) + K}$ → le module de $\vec{m}$ est constant.

et $\underline{m_z(t) = \text{cte}}$

⇒ Rota° autour de $\vec{B}_0$ à la vitesse angulaire $\omega_0 = -\gamma B_0$

AN: Proton: $\gamma = 2,67 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$
Électron: $\gamma = -8,79 \cdot 10^{10} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1} \Rightarrow$ sous $B_0 = 1\text{T}$, $\nu_{0,p} = 42,5 \text{ MHz}$
 $\nu_{0,e} = 14,0 \text{ GHz}$

b) Influence d'un champ tournant

On ajoute maintenant un champ magnétique $\vec{B}_1(t)$ de module constant perpendiculaire à $\vec{B}_0$ et tournant à vitesse angulaire ω

→ Diapo pour schéma

On a alors (RMC)

$\frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma \vec{m} \wedge (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)$

→ Peut être résolu directement, mais astuce: on se place dans le réf tournant avec $\vec{B}_1$

③ Pour la formule de Bourg-Vanignon,

$$\left. \frac{d\vec{m}}{dt} \right|_{Oxyz} = \left. \frac{d\vec{m}}{dt} \right|_{Oxz} + \vec{\Omega}_{Oxz/Oxyz} \wedge \vec{m}$$

$$\text{soit } \left\{ \frac{d\vec{m}}{dt} \right\}_{Oxz} = \frac{dm}{dt} - \omega \vec{e}_z \wedge \vec{m}$$

$= B_0 \vec{e}_z \quad \quad \quad = B_1 \vec{e}_x$

faire en vectoriel!

Si on le signe n'a pas de sens

$$= \gamma \vec{m} \wedge (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) - \omega \vec{e}_z \wedge \vec{m}$$

$$= \vec{m} \wedge [(\omega - \omega_0) \vec{e}_z - \omega_1 \vec{e}_x]$$

$\Delta\omega$

⇒ Bien plus facile à résoudre :

$$\boxed{\vec{B}_{\text{eff}} := \frac{1}{\gamma} [\Delta\omega \vec{e}_z - \omega_1 \vec{e}_x]}$$

est constant dans
le réf tournant

$$\hookrightarrow \text{on a } \left. \frac{d\vec{m}}{dt} \right|_{Oxz} = \gamma \vec{m} \wedge \vec{B}_{\text{eff}}$$

⇒ Comme précédemment, $\Rightarrow \vec{m}$ rot° = rot° autour de $\vec{B}_{\text{eff}}$
à la pulsa $^\circ$ $\omega_{\text{eff}} = \gamma \|\vec{B}_{\text{eff}}\|$

Pour revenir au m^t dans le réf du labo, il suffit de composer le m^t par une rota $^\circ$ de vitesse angulaire ω

⇒ Interpréta $^\circ$
Explica $^\circ$ qualitative :

$$B_1 \ll B_0 \Rightarrow \omega_1 \ll \omega_0$$

Si $\Delta\omega = \omega - \omega_0 \gg \omega_1$, $\vec{B}_{\text{eff}}$ selon $\vec{e}_z$

Si $\omega \simeq \omega_0 (\Rightarrow \Delta\omega \simeq 0)$, résonance

④ Tr° Pour avoir une description plus précise, on fait appel à la RQ

II] Description quantique

→ On a jusqu'à présent considéré un mom mag classique.

Mais en pratique la projection du spin est quantifiée.

a) Descri^o quantique

On considère un spin $\frac{1}{2}$ → $\begin{bmatrix} |+\rangle; |-\rangle \\ +\frac{\hbar}{2} & -\frac{\hbar}{2} \end{bmatrix}$

donc $|\psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$

Hamiltonien: $\hat{H}(t) = -\hat{\vec{M}} \cdot \vec{B}(t) = -\gamma \hat{\vec{S}} (\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t))$

$$\boxed{\hat{H}(t) = \omega_0 S_z + \omega_1 (S_x \cos(\omega t) + S_y \sin(\omega t))}$$

Grâce aux matrices de Pauli:

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient:

$$\boxed{\hat{H}(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 \cos(\omega t) - i\omega_1 \sin(\omega t) \\ \omega_1 \cos(\omega t) + i\omega_1 \sin(\omega t) & -\omega_0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{+i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}}$$

d'où (Schrö):

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi\rangle \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} i \frac{da_+}{dt} = \frac{\omega_0}{2} a_+ + \frac{\omega_1}{2} e^{-i\omega t} a_- \\ i \frac{da_-}{dt} = \frac{\omega_1}{2} e^{i\omega t} a_+ - \frac{\omega_0}{2} a_- \end{cases}}$$

⑤

b) Passage au référentiel tournant

$\Rightarrow$ Sur diapo

c) Probabilité de transition; formule de Rabi

On considère un spin initialement dans l'état $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$
soit $|\tilde{\psi}(0)\rangle = |+\rangle$ du système précédent

On cherche les solutions; il faut passer par les états propres:

$$\begin{vmatrix} -\Delta\omega - \lambda & \omega_1 \\ \omega_1 & \Delta\omega - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(\Delta\omega + \lambda)(\Delta\omega - \lambda) - \omega_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \Delta\omega^2 - \omega_1^2 = 0$$

soit $\lambda = \pm \sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_1^2}$ valeurs propres

On cherche les vecteurs propres $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} -x \Delta\omega + y \omega_1 = \pm \sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_1^2} x \\ x \omega_1 + y \Delta\omega = \pm \sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_1^2} y \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\pm \sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_1^2} + \Delta\omega}{\omega_1} x$$

Condition de normalisation: $x^2 + y^2 = 1$

$$\Rightarrow x^2 \left(1 + \left(\frac{\pm \sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_1^2} + \Delta\omega}{\omega_1} \right)^2 \right) = 1$$

⑥ d'où

$$x = \pm \frac{\Delta\omega}{\omega_1}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_1}\right)^2} \pm 2\sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_1}\right)^2 + 1} \frac{\Delta\omega}{\omega_1} + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_1}\right)^2 + 1$$

$= \pm$

$$\sqrt{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_1}\right)^2} \pm \frac{\Delta\omega}{\omega_1} \sqrt{\frac{\Delta\omega}{\omega_1} + 1}$$

Condition de normalisation,

$$x^2 \left(1 + \left(\frac{\pm \sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_1^2} + \Delta\omega}{\omega_1} \right)^2 \right) = 1 = x^2 \left(\frac{\omega_1^2 + \Delta\omega^2 + \omega_1^2 \pm 2\Delta\omega \sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_1^2} + \Delta\omega^2}{\omega_1^2} \right)$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{\omega_1}{\sqrt{2\omega_1^2 + 2\Delta\omega^2 \pm 2\Delta\omega \sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_1^2}}}$$

change simplement le sens du vecteur propre

mis en prérequis

$$\text{Soit } y = \frac{\pm \sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_1^2} + \Delta\omega}{\sqrt{\quad}}$$

→ quelle est la probabilité, à un instant t , de trouver la particule dans l'état $|-\rangle$?

⇒ Oscillations de Rabi!

→ diapo

→ Géogebra

⇒ Discussion qualitative: c'est une résonance car à la condi^o $\Delta\omega = 0$ ($\Rightarrow \omega = \omega_0$), la proba atteint des maximas

⇒ un faible champ B_1 peut, par résonance, retourner le spin.

Tr^o: On a étudié 1 atome, en pratique, plein d'atomes → comment étudier cela?

III] Pour un ensemble d'atomes : évol^o de $\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle$

On a la valeur moyenne $\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle = \gamma \langle \hat{\vec{S}} \rangle$

Par le théorème d'Ehrenfest:

$$i\hbar \frac{d\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle}{dt} = \langle [\hat{\vec{\mu}}, \hat{H}] \rangle \text{ avec } \hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}$$

$$\text{Calculons: } [\hat{\mu}_x, \hat{H}] = [\gamma \hat{S}_x, -\gamma (\hat{S}_x B_x + \hat{S}_y B_y + \hat{S}_z B_z)]$$

$$= -\gamma^2 B_y [\hat{S}_x, \hat{S}_y] - \gamma^2 B_z [\hat{S}_x, \hat{S}_z]$$

$$= i\hbar \gamma^2 (B_z \hat{S}_y - B_y \hat{S}_z)$$

$$\text{d'où } \frac{d\langle \hat{\mu}_x \rangle}{dt} = \gamma (B_z \langle \hat{\mu}_y \rangle - B_y \langle \hat{\mu}_z \rangle)$$

Par permutation circulaire on obtiendrait la même chose sur y et z d'où

$$\boxed{\frac{d\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle}{dt} = \gamma \langle \hat{\vec{\mu}} \rangle \wedge \vec{B}}$$

ATTENTION on a ici très un
seul spin ! Pour s'en sortir,
il faut ~~faire~~ sommer pour obtenir
l'aimantation $\vec{M}$ que l'on mesure effectivement

↳ On obtient la même chose qu'avec l'approche classique!

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \wedge \vec{B}$$

⇒ Pour les applications (imagerie), on se contentera bien souvent de l'approche classique

CCL:

On a étudié les aspects quantiques et classiques
de la RMN, et on en a déduit que, pour les applications
usuelles, l'approche classique suffisait car un grand nombre
d'atomes était présent

Pour aller plus loin, on pourrait étudier les équ^s de Bloch
qui introduisent une dissipation notemment.

Quant au fonctionnement de l'imagerie, l'idée est la
suivante:

- chp mag B_0
- pulse B_1 par une bobine latérale
(pulse $\approx$ contient toutes les fréquences)
 $\Rightarrow$ précession des spin
- la même bobine capte alors, par induction, les
variations d'aimantation
- se TF nous ~~permet de~~ donne toutes les
fréquences qui la composent

Ces fréquences sont influencées par de nombreux
facteurs que l'on peut chercher à imager

$\Rightarrow$ chp mag local

$\Rightarrow$ densité et type de matière

$\Rightarrow$ interaction entre moments magnétiques

cf diapo

⚠ Leçon beaucoup trop
longue! J'ai passé bcp de
calculs