

Stabilité du noyau

Intro:

I] ~~Energie de liaison~~ Description du noyau

1) Deutérium et énergie de liaison

• ~~Ref~~

$$m_n + m_p = 2,015941 \text{ u.}$$

$$m_d = 2,013553 \text{ u.} \quad (1\text{u} = 1,660538782 \cdot 10^{-27} \text{ kg})$$

~~$m_d = 2,002388 \text{ u.}$~~

Pour plus pratique on utilise Einstein $E = mc^2$ (1^{ère} ES)
et on parle des masse $\hat{=}$ d'énergie de masse.

$$1\text{u} = 931,5 \text{ MeV}/c^2.$$

$$\text{D'où l'énergie de liaison } \underline{E_e = (m_n + m_p)c^2 - m_d c^2 \approx 2,22 \text{ MeV.}}$$

$$\underline{\Delta m = 0,002388 \text{ u}}$$

Plus généralement, l'énergie de liaison s'écrit pour un noyau ${}^A_Z X$:

$$E_e(A, Z) = (Z m_p + (A - Z) m_n) c^2 - M(A, Z) c^2$$

où $M(A, Z)$ est la masse du noyau.

2) Modèle de la goutte liquide.

Ajustement de la masse des noyaux sur l'ens. des valeurs expérimentales → formule de Bethe-Weizsacker (1936)

$$M(A, Z)c^2 = Zmpc^2 + (A-Z)m_n c^2 - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta.$$

Inter^o coulombienne $\propto \frac{Z^2}{R} \propto \frac{Z^2}{A^{1/3}}$

$$\rightarrow E_c(A, Z) = \underbrace{a_v A}_{\text{NRT Volume}} + \underbrace{a_s A^{2/3}}_{\text{NRT de surface}} - \underbrace{a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}}_{\text{Inter^o nucléaire préfère qu'il y ait une répartition 50/50 entre neutrons et protons.}} - \underbrace{a_a \frac{(A-2Z)^2}{A}}_{\text{Correction quantique}} + \delta.$$

NRT Volume : inter^o forte à courte distance → plus proches voisins (+ non pénétration) saturation lorsque #max de nucléons entourant celui concerné

NRT de surface

$$V = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\rightarrow R = r_0 A^{1/3}$$

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$$

Inter^o nucléaire préfère qu'il y ait une répartition 50/50 entre neutrons et protons.

(→ Paraboles?)

3) Vallée de la stabilité et radioactivité

↳ défaut de masse (M, Z)

~~Formule de Bethe-Weizsacker~~

$$a_v = 15,46$$

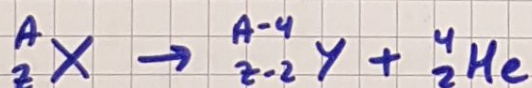
$$a_s = 17,23$$

$$a_c = 0,697$$

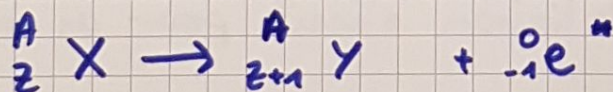
$$a_a = 23,285$$

MeV

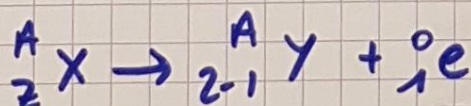
Radioactivité α : émission d'un noyau d'hélium :



Radioactivité β^- : émission d'un électron :



Radioactivité β^+ : émission d'un positron :



II) Radioactivité α

1) ~~Continuum~~ ~~problème~~ Modèle de Gamow

Potentiel :
$$V(x) = \begin{cases} -E_0 & \text{pour } x < x_0 \\ \frac{2(z-2)q^2}{4\pi\epsilon_0 x} & \text{pour } x > x_0 \end{cases}$$

On approxime $V(x)$ par une succession de barrières de potentiels de largeur dx et de hauteur $V(x)$ pour $x > x_0$.

2) Rappels sur la barrière de potentiel

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \sinh^2(qa)} \quad q = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0-E)}$$

Cas de la barrière épaisse : $qa \gg 1$

$$\sinh^2(qa) \approx \frac{1}{4} e^{2qa}$$

$$\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} > \frac{1}{4} \quad \text{Donc} \quad T \approx 16 \frac{E(V_0-E)}{V_0^2} e^{-2qa}$$

$$\ln(T) = \ln\left(16 \frac{E(V_0-E)}{V_0^2}\right) - \underbrace{2qa}_{\gg 1} \approx -2qa \rightarrow T \approx e^{-2qa}$$

3) Coefficient de transmission ~~et temps de demi-vie~~

Pour l'uranium 238, $V_0 = \frac{2(z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 x_0} \approx 74 \text{ MeV}$ pour

$x_0 = 3.5 \text{ fm}$ et $z=92$.

Or $E_\alpha = 4 \text{ MeV}$

$$T(x) \approx \exp(-2q(x)dx) \quad \text{avec} \quad q(x) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V(x)-E)}$$

~~à l'ordre 1~~

~~à l'ordre 1 pour $q(x)dx \ll 1$ i.e. $dx \ll \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V(x)-E)}}$~~

$$T(x) \approx 1 - 2q(x)dx$$

$$q(x_0) = 3.7 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-1}, \quad x_0 = 3.5 \text{ fm} \\ \rightarrow qa \approx 220 \gg 1$$

$$q(x_0) \approx 3.7 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-1}$$

$$qa \approx 220$$

Proba de transmission

$$P(x+dx) = P(x) T(x)$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{P(x+dx)}{P(x)}\right) = \ln(T(x)) = -2q(x) dx.$$

$$\approx \ln\left(1 + \frac{dP}{P}\right) \approx \frac{dP}{P}.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où} \int \ln(P) &= -\frac{2}{\hbar} \int_{x_0}^{x_m} \sqrt{2m(V(x) - E)} dx \\ &= -\frac{2}{\hbar} \int_{x_0}^{x_m} \sqrt{2m\left(\frac{2(z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 x} - E\right)} dx \end{aligned}$$

$$\text{On donne } \int_{x_0}^{x_m} \sqrt{\frac{x_m}{x} - 1} dx \approx x_m \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{x_0}{x_m}} \right)$$

$$x_m : \text{valeur de } x \text{ pour laquelle } V(x_m) = E = \frac{2(z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 x_m}$$

$$\ln(P) = -\frac{2}{\hbar} \int_{x_0}^{x_m} \sqrt{2m\left(E\left(\frac{x_m}{x} - 1\right)\right)} dx$$

$$\downarrow$$

$$x_m = \frac{2(z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 E}$$

$$= -\frac{2\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{x_0}^{x_m} \sqrt{\frac{x_m}{x} - 1} dx$$

$$\approx -\frac{2\sqrt{2mE}}{\hbar} x_m \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{x_0}{x_m}} \right)$$

$$x_m \propto \frac{1}{E}$$

~~La proba de transmission~~

$$-\frac{2\sqrt{2mE}}{\hbar} x_m \times \frac{\pi}{2} \propto \frac{\sqrt{E}}{E} = \frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$\frac{4\sqrt{2mE}}{\hbar} x_m \sqrt{\frac{x_0}{x_m}} \propto \frac{\sqrt{E}}{E} \times \sqrt{E} \approx 1.$$

$$\rightarrow \ln(P) = a - \frac{b}{\sqrt{E}} \rightarrow \text{Loi de Gamow - Condon - Gurney.}$$

$$a = \frac{4x_0\sqrt{2mV_0}}{\hbar}, \quad b = \frac{\pi x_0 V_0 \sqrt{2m}}{\hbar}$$

4) Temps de demi-vie
Particule α fait des aller-retour dans le noyau de rayon x_0 .
Vitesse $v_a \rightarrow E = \frac{1}{2} m v^2$

fréquence des rebonds : $f_n = \frac{1}{t_r} = \frac{v}{2x_0} = \frac{\sqrt{2mE}}{2x_0}$.

À chaque rebond, elle a une proba P d'être transmise :

$$dp = \frac{T}{T_r} dt = e^{a - \frac{b}{\sqrt{E}}} \frac{\sqrt{2mE}}{2x_0} dt.$$

Pour un échantillon macro : $dp = -\frac{dN}{N}$.

$$\rightarrow \frac{dN}{dt} + \underbrace{e^{a - \frac{b}{\sqrt{E}}} \frac{\sqrt{2mE}}{2x_0}}_{\lambda} N = 0$$

$$\rightarrow \frac{dN}{dt} = -\lambda N \rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

$$t_{1/2} \Rightarrow \frac{N_0}{2} = N(t_{1/2}) \Rightarrow e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \rightarrow t_{1/2} = \frac{1}{\lambda \ln(2)}.$$

Ord : 1 ms voir $\ll$

$280 \sim 4 \text{ Md an.}$