

# LPOB11 Oscillateur harmonique en mécanique classique et quantique

26 mai 2022

Niveau : L3

## 1 Objectifs pédagogiques-extraits des programmes

## 2 Messages forts de la LP

Comprendre que le modèle de l'OH est complet, permet de nombreuses approximations.

## 3 Prérequis

Mécanique classique niveau licence  
EM (théorème de Gauss)  
Mécanique quantique (formalisme, équation de Schrödinger)

## 4 Plan

### 4.1 Plan général

#### I. Oscillateur harmonique en physique classique

1. Propriétés générales des oscillateurs harmoniques
2. Application : modèle atomique de Thomson

#### II. Oscillateur en mécanique quantique

1. Propriétés générales
2. Puits de potentiel harmonique
3. Vibration diatomique, approximation harmonique

## 5 Développement

Intro : l'oscillateur harmonique est le premier modèle mécanique vu en sortie de lycée, mais on le retrouve aussi dans des cours de niveau bien plus avancé, pourquoi? Quel est l'intérêt de ce modèle?

I.1. Faire le développement proposé dans le Pérez de mécanique.

I.2. Modèle de Thomson pour l'atome d'hydrogène : En 1904, Thomson propose le modèle suivant pour décrire l'atome d'hydrogène : le charge positive  $e$  de l'atome est répartie uniformément à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon  $a$  supposée fixe dans un référentiel galiléen. L'électron M, particule ponctuelle de masse  $m$  et de charge  $-e$  se déplace librement à l'intérieur de l'atome ( $\vec{OM} = \vec{r}$ ).

En l'absence de tout champ extérieur l'électron ne subit que la force électrostatique  $\vec{f} = -e\vec{E}$

Or,  $\vec{E}$  est le champ produit par la charge positive et possède donc une symétrie sphérique. En appliquant le théorème de Gauss il vient  $E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = e\frac{r^3}{a^3\epsilon_0}$ . On en déduit l'expression de  $k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}$

En appliquant le principe fondamental à l'électron (non relativiste évidemment) on obtient l'équation différentielle  $\vec{r}'' + \omega^2 \vec{r} = 0$  où  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ . Cette équation s'intègre facilement et on obtient  $\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\vec{v}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$  en utilisant les conditions initiales.

En général,  $\vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 \neq \vec{0}$  donc l'orbite décrite est elliptique contenue dans le plan  $(\vec{r}_0, \vec{v}_0)$  de centre de symétrie O (Attention, dans la description du mouvement à force centrale, le point O occupe l'un des foyers). L'oscillateur est ici appelé oscillateur spatial.

Le modèle peut sembler rustique, toutefois en utilisant que  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , on tire que  $\lambda_0 = c/\mu_0 = 2\sqrt{m/k} = 1.18 \times 10^{-7} m$  ce qui correspond à une radiation dans l'UV (bon odg).

Transition : la mécanique classique ne permettant pas d'expliquer les liaisons moléculaires, on doit passer en mécanique quantique.

II.1. Expression de l'hamiltonien et fonction de Schrodinger associée.

II.2. On admet les opérateurs d'échelle et la forme de l'énergie. Il est sans doute intéressant de commenter le fait que l'énergie fondamentale n'est pas nulle à cause du principe d'incertitude. Deux démonstrations sont accessibles : celle de la forme de  $\varphi_0$  et la démonstration par récurrence de la forme des  $\varphi_n$  (sur slide c'est sans doute plus simple).

II.3. On fait l'étude d'une molécule diatomique comme un système à deux corps en faisant l'hypothèse du rotateur rigide (voir Cohen tome 1 complément A). Les hypothèses sont également très détaillées dans le poly d'atomes et molécules de M1.

## 6 Remarques du correcteur

Voir le livre d'Aslangul pour certaines figures, notamment pour faire un lien entre mécanique classique et mécanique quantique.

La partie sur le théorème de Gauss n'est peut être pas obligatoire

Les slides peuvent être mieux choisies (présence d'indices non explicités etc)

Il est important de savoir faire les démonstrations les plus courtes des résultats admis.

Le fait d'avoir postuler l'existence de  $a$  et  $a^\dagger$  provient d'une intuition. L'hamiltonien pouvant s'écrire  $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$ , même si ces opérateurs ne commutent pas, permet de voir un produit de la forme  $(\hat{X} + i\hat{P})(\hat{X} - i\hat{P})$

Une autre façon de résoudre le problème sans faire appel à ces opérateurs serait en faisant un développement polynomial et en identifiant (voir Aslangul?).