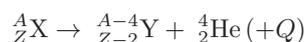


Radioactivité : approche théorique

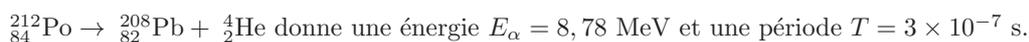
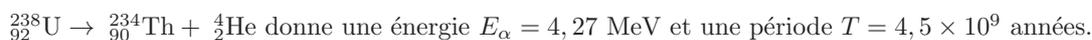
1 Radioactivité α

Dans une désintégration α



l'énergie des particules α varie faiblement, de 4 à 9 MeV, alors que les périodes varient considérablement, de 10^{-7} s à 10^{10} années.

Exemples :



Etude de la radioactivité \rightarrow loi de Geiger et Nuttal (1911) empirique. Si R est le parcours de la particule α dans un gaz à pression et température définie, on a :

$$\log(T) = A - B \log(R) \quad (5.1)$$

Par ailleurs, parcours R *dans l'air* lié à E_c (notée T_α) de la particule α par $R = 0,325 \times T_\alpha$, avec T_α en MeV et R en cm), et ceci pour $T_\alpha \in [3; 8]$ MeV. Ceci donne :

$$\log(T) = C - D \log(T_\alpha) \quad (5.2)$$

Le fait que les énergies des α soient du même ordre de grandeur alors que les périodes diffèrent de 23 ordres de grandeur demande une explication. Elle est donnée par l'effet tunnel.

1.1 Approximation semi-classique WKB

WKB = Wentzel, Kramers et Brillouin

Méthode pour trouver des solutions approchées aux équations différentielles linéaires dont les coefficients ont une variation spatiale. Lorsque la méthode est appliquée aux systèmes quantiques, on réalise un développement de la solution en puissances de \hbar .

Dans notre cas, on part de l'équation de Schrödinger à une dimension notée x :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi$$

Considère successivement deux cas :

cas $E > V(x)$

Cherche à priori une solution de la forme : $\psi(x) = U(x)e^{i\phi(x)}$. Dérivons deux fois cette fonction :

$$\psi' = (U' + i\phi'U)e^{i\phi} \quad (5.3)$$

$$\psi'' = [U'' + i(\phi'U' + \phi''U) + i\phi'(U' + i\phi'U)]e^{i\phi} \quad (5.4)$$

$$= [U'' - U\phi'^2 + i(2\phi'U' + \phi''U)]e^{i\phi} \quad (5.5)$$

L'équation de Schrödinger devient alors

$$U'' - U\phi'^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)U + i(2\phi'U' + \phi''U) = 0 \quad (5.6)$$

L'approximation WKB consiste à négliger le terme en U'' , c'est à dire à considérer que $U(x)$ varie lentement avec x . Dans ce cas, en séparant l'équation en partie réelle et partie imaginaire, on obtient pour la partie réelle :

$$\phi'(x) = \frac{\sqrt{2m(E - V)}}{\hbar} = \frac{p(x)}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.7)$$

et pour la partie imaginaire

$$2\phi'U' + \phi''U = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{U'}{U} = -\frac{1}{2} \frac{\phi''}{\phi'} \quad \Rightarrow \quad U = Cte \times (\phi')^{-1/2} \quad (5.8)$$

ce qui donne, en reportant la solution pour ϕ' :

$$U = Cte \times (E - V)^{-1/4} \quad (5.9)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\hbar} \int_0^x p(x') dx' \quad (5.10)$$

et finalement la fonction d'onde approchée

$$\psi(x) = Cte \times (E - V)^{-1/4} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^x p(x') dx'\right) \quad (5.11)$$

cas $E < V(x)$

Les solutions cherchées sont de la forme $\psi(x) = U(x)e^{-\phi(x)}$. Avec la même démarche, en négligeant U'' et en imposant la condition $2\phi'U' + \phi''U = 0$, on obtient :

$$\psi(x) = Cte \times (V - E)^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_0^x \sqrt{2m(V(x') - E)} dx'\right) \quad (5.12)$$

Transparence d'une barrière de potentiel

La transparence d'une barrière de potentiel est définie comme

$$\mathcal{T} = \left| \frac{\psi(x_2)}{\psi(x_1)} \right|^2$$

où x_1 et x_2 désignent les points tels que $V(x_1) = V(x_2) = E$.

D'après les expressions précédentes, en prenant l'origine en x_1 par exemple :

$$\mathcal{T} = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V(x') - E)} dx'\right) \quad (5.13)$$

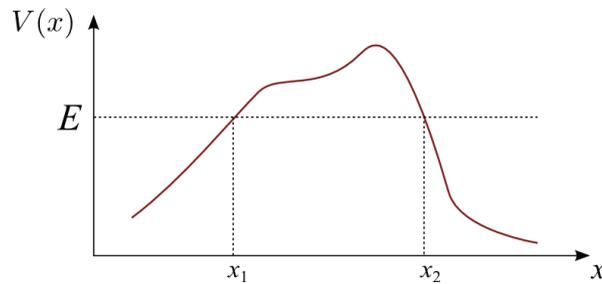


FIGURE 5.1: Calcul de la transparence d'une barrière de potentiel $V(x)$ pour une particule d'énergie E .

1.2 Autre méthode de calcul

Soit une barrière de potentiel rectangulaire, de largeur a , de hauteur V_0 ; dans le cas où $E < V_0$, le coefficient de transmission est (exercice de mécanique quantique...) :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{V_0}{E} \frac{1}{1 - \frac{E}{V_0}} \text{sh}^2(k'a)} \quad (5.14)$$

avec $k'^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)$. Dans le cas d'une barrière épaisse, c'est à dire lorsque la "longueur d'onde" $\lambda = 1/k'$ de la fonction d'onde est beaucoup plus petite que la largeur a de la barrière (ou encore $k'a \gg 1$), le sinus hyperbolique se simplifie :

$$\text{sh}(k'a) = \frac{e^{k'a} - e^{-k'a}}{2} \approx \frac{e^{k'a}}{2}$$

et T est approximé par :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{V_0}{E} \frac{1}{1 - \frac{E}{V_0}} \frac{e^{2k'a}}{4}} \approx 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right) e^{-2k'a} \quad (5.15)$$

La parabole $16x(1-x)$ varie entre 0 et 4 lorsque x varie de 0 à 1. Le maximum de 4 est atteint pour $x = 1/2$. On peut donc écrire à l'ordre de grandeur :

$$T \approx e^{-2k'a}$$

Une barrière de forme quelconque peut être approximée par une succession de barrières élémentaires d'épaisseur Δx de hauteur $V(x)$. Calculons la probabilité qu'à une particule de franchir la barrière.

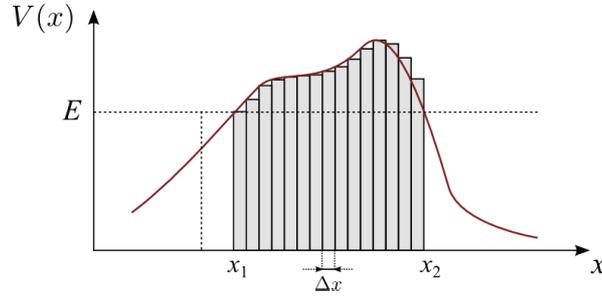


FIGURE 5.2: Calcul de la transparence d'une barrière de potentiel $V(x)$ pour une particule d'énergie E .

Soit $\mathcal{P}(x)$ la probabilité de trouver la particule en x . La probabilité de franchir la barrière de x à $x + \Delta x$ est

$$\mathcal{P}(x + \Delta x) = \mathcal{P}(x)e^{-2k' \Delta x}$$

Si on fait tendre Δx vers une valeur infinitésimale dx , cette expression se développe au premier ordre

$$\mathcal{P}(x + dx) = \mathcal{P}(x)(1 - 2k' dx)$$

donc

$$d\mathcal{P} = \mathcal{P}(x + dx) - \mathcal{P}(x) = -2k' \mathcal{P}(x) dx$$

$$\frac{d\mathcal{P}}{\mathcal{P}(x)} = -2k' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(x) = Cte \times \exp\left(\int_0^x -2k' dx\right)$$

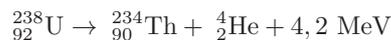
et puisque le coefficient de transmission total est par définition $\mathcal{T} = \mathcal{P}(x_2)/\mathcal{P}(x_1)$, on obtient le même résultat que dans l'approximation WKB ci-dessus :

$$\mathcal{T} = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V(x) - E)} dx\right)$$

1.3 Théorie de Gamow de la radioactivité α

Pour expliquer la loi de Geiger-Nuttal, Gamow et indépendamment Condon et Gurney ont développé, en 1929, la théorie quantique de l'effet tunnel d'une particule α à travers une barrière de potentiel coulombien.

Considérons la désintégration



Supposons que la particule α existe à l'intérieur du noyau. Elle est liée au noyau par l'interaction forte de courte portée; le potentiel peut être schématiquement représenté par la figure 5.3

et par

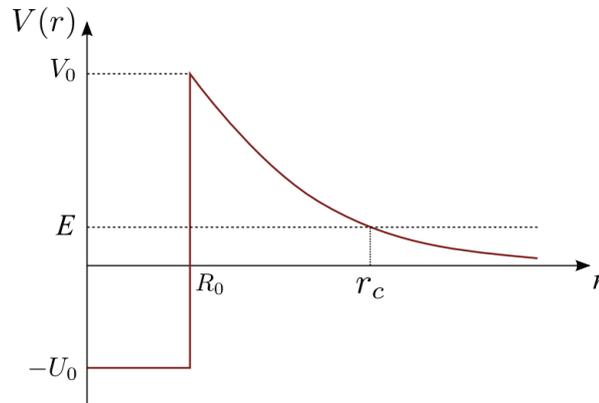


FIGURE 5.3

$$\begin{array}{lll} r < R_0, & V = -U_0 & \text{région d'interaction forte} \\ r > R_0, & V = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{région d'interaction coulombienne} \end{array}$$

où Z est le numéro atomique du noyau fils. Pour l'Uranium, on obtient les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned} R_0 &= 1,1 \left[(234)^{1/3} + 4^{1/3} \right] = 8,5 \text{ fm} \\ V_0 &= \frac{2Z}{R_0} \times \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 30,5 \text{ MeV} \\ r_c &= \frac{2Z}{E} \times \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 61,7 \text{ fm} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que la constante de structure fine s'écrit $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137$ et donc $e^2/(4\pi\epsilon_0) = (197 \text{ MeV}\cdot\text{fm})/137 = 1,44 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$.

On voit que $E \ll V_0$.

Une particule α de masse m , de vitesse v_α , à l'intérieur du noyau de rayon R_0 se heurte en moyenne $v_\alpha/(2R_0)$ fois par seconde à la barrière de potentiel. v_α peut être estimée en supposant une vitesse non relativiste (ce qui est vrai si l'on compare $E_\alpha = 4,2 \text{ MeV}$ à l'énergie de masse de la particule α qui est d'environ 4 GeV).

$$E_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_\alpha}{m_\alpha c^2}} c$$

Ce qui donne le taux de collision avec la barrière :

$$\frac{v_\alpha}{2R_0} \approx 3 \times 10^{21} \frac{\sqrt{E_\alpha}}{A^{1/3}} \approx 10^{21} \text{ collisions par seconde}$$

La probabilité de désintégration du noyau, λ est donc le produit du nombre de collisions par seconde et de la probabilité qu'une collision permette à la particule de traverser la barrière. Cette dernière est simplement le coefficient de transmission \mathcal{T} calculé précédemment. Donc :

$$\lambda = \frac{v_\alpha}{2R_0} e^{-G} \quad (5.16)$$

où $G = \frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^{r_c} \sqrt{2m(V(r) - E)} dr$ est le “facteur de Gamow”.

Calcul du facteur de Gamow G

Le calcul complet du facteur de Gamow se fera en TD. On part de

$$G = 2\sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2}} \int_{R_0}^{r_c} \sqrt{\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E_\alpha} dr = 2\sqrt{\frac{2m_\alpha E_\alpha}{\hbar^2}} \int_{R_0}^{r_c} \left(\frac{r_c}{r} - 1\right)^{1/2} dr$$

en posant $r = r_c \cos \theta$ et $\theta_c = \text{Arccos} \sqrt{\frac{R_0}{r_c}}$, et en se mettant dans l’approximation de faible énergie $r_c \rightarrow \infty$, on obtient :

$$G \approx \frac{2\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar} \left[\frac{\pi}{2} r_c \sqrt{E_\alpha} - \sqrt{R_0 r_c E_\alpha} \right] \quad (5.17)$$

le terme $r_c \sqrt{E_\alpha}$ est proportionnel à $Z/\sqrt{E_\alpha}$ et $\sqrt{R_0 r_c E_\alpha} \propto \sqrt{R_0 Z}$. Donc

$$G \approx K_1 \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} - K_2 \sqrt{R_0 Z} \quad (5.18)$$

Pour Z variant de 82 à 92, \sqrt{Z} varie de 8%, donc est à peu près constant et $G \approx K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_1'$. Le lien entre période T et énergie E_α de la particule α s’établit alors comme suit :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 e^{-G} \\ \log_{10} \lambda &= \log_{10} \lambda_0 - \frac{G}{\ln(10)} \\ \log_{10} T &= \log_{10} \frac{\ln(2)}{\lambda} = \log_{10}(\ln(2)) - \log_{10}(\lambda_0) + \frac{G}{\ln(10)} \end{aligned}$$

d’où :

$$\log_{10} T \approx C_1 \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} + C_2 \quad (5.19)$$

avec C_1 et C_2 des constantes. L’accord entre le modèle et l’expérience est remarquable pour la très grande majorité des noyaux, compte tenu de la simplicité du modèle. Le désaccord le plus important se produit pour le ${}^{210}_{84}\text{Po}$, ceci est probablement dû à la couche fermée $N = 126$ (magique) de cet isotope, qui est plus stable que prévu par le modèle de la goutte liquide.

2 Théorie de Fermi de la radioactivité β

Théorie proposée par Fermi en 1934. Ne prend pas en compte la violation de la parité (découverte en 1957) mais décrit correctement les spectres de désintégration β^+ et β^- et donne les ordres de grandeur corrects des périodes.

Rappelons ce qu’est une désintégration β^- :

